平面曲線に現れる特異点の分類と判定条件

松下　尚生

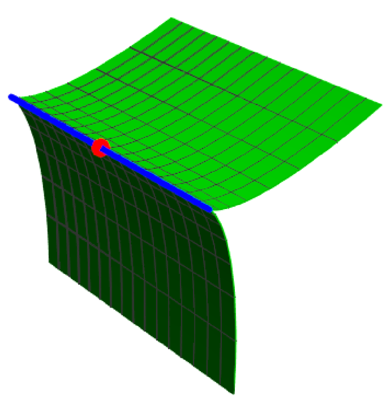
九州大学大学院数理学府博士3年; matsushita.yoshiki.297@s.kyushu-u.ac.jp

講演概要

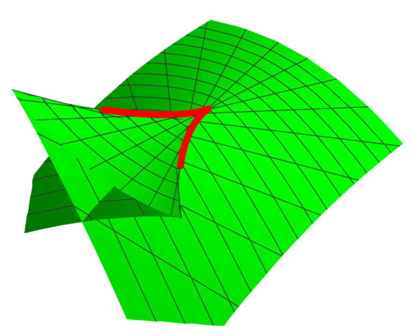
曲線や曲面に現れる特異点付近の振る舞いは，そうでない点と比べて非常に複雑であることが知られている．本講演では，特異点の分類やそれらに関して得られた判定条件を紹介する．

研究内容(曲線や曲面の特異点論)

曲線や曲面の特異点とは、多くの場合尖った点として現れる．



カスプ辺



ツバメの尾

カスプ

特異点の種類は無数に存在する．従って，研究意義のある特異点を考え，それらの幾何学的な性質や判定法の研究を行うことが重要になる．

特異点の判定について (C^r級同値と$\mathcal{A}$-同値)

γ_1, γ_2 : $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$を平面曲線とする．

- γ_1とγ_2が$t=0$でC^r級同値であるとは，C^r級微分同相写像 $\psi : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$と$\Psi : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$が存在して，$\Psi \circ \gamma_1 \circ \psi^{-1} = \gamma_2$が成立するときをいう．ただし，$r \in \mathbb{N}_{>0} \cup \{\infty, \omega\}$．
- $r = \infty$のとき，$\mathcal{A}$-同値という．

平面曲線に現れる特異点の例 (n, m) カスプ

- 平面曲線γが$t=0$で(n, m)カスプであるとは，γが$Cusp_{n,m}(t) := (t^n, t^m)$と$t=0$で$C^r$級同値であるときをいう．

分類に関する注意

- 特異点の分類は状況に応じて，rの値を変えることで行う．いずれにせよ，上記の定義から特異点の型を判定するのは非常に難しい(目視の判定もほぼ不可能)．
- 特異点に関する簡単な判定条件を研究するのは非常に重要．
- カスプ辺やツバメの尾に関しても判定条件が知られている(非退化特異点の特異方向とか退化ベクトル場といった概念で記述可能)．

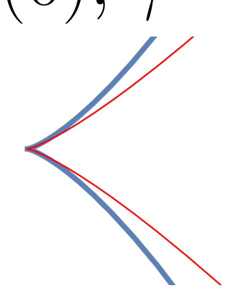
定理 ($\mathcal{A}$-同値の意味での判定条件 [2,3])

- γが$t=0$で$(2,3)$カスプ
  $\iff \gamma'(0) = \mathbf{0}$, $\det(\gamma''(0), \gamma'''(0)) \neq 0$.
- γが$t=0$で$(3,4)$カスプ
  $\iff \gamma'(0) = \gamma''(0) = \mathbf{0}$, $\det(\gamma'''(0), \gamma^{(4)}(0)) \neq 0$.
- γが$t=0$で$(2,5)$カスプ
  $\iff \gamma'(0) = \mathbf{0}$, $\det(\gamma''(0), \gamma'''(0)) = 0$,
  $3\det(\gamma''(0), \gamma^{(5)}(0))\gamma''(0) - 10\det(\gamma''(0), \gamma^{(4)}(0))\gamma'''(0) \neq 0$.
- $\gamma'(0) = \mathbf{0}$, $\gamma''(0) \neq \mathbf{0}$, $\gamma'''(0) = \cdots = \gamma^{(n-1)}(0) = \mathbf{0}$, $\det(\gamma''(0), \gamma^{(n)}(0)) \neq 0 \Longrightarrow \gamma$が$t=0$で$(2,n)$カスプ．($n$は7以上の奇数)

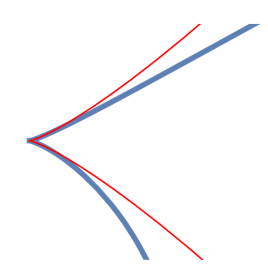
- $(2,3)$カスプと$(3,4)$カスプの判定条件を見ると$(n, n+1)$カスプの判定条件に拡張出来そう!?

定理 ($(4,5)$カスプと$(n, n+1)$カスプの判定条件 [1])

- γが$t=0$で$Cusp_{4,5}$と$\mathcal{A}$-同値 $\iff$
  $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \gamma'''(0) = 0$, $A \neq 0$,
  $-22B^2 + 25AD + 20AC = 0$.
  ただし，$A = \det(\gamma^{(5)}, \gamma^{(4)})(0)$, $B = \det(\gamma^{(6)}(0), \gamma^{(4)}(0))$, $C = \det(\gamma^{(7)}(0), \gamma^{(4)}(0))$, $D = \det(\gamma^{(6)}(0), \gamma^{(4)}(0))$.
- γが$t=0$で$Cusp_{n,n+1}$とC^1級同値 $\iff$
  $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \cdots = \gamma^{(n-1)}(0) = 0$,
  $\det(\gamma^{(n)}(0), \gamma^{(n+1)}(0)) \neq 0$.



(t^4, t^5)と$(t^4, t^5 + t^7)$
(これらは$\mathcal{A}$-同値ではないが，C^1級同値)



(t^4, t^5)と$(t^4 + t^7, t^5)$
(これらは$\mathcal{A}$-同値)

References

[1] Y. Matsushita, On the classifications of cusps appearing on plane curves, in preparation.

[2] I. R. Porteous, Geometric differentiation. For the intelligence of curves and surfaces. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. MR1871900

[3] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Differential geometry of curves and surfaces with singularities, Series in Algebraic and Differential Geometry, vol. 1, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2022, Translated from the 2017 Japanese original by Wayne Rossman. MR 4357539