接合漸近展開に基づく容量の近似計算法

三好 裕之（東京大学情報理工学系研究科特任研究員）,
Darren G. Crowdy (Imperial College London)

1. Conformal capacity

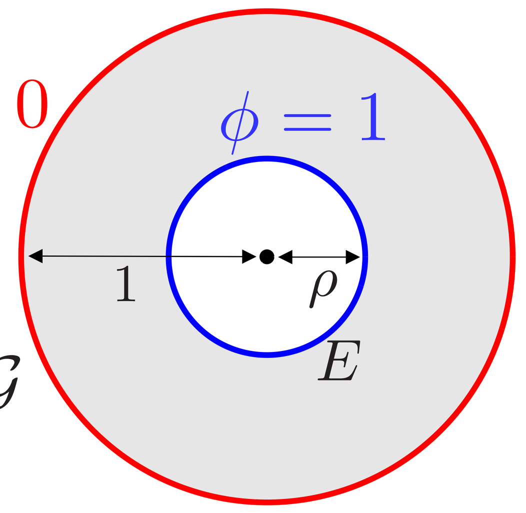
1.1 定義

$$\mathrm{cap}(\mathcal{G}, E) := \int_\Omega |\nabla\phi|^2 dS$$

$$\nabla^2\phi = 0 \text{ in } \Omega$$

$$\begin{cases} \phi(x,y) = 1 & \text{on } (x,y) \in \partial E, \\ \phi(x,y) = 0 & \text{on } (x,y) \in \partial\mathcal{G}. \end{cases}$$

例: アニュラス



$$\mathrm{cap} = \frac{2\pi}{\log(1/\rho)}$$

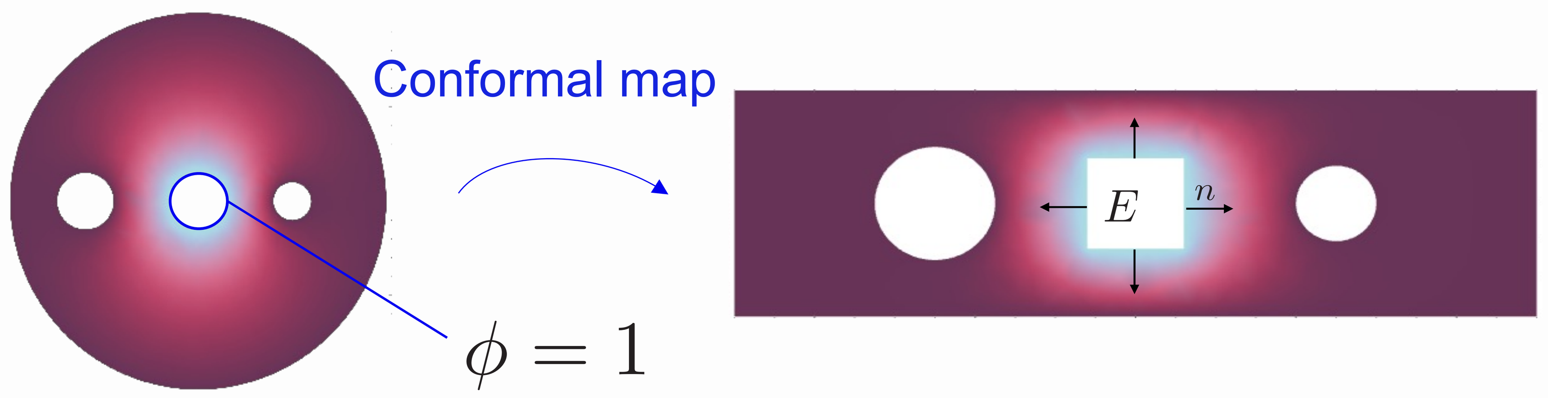
1.2 容量の性質

- 容量と「湧き出し」の等価性

ガウスの発散定理を用いると

$$\mathrm{cap}(\mathcal{G}, E) := \int_\Omega |\nabla\phi|^2 dS = -\int_{\partial E} \phi\frac{\partial\phi}{\partial n} ds = \underbrace{-\int_{\partial E} \frac{\partial\phi}{\partial n} ds}_{E\text{における湧き出しに相当}}$$

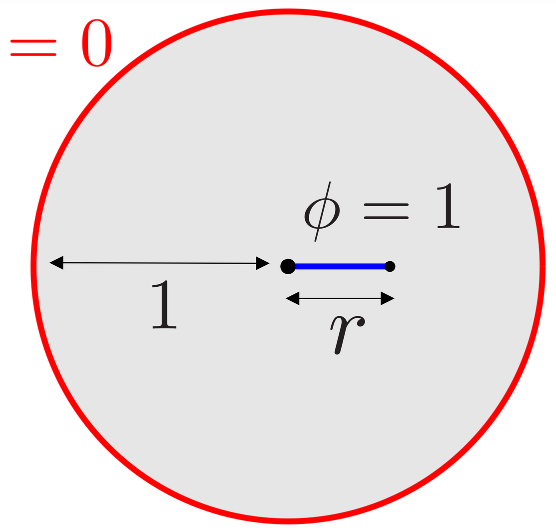
- 等角不変性 – 等角写像を見つけることで容量計算が可能



1.3 Nontrivial な例: Grötzsch ring

第一種楕円積分を用いて記述される.

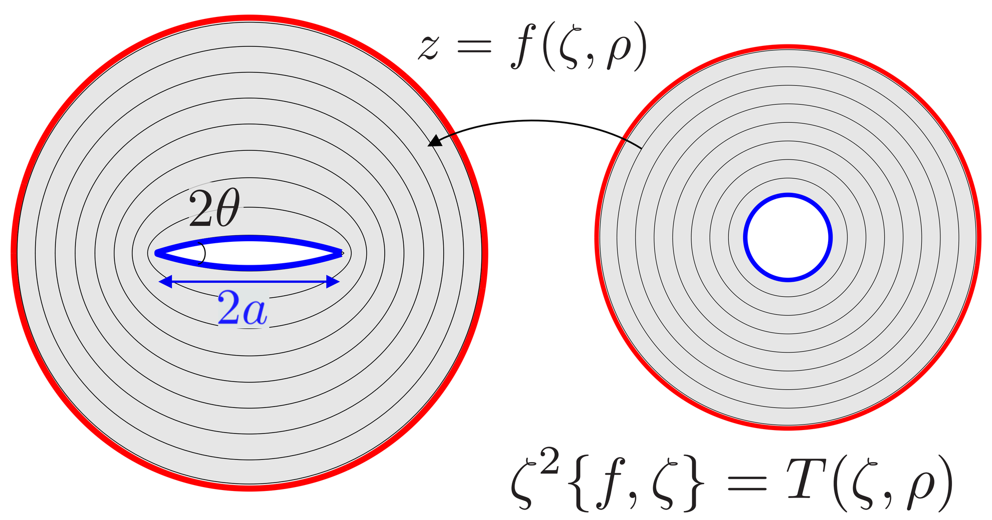
$$\mathrm{cap} = \frac{2\pi}{\mu(r)}, \quad \mu(r) \equiv \frac{\pi}{2}\frac{K(\sqrt{1-r^2})}{K(r)}$$



2. 一般的な形状における容量

容量の陽な式を得ることは困難

(i) 数値等角写像 [1]

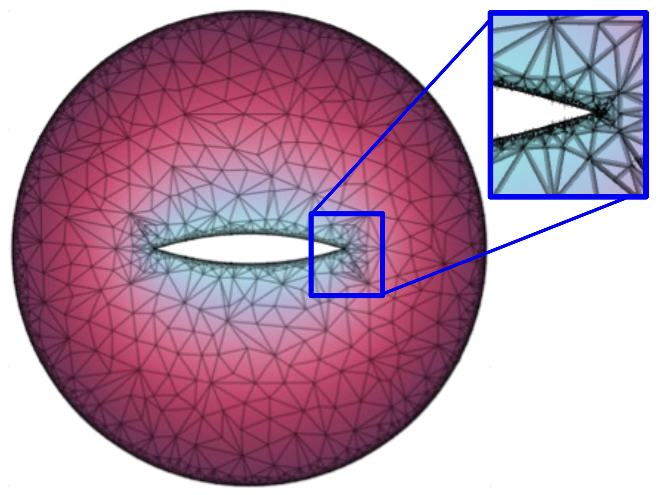


$$\zeta^2\{f, \zeta\} = T(\zeta, \rho)$$

$$T(\zeta, \rho) = \frac{\alpha^2 - 1}{2}(L(\zeta, \underline{\rho}) + L(-\zeta, \underline{\rho})) + \underline{C}$$

× パラメータを求めるための非線形最適化

(ii) 有限要素法



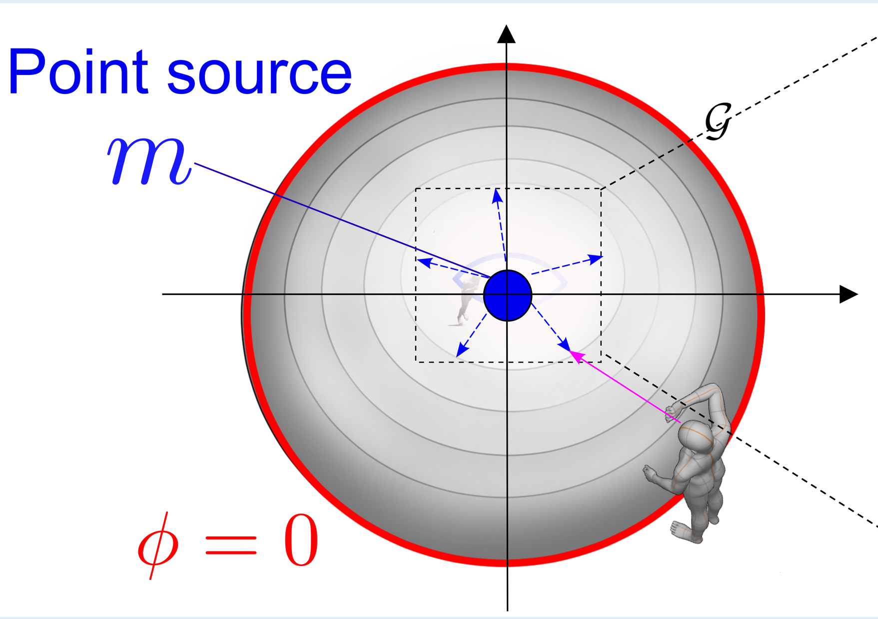
$$\mathrm{cap} \approx \sum_i |\nabla\phi_i|^2 \Delta_i$$

× エッジ付近での計算量増加

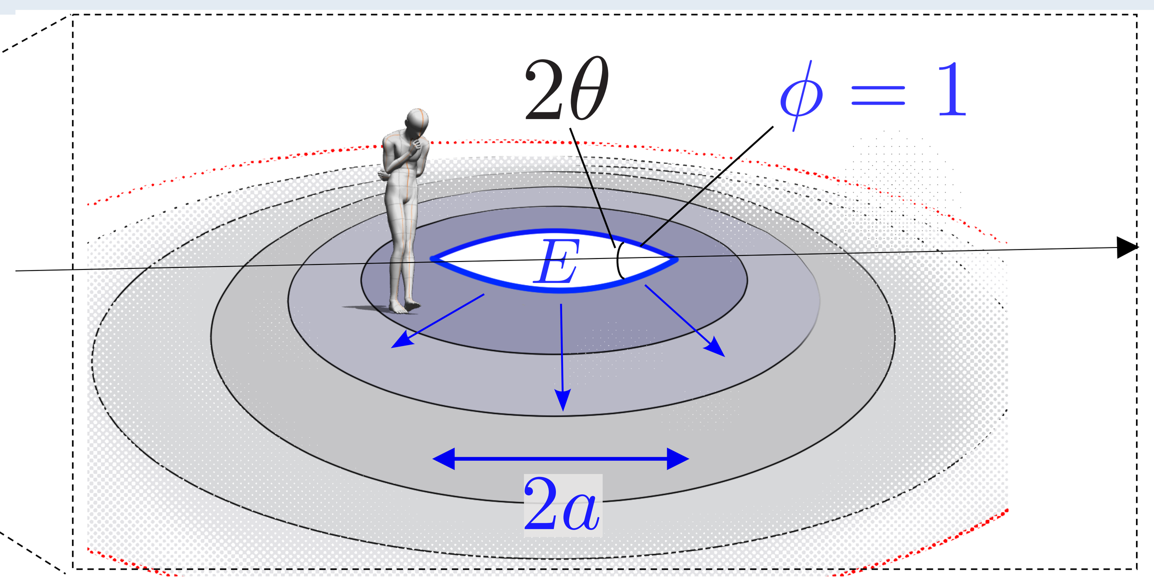
接合漸近展開を利用し，容量を近似する方法を提案する.

提案法

- 外部解



- 内部解



$$W_{\mathrm{outer}}(z) = \boxed{\frac{m}{2\pi}\log z}$$

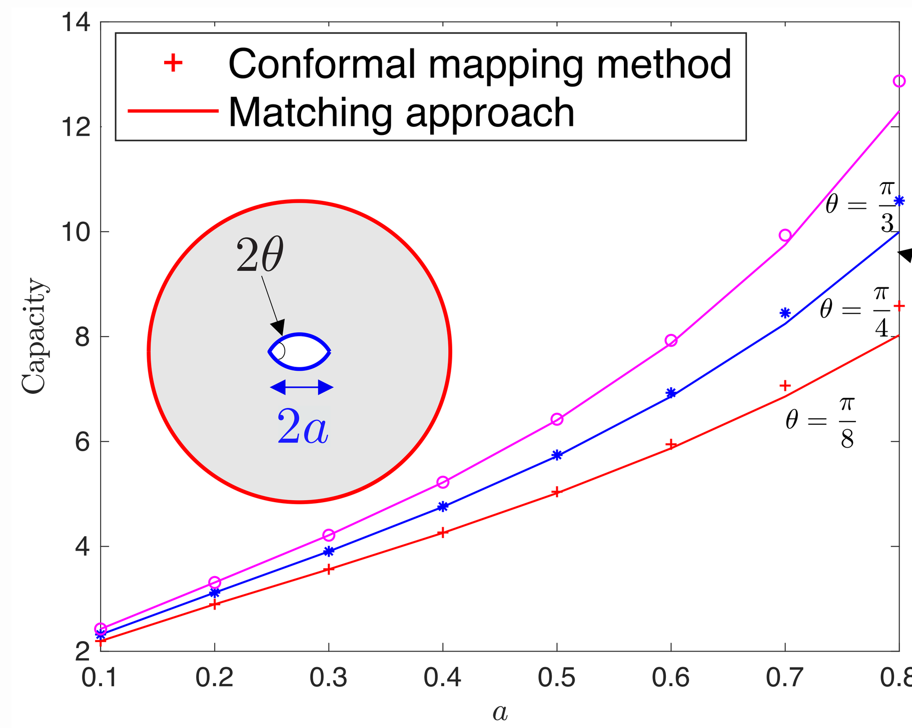
$$W_{\mathrm{inner}}(z) = 1 - \frac{m}{2\pi}\log\left[-\frac{(z/a-1)^{\pi/2(\pi-\theta)} - (z/a+1)^{\pi/2(\pi-\theta)}}{(z/a-1)^{\pi/2(\pi-\theta)} + (z/a+1)^{\pi/2(\pi-\theta)}}\right]$$

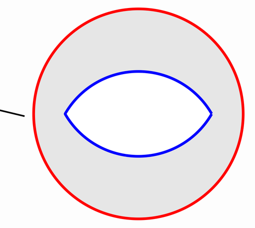
$$= \boxed{1 - \frac{m}{2\pi}\log\left(\frac{\pi a}{2(\pi-\theta)}\right)} + \frac{m}{2\pi}\log z \cdots$$

Matching!

$$\boxed{\mathrm{cap} = -m \approx \frac{2\pi}{\log\left(\frac{2(\pi-\theta)}{\pi a}\right)}}$$

3. 数値実験結果

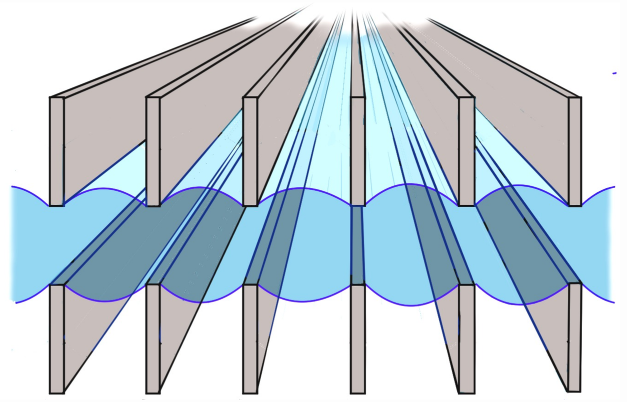




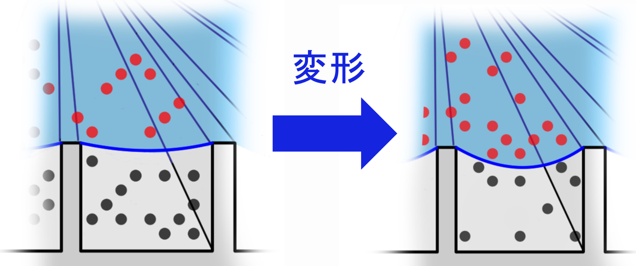
$$\mathrm{cap} = -m \approx \frac{2\pi}{\log\left(\frac{2(\pi-\theta)}{\pi a}\right)}$$

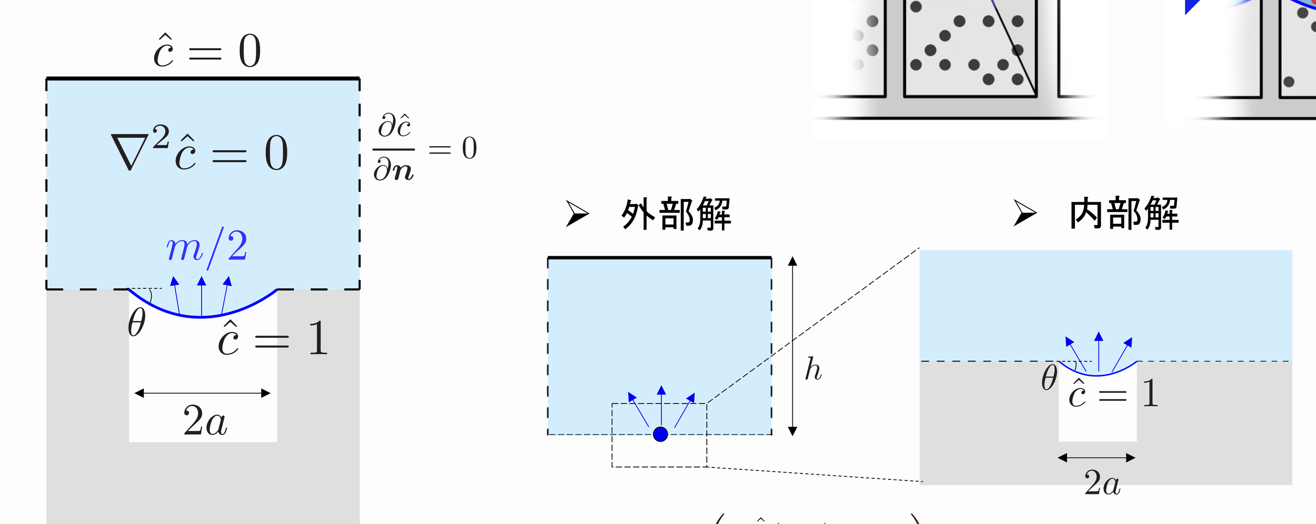
内部領域が大きい範囲 ($a > 0.5$) でも高精度で近似可能.

4. 応用例: 超撥水表面を持つチャネルの Diffusion rate の計算



- 超撥水表面を持つ流体はガスの拡散により変形する。
- 変形にかかる時間などは明らかにされていない。





$$\rho = e^{-2\pi h/L}$$

$$W_{\mathrm{outer}}(z) = \frac{m}{2\pi}\log z + \frac{m}{2\pi}\log\left(\frac{\pi\hat{P}(1,\rho)}{LP(\rho,\rho)} \cdot \rho^{1/4}\right)$$

$$W_{\mathrm{inner}}(z) = 1 - \frac{m}{2\pi}\log\left(\frac{\pi a}{2(\pi+\theta)}\right) + \frac{m}{2\pi}\log z$$

$$F = -\frac{D_g m(c_g - c_0)}{2} \approx -\frac{D_g\pi(c_g - c_0)}{\log\left(\frac{\pi^2 a\hat{P}(1,\rho)}{2(\pi+\theta)LP(\rho,\rho)} \cdot \rho^{1/4}\right)}$$

流体へのガスの拡散量

流体へのガスの拡散量を陽な形で近似可能.
→ 変形を数値的に評価することが可能.

References

[1] D. Crowdy 2020, Solving problems in multiply connected domains, SIAM.
[2] H. Miyoshi, D. Crowdy, 2023, Estimating conformal capacity using asymptotic matching IMA Appl. Math.

Contact: hiroyukimiyoshi@g.ecc.u-tokyo.ac.jp