

異常拡散方程式に対する基本解近似解法における Convolution Quadrature Method の適用

大江 貴司¹

¹ 岡山理科大学理学部
e-mail : ohe@ous.ac.jp

1 はじめに

時間微分項に非整数階微分を含むような異常拡散方程式は、土壌内の汚染物質の拡散や生体内の物質の移動で起こる拡散現象の数理解析モデルとして現れ、近年注目度を増している [1]. 異常拡散方程式の数値解析手法は、非整数階微分の扱いを中心にさまざまな手法が提案されている [2].

基本解近似解法は偏微分方程式の数値解法のひとつで、楕円型方程式である Laplace 方程式および Helmholtz 方程式において高精度な数値解を与える手法として知られている [3]. 最近では拡散方程式のような時間発展を記述する方程式に対する研究も行われつつあるが、基本解による近似を用いるのは空間座標に関する部分のみであり、時間座標については差分法を用いたものが主である. このような状況を受け、筆者は異常拡散方程式に対し時間依存基本解を直接的に重ね合わせる形で基本解近似解法を適用し、その性質を数値実験により調べた [4]. その結果、時間刻みが荒い場合には大きな問題はないものの、細かくした際に強い不安定性を生じることがわかった. この現象は理論的に説明が可能な現象であるため、解決のためには時間離散化について何らかの工夫が必要となる.

そこで筆者は安定化を図るため、時間については直接的離散化を行わず、畳み込み積分を Lubich によって考案された Covolution Quadrature Method (以下, CQM)[5] により処理する手法を検討した.

本講演では手法のアイデアと、時間離散化の際に必要な常微分方程式の数値解法として、後退差分公式 (Backward Differentiation Formula, 以下 BDF) および陰的 Runge-Kutta 法を適用した場合に対する結果について示す.

2 基本解近似法に対する CQM の適用

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界かつ単連結な領域とする. 本講演では Ω における異常拡散方程式において、初期値をゼロとした初期値-境界値問題

$$\partial_t^\alpha u(t, \mathbf{x}) = \Delta u(t, \mathbf{x}), \quad (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega, \quad (1)$$

$$u(0, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}), \quad (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \partial\Omega, \quad (3)$$

を考え、その解 $u(t, \mathbf{x})$ を基本解近似解法により求める手法について考察する. ここで $T > 0$ は定数であり、 $f \in C([0, T] \times \partial\Omega) \cap C^\infty((0, T) \times \partial\Omega)$, $f(0, \mathbf{x}) = 0$ を満たすものとする. 時間に関する微分階数 α は $0 < \alpha \leq 1$ を満たす定数であり、 $\alpha = 1$ の場合は通常の拡散を、 $0 < \alpha < 1$ の場合は異常拡散を表す. なお、非整数階微分 ∂_t^α は Caputo の意味で考える.

本講演で用いる基本解近似解法では初期値-境界値問題 (1)-(3) の近似解の構成において、空間については通常の形で離散化し、時間については畳み込み積分の形、すなわち解 $u(t, \mathbf{x})$ を

$$U(t, \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \int_0^t q_m(\tau) G(t, \mathbf{x}; \tau, \mathbf{y}_m) d\tau, \quad (4)$$

で定義される関数 $U(t, \mathbf{x})$ で近似する．ここで， M は正の整数であり， $G(t, \mathbf{x}; \tau, \mathbf{y})$ は方程式 (1) の基本解

$$G(t, \mathbf{x}; \tau, \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} H_{1,2}^{2,0} \left[\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4(t - \tau)^\alpha} \right]_{(1,1),(1,1)}^{(\alpha,\alpha)}, & t > \tau, \\ 0, & t \leq \tau, \end{cases} \quad (5)$$

$\mathbf{y}_m \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$, $m = 1, 2, \dots, M$ は重ね合わせる基本解の空間上の特異点の位置， $q_m(\cdot)$ は点 \mathbf{y}_m に特異点をおいた基本解の重みの時間変化， $H_{c,d}^{a,b}$ は Fox の H 関数を表す．式 (4) に現れる畳み込み積分を Laplace 変換を用いて変形すると

$$U(t, \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi} K_0(\sqrt{s^\alpha} |\mathbf{x} - \mathbf{y}_m|) \int_0^t e^{s(t-\tau)} q_m(\tau) d\tau ds, \quad (6)$$

となる．ここで $\Gamma = \{z | \operatorname{Re} z = c\} \subset \mathbb{C}$ (c は適当な正の実数) は逆 Laplace 変換に用いる積分路であり， $K_0(\cdot)$ は 0 次第 2 種変形 Bessel 関数である．

式 (6) の $q_m(\tau)$ に関する積分は，常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dt}(t) = sy(t) + q_m(t), \quad y(0) = 0, \quad (7)$$

の解であることから，Lubich の CQM のアイデアを用いて離散化することができる [5]．本講演では，CQM における離散化として，BDF および陰的 Runge-Kutta 法のひとつである 2 段 3 次の Randau IIA 法を用いた場合について，数値実験を行った結果とその分析について示す [6]．

参考文献

- [1] Kubica, A., Ryszewska, K., Yamamoto, M., *Time-Fractional Differential Equations*, Springer, 2020.
- [2] Jin, B., Zhou, Z., *Numerical Treatment and Analysis of Time-Fractional Evolution Equations*, (Applied Mathematical Sciences 214), Springer, 2023.
- [3] Katsurada, M. and Okamoto, H., A mathematical study of the charge simulation method . I, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, Vol. 35 (1988) , 507–518.
- [4] 大江貴司, 拡散および異常拡散方程式に対する基本解解法における CQM の適用, 計算工学講演会論文集, Vol. 28 (2023), C-05-02.
- [5] Lubich, C., Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. I, *Numer. Math.*, Vol. 52 (1988), pp.129–145, 1988.
- [6] 大江貴司, 陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM の拡散方程式に対する基本解解法への適用, 計算工学講演会論文集, Vol. 29 (2024) , F-01-01.

波動伝搬に対する self-consistent method を用いた数値均質化の基礎的検討

丸山 泰蔵¹, 生子 花¹

¹ 東京工業大学 土木・環境工学系

e-mail : maruyama.t.ag@m.titech.ac.jp

1 はじめに

土木構造物に対する超音波非破壊検査を考える場合、広く使用されているコンクリート材料の考慮が必要である。コンクリートは非均質材料であるため、その内部を伝搬する弾性波の挙動は均質材料と比較して複雑である。本研究では、波動伝搬のための巨視的な材料定数推定を目的とし、Self-Consistent Method [1] (SCM) による材料定数推定を行う。SCM の一つである Effective Field Method では分散を除外して平均的な材料定数のみを求める定式化であるため、材料定数評価の定式化を修正する。また、SCM で必要となる介在物による波動散乱解析には境界要素法を用いる。本来は 3 次元弾性波動場を考える必要があるが、基礎的検討として 2 次元面外波動問題を扱う。

2 解析手法

時間因子を $e^{-i\omega t}$ とする時間調和な面外波動場を考える。ここで、 i は虚数単位、 ω は角周波数、 t は時刻である。図 1 に示すように、2 次元無限領域中に無限個の介在物 $D^{II} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \subset \mathbb{R}^2$ が存在し、平面波が散乱する問題を考える。介在物の外部領域を $D^I = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}$ とし、外部領域は局所領域 D_L 、その他の領域 D_{∞} で $D^I = D_L \cup \overline{D_{\infty}}$ と表される。ここで、 \bullet は閉包を表す。また、 n 番目の介在物 D_n と外部領域の境界を S_n 、 D_L と D_{∞} の境界を S_L とする。

領域 D^I , D^{II} とともに等方性弾性体だと仮定すると、面外変位 u に対する支配方程式は次である。

$$\mu^{I(II)} \nabla^2 u(\mathbf{x}) + \rho^{I(II)} \omega^2 u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{for } \mathbf{x} \in D^{I(II)} \quad (1)$$

ここで、 ρ は密度、 μ は横弾性係数、上付き I と II はそれぞれ D^I , D^{II} に対応することを表す。境界 S_n では変位と表面力の連続条件を仮定すると、局所領域 D_L 中の解の積分表現は次式で表される。

$$u(\mathbf{x}) = u^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{n=N_L+1}^{\infty} \int_{S_n} \{U^I(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(\mathbf{y}) - Q^I(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y})\} dS(\mathbf{y})}_{u^*(\mathbf{x})} + \sum_{n=1}^{N_L} \int_{S_n} \{U^I(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(\mathbf{y}) - Q^I(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y})\} dS(\mathbf{y}) \quad \text{for } \mathbf{x} \in D_L \quad (2)$$

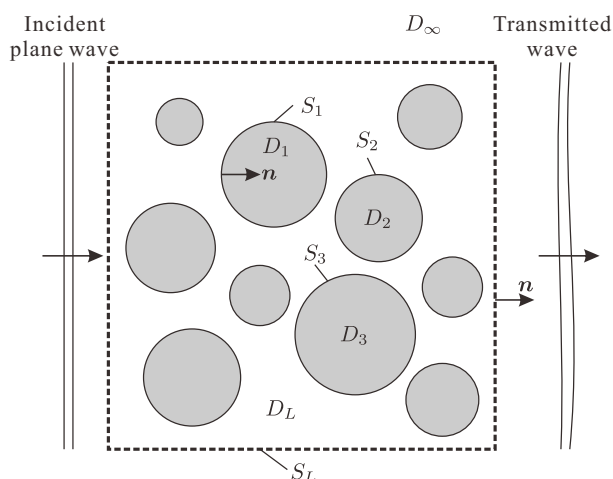


図 1. 多数の介在物による平面波の散乱

ここで、 $q(:=\mu \mathbf{n} \cdot \nabla u)$ は表面力、 \mathbf{n} は法線ベクトル、 U と Q は変位と表面力の基本解、 N_L は D_L に存在する介在物の数である。また、 u^{in} は本来の入射波であり、 u^* は局所領域 D_L における入射波項である。SCM では、 u^* を巨視的な材料定数で表される領域を伝搬する波とみなし、全波動場 u が u^* に平均的に一致する意味で自己整合性を考慮する。

均質化では次の異方性弾性体の支配方程式を考慮する。

$$C_{55}^* u_{,11}^*(\mathbf{x}) + 2C_{45}^* u_{,12}^*(\mathbf{x}) + C_{44}^* u_{,22}^*(\mathbf{x}) + \rho^* \omega^2 u^*(\mathbf{x}) = 0 \quad (3)$$

ここで、 $\bullet_{,i}$ は空間微分、 C_{ij} は Voigt 形式の弾性定数、上付き $*$ は巨視的な材料定数に対応することを表す。平均的に u と u^* とが一致していることの評価には、式 (1) に u^* 、式 (3) に u を掛けて領域 $D_L \cup (\bigcup_{n=1}^{N_L} D_n)$ にわたって積分した式の差を用いる。Gauss の発散定理を用いて整理すると、その式の差は次のように表される。

$$\int_{S_L} \{q^*(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) - q(\mathbf{x})u^*(\mathbf{x})\} dS(\mathbf{x}) = 4\mathcal{E}(\epsilon(\mathbf{x}), \epsilon^*(\mathbf{x}), C_{ij}^*) - \omega^2 \mathcal{U}(u^*(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), \rho^*) \quad (4)$$

ここで、関数 \mathcal{E} 、 \mathcal{U} の詳細は紙面の都合上省略する。一方、 ϵ はひずみ、 q^* は次式の表面力である。

$$q^*(\mathbf{x}) = n_1(\mathbf{x}) \{C_{55}^* u_{,1}^*(\mathbf{x}) + C_{45}^* u_{,2}^*(\mathbf{x})\} + n_2(\mathbf{x}) \{C_{45}^* u_{,1}^*(\mathbf{x}) + C_{44}^* u_{,2}^*(\mathbf{x})\}$$

もし、 u 、 q が式 (3) を満足する場合、相反定理 [2] から式 (4) 左辺はゼロとなる。そのため、式 (4) 左辺がゼロとなることを自己整合性条件として用いる。

数値計算によって巨視的な材料定数 C_{44}^* 、 C_{45}^* 、 C_{55}^* 、 ρ^* を求める手順は以下である。なお、上付き (n) は反復計算の n ステップ目を意味する。

- 1) 初期値 $C_{44}^{*(0)}$ 、 $C_{45}^{*(0)}$ 、 $C_{55}^{*(0)}$ 、 $\rho^{*(0)}$ を設定する。
- 2) $n = 1$ とする。
- 3) 材料定数を $C_{44}^{*(n-1)}$ 、 $C_{45}^{*(n-1)}$ 、 $C_{55}^{*(n-1)}$ 、 $\rho^{*(n-1)}$ と設定した式 (3) から平面波 $u^{*(n)}$ 、 $\epsilon^{*(n)}$ を求める。
- 4) 式 (2) に対応する境界積分方程式を解き、領域 D_L 中の変位 $u^{(n)}$ とひずみ $\epsilon^{(n)}$ を求める。
- 5) 変位とひずみを $u^{(n)}$ 、 $u^{*(n)}$ 、 $\epsilon^{(n)}$ 、 $\epsilon^{*(n)}$ とする $4\mathcal{E} - \omega^2 \mathcal{U} = 0$ によって、 $C_{44}^{*(n)}$ 、 $C_{45}^{*(n)}$ 、 $C_{55}^{*(n)}$ 、 $\rho^{*(n)}$ を求める。
- 6) 材料定数 $C_{44}^{*(n)}$ 、 $C_{45}^{*(n)}$ 、 $C_{55}^{*(n)}$ 、 $\rho^{*(n)}$ を前ステップの値と比較して収束判定を行う。収束した場合、反復計算を終了する。収束していない場合、 $n = n + 1$ としてステップ 3 に戻る。

上記の反復計算で求めた C_{44}^* 、 C_{45}^* 、 C_{55}^* 、 ρ^* から、音速と減衰を算定する。

3 おわりに

本稿では、SCM を用いた波動問題に対する均質化手法の概要を説明した。数値解析結果とその議論については当日報告する。

参考文献

- [1] Kanaun, S.K. and Levi, V.M.: Self-Consistent Methods for Composites Vol.2: Wave Propagation in Heterogeneous Materials, Springer, 2008.
- [2] Achenbach, J.D.: Reciprocity in Elastodynamics, Cambridge University Press, 2004.

非整数階の移流拡散方程式の非適切逆問題に対する物理的背景

町田 学

近畿大学工学部情報学科

e-mail : machida@hiro.kindai.ac.jp

1 概要

非整数階の偏微分方程式に対する逆問題について数学研究が進んでおり、整数階のものとの相違などが解明されている。しかし、非整数階の偏微分方程式が支配する自然現象についてはまだ不明瞭なところが多々ある。本講演では、行き止まり孔のある多孔質媒体を流れる水の中の分子の拡散に非整数階の微分が現れることを説明する。非整数階の移流拡散方程式に着目し、その逆問題に対する物理的動機を与えるのが、本講演の目的である。

2 輻射輸送方程式

次のような輻射輸送方程式を考える。 $\sigma_{\text{trap}} = 0$ の場合、この方程式は、10 cm 程度の円柱型の容器に砂を詰めて、トレーサーとなる分子を水に混ぜて流すカラム実験の際の、分子の輸送の支配方程式であることがわかっている [1, 2]。

$$P_0\psi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t) + (\sigma_a + \sigma_s + \sigma_{\text{trap}})\psi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t) = \sigma_s \int_{\mathbb{S}^2} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')\psi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}', t) d\hat{\mathbf{s}}' + \sigma_{\text{trap}} \int_0^t w(t-t')\psi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t') dt' + q(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t) \quad (1)$$

ただし、

$$P_0\psi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 + \mathbf{c}) \cdot \nabla \right) \psi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t), \quad (2)$$

$$\psi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, 0) = a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \quad (3)$$

ここで、両辺にある σ_{trap} は、粒子が行き止まり孔に捕捉される度合いを示す。捕捉された粒子は、時間 $\tau > 0$ が経過した後、確率密度 $w(\tau)$ で押し出され再び多孔質媒体中を流れ出す。

一方、数値シミュレーションにより、行き止まり孔がある場合には、待ち時間関数 $w(t)$ は

$$w(t) \sim t^{-(1+\alpha)} \quad (4)$$

のようなべき的な減衰を示すことが知られている [3, 4]。

3 大きなスケールでの話

地下水に混じって流れる汚染物質の輸送はカラム実験よりもずっと大きなスケールでの輸送である。今回、このような大きなスケールで、上の輻射輸送方程式の解は次の方程式の解と漸近的に一致することがわかった。

$$\partial_t u(\mathbf{r}, t) + \eta \partial_t^\alpha u(\mathbf{r}, t) - D_0 \Delta u(\mathbf{r}, t) + \mathbf{c} \cdot \nabla u(\mathbf{r}, t) + \sigma_a u(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

ただし、

$$\eta = \eta(\alpha) = \sigma_{\text{trap}} \tau^\alpha \quad (6)$$

2つの方程式の解が一致するとは、 $\int_{\mathbb{S}^2} \psi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t) d\hat{\mathbf{s}}$ と $u(\mathbf{r}, t)$ が漸近的に等しくなるという意味である。

4 まとめ

非整数階の時間微分を持つ偏微分方程式は近年盛んに研究されてきたが、そのような方程式に支配される自然現象はほぼ皆無であり、少数の例も $1/2$ 階の微分に限定されていた。今回は、土壤汚染に関する汚染物質の輸送の支配方程式となる、非整数階の微分方程式を明らかにした。

カラム実験については、連続時間ランダムウォークにより実験結果を概ね再現できることが知られている [5]。しかし、実験結果の長時間の振る舞いがどの程度連続時間ランダムウォークで再現できるかについては調べられていない。連続時間ランダムウォークの長時間の振る舞いは漸近的に、時間非整数階の拡散方程式の解になるが、今回の研究により、カラム実験の長時間の振る舞いは $1 + \alpha$ 階の拡散方程式に支配されることが分かった。

参考文献

- [1] K. Amagai, M. Yamakawa, M. Machida, and Y. Hatano, The linear Boltzmann equation in column experiments of porous media, *Transport in Porous Media*, 132 (2020), 311–331.
- [2] K. Amagai, Y. Hatano, and M. Machida, Linear transport in porous media, *Journal of Computational and Theoretical Transport*, 50 (2021), 377–389.
- [3] A. D. Bordoloi, D. Scheidweiler, M. Dentz, M. Bouabdellaoui, M. Abbarchi, and P. de Anna, Structure induced laminar vortices control anomalous dispersion in porous media, *Nature Communications*, 13 (2022), 3820.
- [4] Y. Hou, J. Jiang, and J. Wu, The form of waiting time distributions of continuous time random walk in dead-end pores, *Geofluids*, 2018 (2018), 8329406.
- [5] Y. Hatano and N. Hatano, Dispersive transport of ions in column experiments: An explanation of long-tailed profiles, *Water Resources Research*, 34 (1998), 1027–1033.

強結合の非整数階拡散系の時間逆引き問題について

劉 逸侃¹

¹ 京都大学大学院理学研究科

e-mail : liu.yikan.8z@kyoto-u.ac.jp

1 概要

近年、特異拡散などの現象を記述する時間非整数階拡散方程式の理論基盤が整備され、関連する逆問題と数値解析も盛んに発展してきた。一方、その結合系に対する研究はまだ少なく、特に強結合の場合は順問題と逆問題ともに調べられていない。

本講演は [1] に基づき、以下の 2 種類の非整数階拡散系の初期値・境界値問題を取り扱う：

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha (u_k - u_0^{(k)}) - \operatorname{div}(\mathbf{A}_k(\mathbf{x}) \nabla u_k) + \sum_{\ell=1}^K c_{k\ell}(\mathbf{x}) u_\ell = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u_k = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad k = 1, \dots, K, \quad (1)$$

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) - \operatorname{div}(\mathbf{A}(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{on } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (2)$$

ただし、 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域、 $\alpha \in (0, 1)$, $T > 0$, $K \in \mathbb{N}$ は定数であり、 $\partial_t^\alpha : H_\alpha(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$ は [2] で定義された α 階時間微分を表す。(1) において、各 $\mathbf{A}_k \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^{d \times d})$ を $\bar{\Omega}$ 上で対称かつ一様正定値、 $(c_{k\ell}) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{K \times K})$ を Ω で対称非負定値とし、 $u_0^{(k)}$ は第 k 成分 u_k の初期値を表す。(2) において、 $\mathbf{A} \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d})$ を $\bar{\Omega}$ 上で安定性条件を満たす完全対称な 4 階テンソル、 $\mathbf{C} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d \times d})$ を Ω で対称非負定値とし、 $\mathbf{u}_0 = (u_0^1, \dots, u_0^d)^T$ は $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)^T$ の初期値を表す。よって、(1) は弱結合系、(2) は強結合系であるが、後者では $K = d$ と制限する。また、弱結合系に関する先行研究 [3] と異なり、(1)–(2) はともにすべての成分が同じ α を共有すると仮定する。

発展方程式に対する代表的な逆問題の一つとして、本講演は以下の問題を考察する。

問題 1 (時間逆引き問題). \mathbf{u} は (1) あるいは (2) を満たすとき、 \mathbf{u} の最終時刻 $t = T$ における観測データを用いて初期値 \mathbf{u}_0 を決定せよ。

時間逆引き問題の不適切性は方程式によって千差万別で、例えば熱方程式 ($\alpha = 1$) の場合は極めて強く、波動方程式 ($\alpha = 2$) の場合は殆どないことが知られている。 $\alpha \in (0, 1)$ のとき、方程式の平滑化効果は $\alpha = 1$ のときより遥かに弱いので、その時間逆引き問題の不適切性も $\alpha = 1$ より大幅に軽減される。単独方程式の場合は [4, 5] など多くの先行研究があるが、本講演は今まで得られた結果を結合系まで一般化し、さらにニューラルネットワークを用いた数値解法を紹介する。

2 順問題の適切性と逆問題の安定性

定式化 (1)–(2) をまとめて

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \mathcal{A} \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{on } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (3)$$

のように記述すると, \mathcal{A} は自己共役かつ正定値の 2 階楕円型作用素であることが分かる. 一般論により, \mathcal{A} は固有系 $\{(\lambda_n, \varphi_n(x))\}$ をもつので, 単独方程式と同様に問題 (3) の適切性は示せる.

補題 2. $\mathbf{u}_0 \in (L^2(\Omega))^K$ とすると, (3) にただ一つの解 $\mathbf{u} \in L^1(0, T; (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^K)$ が存在し,

$$\mathbf{u}(\cdot, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha)(\mathbf{u}_0, \varphi_n) \varphi_n, \quad \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)} t^{-\alpha}$$

が成り立つ. ただし, $E_{\alpha,1}$ と (\cdot, \cdot) はそれぞれ Mittag-Leffler 関数と $(L^2(\Omega))^K$ の内積を表し, $C > 0$ は $\alpha, \Omega, \mathcal{A}$ に依存する定数である.

上記の厳密解を用いると, 問題 1 の解の一意性および Lipschitz 安定性は直ちに従う.

定理 3. 任意の $T > 0$ と $\mathbf{u}_T \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^K$ に対し, ただ一つの $\mathbf{u}_0 \in (L^2(\Omega))^K$ が存在し, \mathbf{u}_0 を初期値にもつ (3) の解 \mathbf{u} は $\mathbf{u}(\cdot, T) = \mathbf{u}_T$ を満たす. さらに $\alpha, \Omega, \mathcal{A}, T$ に依存する定数 $C_T > 0$ が存在し, $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq C_T \|\mathbf{u}_T\|_{H^2(\Omega)}$ が成り立つ.

3 ニューラルネットワークによる数値再構成

2 成分以上の場合, 一般には \mathcal{A} の固有系 $\{(\lambda_n, \varphi_n)\}$ の具体形は書けないので, 厳密解に基づく再構成法は使えない. そのため, 問題 1 を入力-出力関係 $\mathbf{u}_T = \mathcal{K}\mathbf{u}_0$ とみなし, Tikhonov 正則化を用いて初期値を $\mathbf{u}_0 \approx (\mathcal{K}^* \mathcal{K} + \varepsilon I)^{-1} \mathcal{K}^* \mathbf{u}_T$ として捉え, 写像 $(\mathcal{K}^* \mathcal{K} + \varepsilon I)^{-1} \mathcal{K}^*$ をマルチチャネルのニューラルネットワークで近似する. 計算例として

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha(u - u_0) - \Delta u + u - v = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t^\alpha(v - v_0) - \Delta v - u + v = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

を対象に, 空間次元 $d = 1, 2$ の場合に対して数値計算を行い, ニューラルネットワークの有効性を検証した.

謝辞 本研究は, 科学研究費補助金 (課題番号 22K13954, 23KK0049) の助成を受けている.

参考文献

- [1] D. Feng, Y. Liu and S. Lu, Forward and backward problems for strongly coupled subdiffusion systems, submitted, arXiv: 2407.00588.
- [2] A. Kubica, K. Ryszewska and M. Yamamoto, Time-Fractional Differential Equations: A Theoretical Introduction, Springer-Verlag, Tokyo, 2020.
- [3] Z. Li, X. Huang and Y. Liu, Initial-boundary value problems for coupled systems of time-fractional diffusion equations, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **26**, 2023, 533–566.
- [4] J. Liu and M. Yamamoto, A backward problem for the time-fractional diffusion equation, *Appl. Anal.*, **89**, 2010, 1769–1788.
- [5] K. Sakamoto and M. Yamamoto, Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **382**, 2011, 426–447.