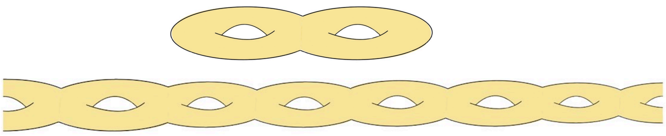
無限型 RIEMANN 面の TEICHMÜLLER 空間及び退化現象

松田 凌
京都大学理学研究科数学系 博士 2 年
E-mail: matsuda.ryou.82c@st.kyoto-u.ac.jp

研究の背景

Riemann 面とは, 次に示すような立体の表面:



である. 穴 (種数) が有限個のものを, 有限型, そうでないものを無限型という. 古くから研究の対象であり, 最も古典であり, 最新の研究対象である. また, 画像認識や顔認証技術, 3D マッピングなど対象を Riemann 面と見做すことで, 膨大な応用が存在する. 従って, Riemann 面を数学的に理解することは, 応用上も重要である.

Riemann 面 S の Teichmüller 空間 $T(S)$ とは, S の複素構造を擬等角写像を標識に変形したもの全体の空間であり,

$$T(S) \text{ の幾何学} = S \text{ の構造}$$

である. また, Bers 境界と呼ばれる境界上では, S **の退化した複素構造が存在する. "構造" を壊す (退化) ことは, 構造を理解するのに有用である**.

有限次元 (有限型) の場合の退化現象は非常に良く解明されている ([Ber]). Bers は起こる退化は, 全退化と cusp と呼ばれる 2 種類に分類されることを証明した. また, 境界の構造についてもよく知られている.

一方で, 無限次元 (無限型) の場合は, **その退化についてはよくわかっていない部分が多くあり, 退化の種類や境界の構造についてよくわかっていなかった.** 本研究では, 無限型の場合に起こる特有の退化現象 (擬フックス b 退化) とその応用として, Bers 境界の構造の解析を行なっている.

目標

"$\mathbb{D}$ から $T(S)$ への正則写像が正則摂動を許容しない (正則剛性) ための十分条件は何か", という問いがある. これは, $T(S)$ の (複素) 幾何的な性質を問うている. しかし, 有限次元において, Bers 境界の構造による結果と合わせることで, "等長写像は正則写像になる" という重要な応用などが得られた ([Ant]). 本研究では, これらの現象が無限次元の場合にどのように拡張されるか, またされないかを目標としている.

特に, 以下の定理を雛形にしている:

> 正則剛性定理 (Tanigawa, '94 [Tan])
> $T(S)$ が有限次元のとき, 正則写像 $f : \mathbb{D} \to T(S)$ が次の条件を満たせば正則剛性を持つ.
> $$B_f := \{e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D} \mid \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) \in \partial_{Bers} T(S)\} \text{ の}$$
> Lebesgue 測度 $m_{leb}(B_f) > 0$

この定理は, Bers 境界の構造と重要な関わりを持つ:

> Maximal cusps are dense(McMullen, '91 [McM])
> $T(S)$ が有限次元のとき, Bers 境界には, Maximal cusps は稠密に存在する.

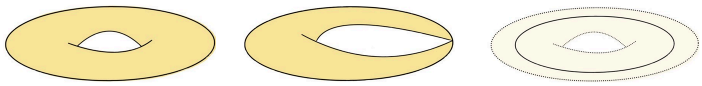
Maximal cusp とは, 複素構造の退化の中でも, それ以上変形の余地がない, 特別な退化である.

興味を持っている点

有限次元の境界に存在する退化は以下の二種類であることが知られている:

- Cusp $\cdots$ S 上の測地閉曲線を一点に潰す退化
- 全退化 $\cdots$ 双曲面積が 0 になる退化

Maximal cusp とは, 全ての測地閉曲線が一点に潰れた退化.



トーラス　　cusp　　全退化

これらは, 位相的に壊れている. 一方で, 無限次元の場合, **3 つではない退化が Bers 境界に存在するか知られていなかった.** 特に位相的には退化せず, 複素構造のみが退化するような現象の存在が考えられていた. 条件を満たす現象の構成は, 複素構造を本質的に理解することにつながる.

以下では, 位相的な退化はせず, 複素構造のみが退化する現象: **擬フックス b 型の退化**の存在と応用として Bers 境界の構造について述べる.

結果

> **Main Result A.** Riemann 面 S は閉測地線の長さの下限が, 0 より大きい無限型とすると, $T(S)$ は Bers 境界には, シン・擬 Fuchs b 退化が存在する. 特に, Bers 境界に含まれる無限次元複素多様体であって, 擬 Fuchs b 退化のみからなるものが存在する.
>
> **Main Result B.** (Maximal cusps are not dense) Riemann 面 S が有界パンツ分解を持つ無限型のとき, Bers 境界に Maximal cusp は稠密ではない.

独創的な点

1. 複素幾何的視点を, 無限次元で展開する点:

正則剛性は, $T(S)$ の複素幾何学的な問題である. これは, (Bers) 境界の構造とも密接に関係していることが, 有限次元の場合に確認されている. これを無限次元に拡張することで, **境界の構造と正則剛性の関係の完全な理解への手掛かり**になる. つまり, Riemann 面の理解という点において重要である. 加えて, 位相幾何学や Klein 群, 代数幾何への応用がある. 加えて, 無限型 Riemann 面は平面の開集合を含む広いクラスであるから, 理論物理などへの応用もある.

2. 解析的無限型 Riemann 面の変形理論の大域的な議論の構築を目指す点 :

当該分野の状況でも述べたように, **解析的無限型 Riemann 面の変形理論は未だほとんど手付かずの状態である.** 特に Bers 境界の研究においては, 無限型の特徴を反映するような研究は全くない.

References

[Ant] Stergios M. Antonakoudis, Isometric disks are holomorphic, Invent. Math., **207** (2017), no.3, 1289 -1299.
[Ber] L. Bers, On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups, I, Ann. of Math., **91** (1970), 570–600.
[McM] C. McMullen, Cusps are dense, Ann of Math. (2) **133** (1991), no. 1, 217–247.
[Tan] H. Tanigawa, Holomorphic families of geodesic discs in infinite dimensional Teichmüller spaces, Nagoya Math. J., **127**, (1992),117-128.