Allen–Cahn方程式による平均曲率流の近似と面積変化公式

田代紀一
東京工業大学理学院数学コース　博士1年

平均曲率流とは

$\{E_t\}_{t\in[0,T)} : t \in [0,T)$ でパラメータ付けられた $\mathbb{R}^n$ 内の領域,
$\partial E_t = M_t : E_t$ の境界 (滑らかと仮定する),
$h = h(x,t) : M_t$ の $x \in M_t$ における平均曲率ベクトル,
$V = V(x,t) : M_t$ の $x \in M_t$ における速度ベクトル.

$$\{M_t\}_{t\geq 0} : \text{平均曲率流} \overset{def}{\Longleftrightarrow} h(x,t) = V(x,t) \quad (\forall t\ \forall x).$$

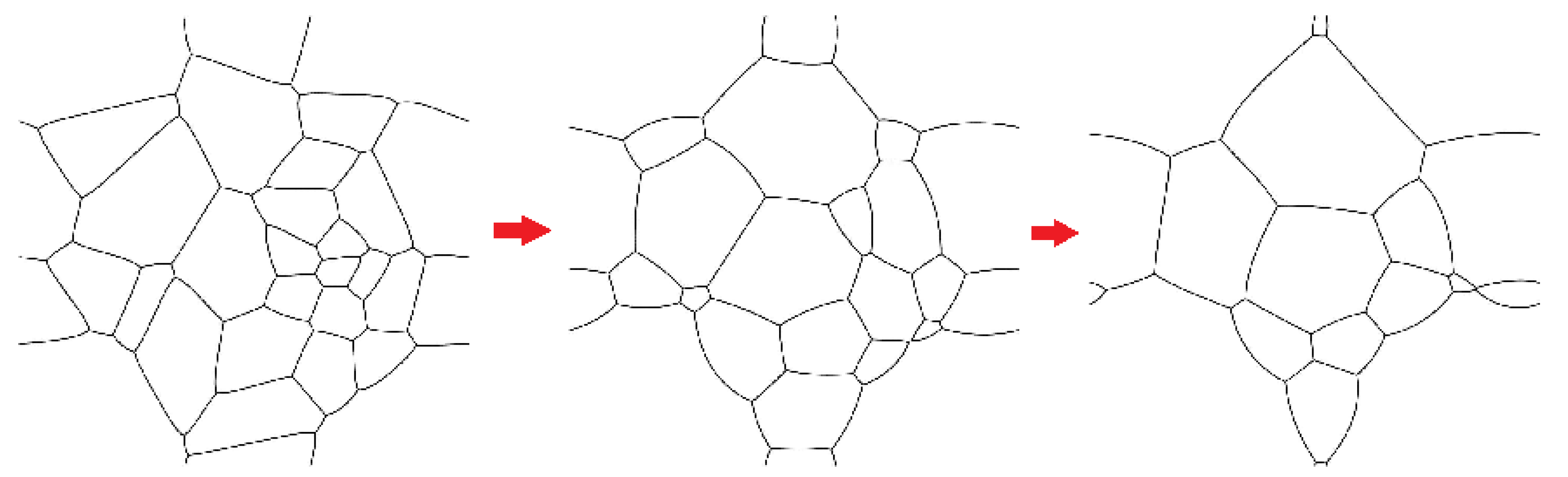
- 平均曲率流は金属の焼きなまし法のモデルとして考案された.
- 相転移の界面運動や画像処理における輪郭抽出にも応用がある.

数式の例

$f : \mathbb{R}^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$ が平均曲率流であるとき, 方程式は以下になる.

$$\frac{\partial_t f}{\sqrt{1+|\nabla_x f|^2}} = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla_x f}{\sqrt{1+|\nabla_x f|^2}}\right)$$

平均曲率流のイメージ



平均曲率流にまつわる問題

- 時間大域解を考えるため, 特異点を認める弱解概念の創出,
- 弱解の存在性とその性質の研究 (本発表の主題),
- 数値計算の結果の理論的による保証.

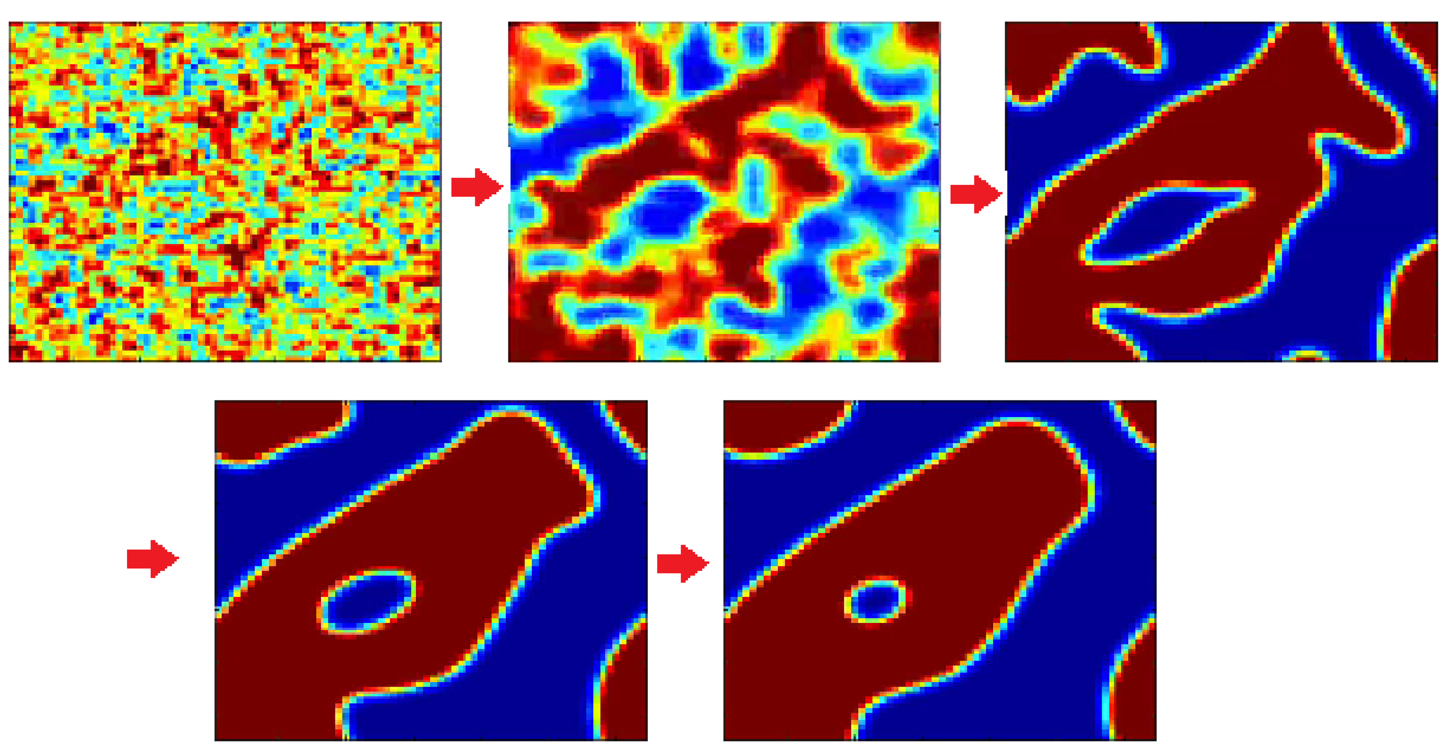
Allen–Cahn 方程式とは

$$\begin{cases} \partial_t \varphi^\varepsilon = \Delta\varphi^\varepsilon - W'(\varphi^\varepsilon)/\varepsilon^2 & (\text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty)), \\ \varphi^\varepsilon(\cdot,0) = \varphi_0^\varepsilon(\cdot) & (\text{in } \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

ここで, $W(s) = (1-s^2)^2/4$, $\varphi_0^\varepsilon \approx \chi_{E_0}$, $\varepsilon > 0$: パラメータ.

- この方程式は相分離現象のモデル方程式としてよく使われる.
- ε が相分離面の厚みを表している.
- 方程式に移流項, 体積保存項, 不均質項を付けたものも研究されている.

Allen–Cahn 方程式の解のイメージ



- $\varepsilon \to 0$ とすることで界面の運動を記述できる.

先行研究

- Brakke ('78) : 平均曲率流の弱解の枠組みの提案.
- Ilmanen ('93) : Allen–Cahn 方程式 $\overset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows}$ 平均曲率流の弱解.
- Laux–Simon ('18) : Allen–Cahn 方程式 + 収束への付加条件 $\overset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows}$ 面積変化公式.
- 上の研究の条件を無くして汎用性の高い理論を作るのが動機.

主定理 (T. in preparation.)

φ^ε : Allen–Cahn 方程式の解, $\mu_t^\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon(\cdot,t)|^2}{2} + \frac{W(\varphi^\varepsilon(\cdot,t))}{\varepsilon}\right) dx$,

とすると,

$\varphi^\varepsilon \to 2\chi_{E_t} - 1$ in L^1 and a.e. pointwise, $\mu_t^\varepsilon \rightharpoonup \mu_t$: 平均曲率流の弱解が先行研究よりわかる. この E_t について, μ_t の平均曲率を h とすると, 任意の $0 \leq t_1 < t_2$ と $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$\int_{E_t} \phi(x)\, dx \Big|_{t=t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial^* E_t} \phi(x) \left(h(x,t) \cdot \nu_{\partial^* E_t}(x)\right) d\mathcal{H}^n dt$$

が成立. ただし, $\nu_{\partial^* E_t}(x)$ は $\partial^* E_t$ の外向き単位法線方向ベクトル.

証明の概略

- 主な方針は Mugnai–Röger ('08) の結果を精密化し, Stuvard–Tonegawa ('22) の幾何学的測度論の一般論を適用すること.
- Step1 : 任意の $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ に対し次を示す:
$$\left|\int_0^T \int_U (\partial_t\phi + \nabla\phi \cdot h)\, d\mu_t dt\right| \leq C \sup_{U\times(0,T)} |\phi|,$$
ここで $0 < T < \infty$, U : 有界領域, $C = C(U,T) > 0$: 定数.
- Step2 : $d|(\nabla,\partial_t)\chi_E| \ll d\mu_t dt$ を示す, ここで $E = \{(x,t) \mid x \in E_t\}$.
- 一般論を適用し, 求める公式を得る.

主結果についての注意

- この結果は h に以下の結果で得られている項を加えても成立する.
  - Jiang–Wang–Zheng ('20) : 移流項 + 不均質項 ($h \mapsto h + u^\perp - \nabla^\perp K/2K$)
  - Takasao ('23) : 体積保存項 ($h \mapsto h + \lambda$, λ は体積の時間変化が0になるような補正項).
- この結果の式から, ある種の安定性と部分的な一意性が得られる (Fischer–Hensel–Laux–Simon ('20)).

今後の展望

- ちぎれたり, くっついたり, 領域が消えたりした後も解は一意になるか? (理論的には未解決問題.)
- 数値計算での結果を理論的に証明できるか? (時間について分数階にしたものや様々な補正項を加えたAllen–Cahn方程式が数値計算的に研究されている.)
- この公式からより詳しい曲面の情報が得られるか? (特異点が起こる時刻や特異点周りの形状.)

謝辞

本研究はJST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業JPMJFS2112の支援を受けたものです.