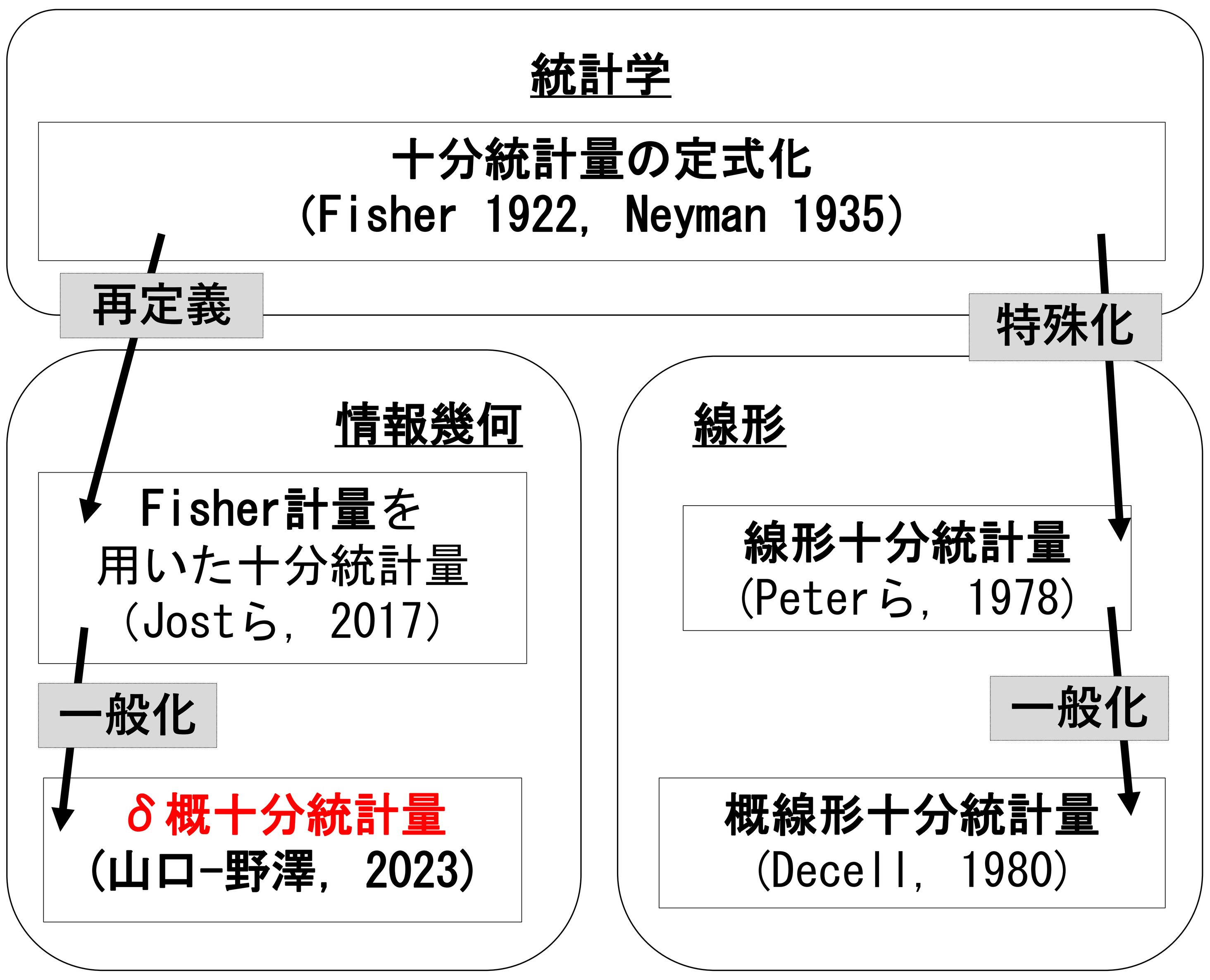
On statistics which are almost sufficient from the viewpoint of the Fisher metrics

1．研究の背景



- 十分統計量は**最尤推定**に用いられる
- 十分統計量が存在しない場合，十分統計量に近い統計量によって**近似的**に最尤推定を行いたい

よって，概十分統計量を定義することは応用上意味があるが，**Decellが定義した概十分統計量は応用には繋がらなかった。**
その理由は，**線形の場合の特殊化。**

2．Fisher計量を用いた十分統計量とδ概十分統計量の定義

定義（Fisher計量）

$$(M,\Omega,\mathbb{P}) : 2-integrable \quad PMM,$$

$$\mathbb{P}(\xi) = p(\cdot;\xi)\mu_0, \quad \mu_0 : measure,$$

$$\mathfrak{g}(v,w) = \int_\Omega (\partial_v \log p(\cdot;\xi))(\partial_w \log p(\cdot;\xi))d\mathbb{P}(\xi) \quad for \quad v,w \in T_\xi M$$

- Fisher計量…情報量の変わり具合
- 十分統計量…情報ロス無し
- δ概十分統計量…Fisher計量をバイリプシッツ同値だけ変える統計量

定義（十分統計量）

$$a \quad statistic \quad \kappa : \Omega \to \Omega' \quad is \quad sufficient$$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \mathfrak{g}'(v,v) = \mathfrak{g}(v,v) \quad for \quad all \quad v \in T_\xi M$$

定義（δ概十分統計量）

$$0 < \delta \le 1,$$

$$a \quad statistic \quad \kappa : \Omega \to \Omega' \quad is \quad \delta-almost \quad sufficient$$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \delta^2 \mathfrak{g}(v,v) \le \mathfrak{g}'(v,v) \quad for \quad all \quad v \in T_\xi M$$

3．十分統計量の特徴づけとδ概十分統計量の特徴付け

十分統計量の特徴づけ

$(1)\kappa \quad is \quad sufficient \quad for \quad (M,\Omega,\mathbb{P})$

$(2)\partial_v \log p = \partial_v \log \kappa^* p'$
$\quad for \quad every \quad tangent \quad vector \quad v \quad on \quad M.$

$(3) map : \xi \mapsto \dfrac{p(\cdot;\xi)}{p'(\kappa(\cdot);\xi)} \quad is \quad constant.$

$(4)\exists s : \Omega' \times M \to \mathbb{R}, \exists t \in L^1(\Omega,\mu_0) \quad s.t.$
$\quad p(\cdot;\xi) = s(\kappa(\cdot);\xi)t(w) \quad \mu_0 - a.e. \quad \forall \xi \in M$

δ概十分統計量の特徴づけ

$(1) statistic \quad \kappa \quad is \quad \delta-almost \quad sufficient.$

$(2)\left\| \partial_v \log \dfrac{p(\cdot;\xi)}{\kappa^* p'(\cdot;\xi)} \right\| \le \sqrt{1-\delta^2} \|\partial_v \log p(\cdot;\xi)\|$

$(3) map : \xi \mapsto \log \dfrac{p(\cdot;\xi)}{p'(\kappa(\cdot);\xi)} \quad is$
$\quad \sqrt{1-\delta^2} - locally \quad Lipschitz$

$(4)\exists s : \Omega' \times M \to \mathbb{R}, \exists t : \Omega \times M \to \mathbb{R}_{>0} \quad s.t.$
$\quad \log t \in L^2(\Omega,\mu_0)$

$\quad p(\cdot;\xi) = s(\kappa(\cdot);\xi)t(\cdot;\xi)$
$\quad for \quad \mu_0 - a.e. \quad \omega \in \Omega, \forall \xi \in M$
$\quad map : \xi \mapsto \log t(\cdot;\xi) \quad is \quad \sqrt{1-\delta^2}-locally \quad Lipschitz$