

# ビリヤード写像における不変曲線が存在しないための十分条件

立石 萌<sup>1</sup>, 柴山 允瑠<sup>2</sup>,

<sup>1,2</sup> 京都大学大学院情報学研究科

e-mail: <sup>1</sup>tateishi@amp.i.kyoto-u.ac.jp, <sup>2</sup>shibayama@amp.i.kyoto-u.ac.jp

## 1 概要

ビリヤード系では、二次元領域内を直進し境界で入射角と反射角が等しくなるよう向きを変えるような質点（ボール）の運動を取り扱う。境界上のボールの衝突点とその向きを、その次の衝突点と向きに写すような写像を考えると、これは面積保存写像となる。本発表では、Aubry-Mather 理論の結果をビリヤード系に適用し、ビリヤード系の不変曲線が存在しないための十分条件を与える。

## 2 ビリヤード系

二次元領域  $D \subset \mathbb{R}^2$  とその中を動く質点を考える。質点は領域  $D$  内では摩擦力がゼロのまま一定の速度で直進し、境界では弾性衝突するとする。このとき、質点は入射角と反射角が等しくなるように進行方向を変えて、また直進を始める。このようなルールで動く質点の軌道について考えることにする。

ビリヤードの軌道を考える際は、境界における衝突位置と衝突直後の進行方向がわかれば十分である。曲線  $\gamma = \partial D$  の弧長パラメータを  $s$  とし、衝突点における  $\gamma$  の接線と衝突直後の進行方向のなす角を  $\alpha$ ,  $w = -\cos \alpha$  とする。衝突前のパラメータを衝突後のパラメータに写す写像  $T: (s, w) \mapsto (s', w')$  をビリヤード写像といい、ビリヤード写像によって定まる力学系をビリヤード系という。特に  $\gamma$  が周長  $L$  の閉曲線の場合、 $T$  は  $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times [-1, 1]$  上の写像になる。（ $w = 1$  および  $w = -1$  については、 $T$  が  $w$  について連続になるように拡張する。）領域  $D$  が狭義凸で境界  $\gamma$  が十分滑らかであれば、 $T$  は面積形式  $dw \wedge ds$  を保ち、さらにツイスト条件  $\frac{ds'}{dw} > 0$  を満たす。

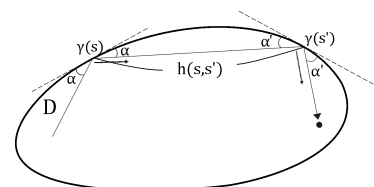


図 1. ビリヤード系

## 3 不変曲線

面積保存ツイスト写像  $\phi: \mathbb{S} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{S} \times [-1, 1]$  に対して、曲線  $C$  が  $\mathbb{S} \times \{0\}$  とホモトピックであって  $\phi(C) = C$  となるとき、 $C$  を  $\phi$  の不変曲線と呼ぶ。すなわち、不変曲線とは  $\phi$  で不変な集合であってアニュラス  $\mathbb{S} \times [-1, 1]$  を左から右へちょうど一周するような曲線である。

ビリヤード写像の不変曲線について、次の Birkhoff の予想が知られている。

**予想 1.**  $D$  が凸で、 $\gamma = \partial D$  が滑らかであるとする。相空間の境界の近傍が不変曲線による葉層構造を持つとき、 $D$  は楕円である。

Birkhoff の予想に関する重要な結果は以下のようなものがある。

- Lazutkin (1973) [1]  $\gamma = \partial D$  が十分なめらかでかつ曲率が 0 にならない場合、不変曲線は存在する。
- Mather (1982) [2]  $\gamma = \partial D$  上に曲率が 0 になる点が存在すれば、不変曲線は存在しない。
- Hubacher (1987) [4]  $\gamma = \partial D$  上に曲率が不連続になる点が存在すれば、相空間の境界の近

傍に不変曲線は存在しない.

- Bialy (1993) [3] 相空間全体が不変曲線による葉層構造を持つとき,  $D$  は円である.

## 4 主結果

まず, ビリヤード系を考える領域を設定する.

関数  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を次の条件を満たす  $C^2$  級関数と仮定する.

$$f(x) > 0, \quad f(x+c) = f(x), \quad L = \int_0^c \sqrt{1 + f'(\tilde{x})^2} d\tilde{x}.$$

ビリヤードを考える領域  $D$  を  $D = \{(x, y) | -f(x) \leq y \leq f(x)\}$  と定め, 図 2 のようにボールが上側の境界と下側の境界を交互に反射するようなケースを考える.

$(s, w)$  を弧長パラメータ  $s = \int_0^x \sqrt{1 + f'(\tilde{x})^2} d\tilde{x}$  と  $w = \cos \alpha$  の組としておく ( $\alpha \in (0, \pi)$  は反射角).  $x(\hat{s}) = x(s) + c$  となる  $s$  と  $\hat{s}$  を同一視することで,  $s$  を  $\mathbb{R}/L\mathbb{Z}$  の元と見なす. このとき,  $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times (-1, 1)$  上のビリヤード写像  $T : (s, w) \mapsto (s', w')$  は, 面積形式  $ds \wedge dw$  を保ち, さらにツイスト条件  $\frac{\partial s'}{\partial w} > 0$  を満たす.

**定理 2.** 次の不等式を満たす  $x_2 \in [0, c)$  が存在するとき, ビリヤード写像は相空間  $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times (-1, 1)$  上に不変曲線を持たない.

$$f''(x_2)f(x_2) + f'(x_2)^2 + 1 \leq 0$$

**注意 3.** 上の不等式は

$$\frac{d^2}{dx^2} f^2(x_2) \leq -2$$

と書き換えることもできる.

## 参考文献

- [1] V. F. Lazutkin. Existence of caustics for the billiard problem in a convex domain. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 37 (1973), 186 – 216.
- [2] J. N. Mather. Glancing billiards. Ergodic Theory Dynam. Systems, 2 (1982), 397 – 403.
- [3] M. Bialy. Convex billiards and a theorem by E. Hopf. Math. Z., 214 (1993), 147 – 154.
- [4] A. Hubacher. Instability of the boundary in the billiard ball problem. Comm. Math. Phys., 108 (1987), 483 – 488.
- [5] S. Tabachnikov. Geometry and billiards. American Mathematical Society, Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2005.
- [6] 柴山允瑠. ハミルトン力学系可積分系と KAM 理論を中心に. サイエンス社, 2016.
- [7] V. Bangert. Mather sets for twist maps and geodesics on tori. Dynamics reported, 1 (1988), 1 – 56.

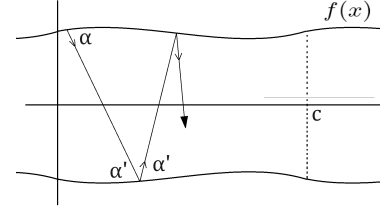


図 2. 考えるビリヤード系

## 結合エノン写像における一様双曲領域について

藤岡 佳佑<sup>1</sup>, Li Jizhou<sup>2</sup>, 首藤 啓<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 都立大理, <sup>2</sup> 理研 i THEMS

e-mail : fujioka-keisuke@ed.tmu.ac.jp

スメールの馬蹄型力学はカオス発生の基本的な機構である [1]. 馬蹄型機構をもつ力学系では, 適当な領域が引き延ばしと折り畳みを受け, 馬蹄状領域が生成されることにより軌道の初期条件の記憶は指数関数的に失われる. 2次元平面上で定義される写像, 例えば, エノン写像:  $(x, y) \mapsto (a - x^2 - y, x)$  (ここでは面積保存の場合を考える) は馬蹄型力学を実現するミニマルなモデルであり [2], その生成と崩壊に関する詳細な研究が数多くある.  $a$  が十分大きいとき, 理想的な馬蹄型力学が実現され, 系は一様双曲的にある [3].  $a$  を徐々に小さくすると, あるところで系の一様双曲性が崩れ (first tangency) [4], 系のダイナミクスは複雑になるが, しばらくの間は, パラメータ  $a$  上で一様双曲性が復活する有限の長さをもつ区間が多数現れる [5, 6]. そのような区間上では, 十分大きな  $a$  のときに見られる完全な馬蹄型力学ではなく, 有限型マルコフシフトではありつつも, 自明ではないダイナミクスが実現される [6].

ここでは, 2次元エノン写像を高次元に拡張した以下の結合エノン写像を用いて, 引き延ばしと折り畳みの方向が複数存在する状況下での馬蹄型力学と一様双曲性の問題を考える.

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_0 - x^2 - z + c(x - y) \\ a_1 - y^2 - w - c(x - y) \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

ここで,  $a_0, a_1, c$  はパラメータであり, この系は, Moser による 2 次多項式シンプレクティック写像の標準型 [7] から, 適当なアフィン変換を施すことによって得られる. この系は 2 つの極限, すなわち, 1)  $a_0 = a_1 =: a \rightarrow \infty$  ( $c$  を固定), および 2)  $a, c \rightarrow \infty$  ( $c/\sqrt{a}$  を固定) に対して, 反可積分極限 (anti-integrable limit) をもつ. 反可積分極限近傍では, 前者については, 4 進記号力学系が, また後者については, 2 進記号力学系が得られることから, それぞれの極限の近傍では位相的馬蹄および一様双曲性が成立することが予想される.

ここではまず, Devaney-Nitecki の方法 [3] を高次元に拡張することにより, 位相馬蹄および一様双曲性成立の十分条件を導出する [8]. Devaney-Nitecki のアプローチは cone field 条件を介して一様双曲性を導くものであるため, 得られた結果は, 上記, 反可積分極限近傍のみならず,  $a_0 \neq a_1$  の場合を含む, より一般的なパラメータ領域での一様双曲性に関するものである.

次に, 2次元エノン写像で見出されたものと同様の非自明な一様双曲領域の出現の可能性を, Arai により提案された computer-assisted proof の方法 [5] を適用することにより探る. Arai の方法は, 系の鎖回帰型集合上においては, 擬双曲性と呼ばれる, 一様双曲性よりも弱い条件が一様双曲性と等価になる事実に基づいて一様双曲性の判定を行うものである. ここでは, 鎖回帰集合と擬双曲性を効率的かつ精度保証付きで計算するために GAIO[9] を用いる. 結合エノン写像は,  $\mathbb{R}^4$  上で定義され探索範囲が大きいので, 鎖回帰集合上の擬双曲性の判定に多くの計算時間を要する. そのため, 2次元エノン写像に関する計算 [5] と比較し探索可能なパラメータ空間は限られるが, 図 1 に見るように, Devaney-Nitecki の方法を通して見出された 2 つの単純な馬蹄型力学とは異なるトポロジーをもつ, 非自明な一様双曲領域の候補を見出すことができた.

一方, Arai の方法も一様双曲性の十分条件を計算機支援で与える方法であることから, ここで得られた一様双曲領域が, 2 つの単純な馬蹄型領域にある一様双曲領域から「真に」隔てられた, 非自明な一様双曲領域であることは明らかではない. ここではさらに, 周期軌道 (具体的には不動点および 2 周期軌道) の分岐条件を調べることで (図 1(b) 参照), 後者の一様双曲領域が 2 進および 4 進のいずれの記号力学系とも共役ではない, 一様双曲領域であることを明らかにする. 一様双曲領域の数値的判定に時間を要するため, 十分広いパラメータ領域の探索は困難であるものの, 非自明な一様双曲領域は  $c$  方向に厚みをもっていることが示唆される (図 1(c) 参照). このことから, 2 次元エノン写像で見出されたものと類似の現象, すなわち, パラメータ変化に対する間欠的な一様双曲領域の復活が高次元でも起きていることが予想される.

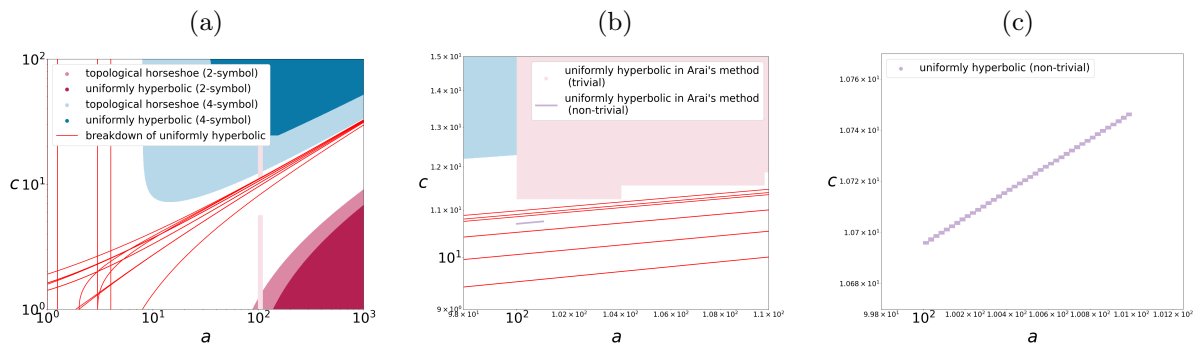


図 1: 結合エノン写像の一様双曲領域.  $a = a_0 = a_1$ . (a) は全体図. (b) は非自明な一様双曲領域近傍の拡大図. (c) は非自明な一様双曲領域の拡大図.

## 参考文献

- [1] Wiggins S 2013 *Global bifurcations and chaos: analytical methods* (Springer Science & Business Media).
- [2] Friedland S and Milnor J 1989 Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, *Ergod. Theory Dyn. Syst.* **9** 67-99 .
- [3] Devaney R and Nitecki Z 1979 Shift automorphisms in the Hénon mapping *Communications in Mathematical Physics* **67** 137-146.
- [4] Bedford E and Smillie J 2004 Real polynomial diffeomorphisms with maximal entropy: Tangencies *Annals of mathematics* **160** 1-26.
- [5] Arai Z 2007 On hyperbolic plateaus of the Hénon map *Experimental Math* **16** 181-188.
- [6] Davis M J, MacKay R S and Sannami A 1991 Markov shifts in the Hénon family *Physica D* **52** 171-178.
- [7] Moser J 1994 On quadratic symplectic mappings *Mathematische Zeitschrift* **216** 417-4.
- [8] Fujioka K, Kogawa R, Li J and Shudo A 2022 Topological horseshoe and uniform hyperbolicity of the coupled Hénon map *arXiv: 2303.05769*.
- [9] Dellnitz O and Junge O The web page of GAIO project "<https://github.com/gaioGuy/GAIO>".

# 折り紙写像における不変曲線の存在について

市川 龍太郎<sup>1</sup>, 柴山 允瑠<sup>1</sup><sup>1</sup> 京都大学大学院情報学研究科

e-mail : ryuichikawa@amp.i.kyoto-u.ac.jp

## 1 概要

折り紙テッセレーションは、折り紙の展開図における折り目が周期的な構造をもつものを指し、しばしば非自明な挙動を示すことから折り紙工学といった分野で研究が行われている。特に、折り面が三角形で、かつ周期的に構成されるような場合には、折り紙は円柱形を作ることが知られている。風船基本形をモジュールとした「なまこ折り」と呼ばれる折り紙テッセレーションはその一つであり、折り紙が波状の円柱曲面を形成することが分かっている [1]。先行研究 [2] では、なまこ折りの形成手順を円柱形を構成する様々な折り紙テッセレーションに一般化し、その手順で円柱形が作られていく様子を離散力学系として定式化を行い、その系が保存系であることを示している。

本研究では、先行研究で定式化された離散力学系について、テッセレーション上のモジュール数を大きくした場合についての写像における不変曲線の存在を KAM 定理を用いて示す。さらに、数値実験によって実際にモジュール数を十分大きくした場合の力学系において、不変曲線が残り続けることを確認する。

## 2 折り紙写像の定義

折り紙におけるモジュール数を  $N$ 、折り紙上の折り目の長さに関する定数を  $l, r_1, r_2$ 、2 つのパラメータを  $(d, \rho) \in (0, l) \times (-\pi, \pi)$  とし、写像の簡単化のため以下の各関数を定義する。

$$A(d; r_1, r_2) = \sqrt{-\frac{4d^2r_2^2 + l^4 - 2l^2(r_1^2 + r_2^2) + (r_1^2 - r_2^2)^2}{r_1 - d}}$$

$$B(d; r_1, r_2) = -2d^2 + l^2 + r_1^2 + r_2^2, \quad C(d; l) = \sqrt{(l-d)(l+d)}, \quad D(d; r_1) = \sqrt{r_1 - d} \quad (1)$$

$$E(d, \rho; l, r_1, r_2, N) = \sqrt{(l^2 - 3d^2) \cos \frac{2\pi}{N} - d^2 - 4dC \sin \frac{2\pi}{N} \sin \rho + 2C^2 \sin^2 \frac{\pi}{N} \cos 2\rho + 3l^2}$$

折り紙写像とは、以下の関数

$$\mathbf{F}(d, \rho; l, N, r_1, r_2, \sigma) = \left[ \text{atan2} \left( \frac{\frac{1}{2C} \sin \frac{\pi}{N} (D \sin \rho \mp DA \cos \rho + 2dC \cot \frac{\pi}{N})}{-\frac{B \cos \rho \mp DA \sin \rho}{2C}}, \frac{\cos \frac{\pi}{N} (DCA \cos \rho - CB \sin \rho)}{2C^2} + 2d \sin \frac{\pi}{N} \right) \right] \quad (2)$$

$$\mathbf{G}(d, \rho; l, N) = \left[ \text{atan2} \left( \frac{C \sin \frac{\pi}{N} \sin \rho + d \cos \frac{\pi}{N}}{-\frac{2C \cos \rho}{E}}, \frac{2d \sin \frac{\pi}{N} - 2C \cos \frac{\pi}{N} \sin \rho}{E} \right) \right] \quad (3)$$

に対し、 $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $k_i \in \{0, 1\}$ ,  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}(d, \rho; r_{i-1,1}, N, r_{i,1}, r_{i,2}, \sigma_i)$ ,  $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}(d, \rho; r_{i,1}, N)$  としたときの  $n$  回の写像の合成

$$\mathbf{M} = (\mathbf{G}_{n-1}^{k_{n-1}} \circ \mathbf{F}_{n-1}) \circ \dots \circ (\mathbf{G}_i^{k_i} \circ \mathbf{F}_i) \circ \dots \circ (\mathbf{G}_0^{k_0} \circ \mathbf{F}_0) \quad (4)$$

で表される写像である。  $\sigma_i$  は各折り目が山折りか谷折りかを表すシンボルであり、この折り紙写像  $\mathbf{M}$  を用いて、以下のように離散力学系を定義する。

$$\mathbf{M} : \begin{bmatrix} d_m \\ \rho_m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} d_{m+1} \\ \rho_{m+1} \end{bmatrix} \quad (5)$$



### 3 KAM 定理

シンプレティック写像  $f(\rho, d; \varepsilon) = (\rho', d')$  とその母関数  $S(\rho, d; \varepsilon) = \langle \rho, d \rangle + S_0(d') + \varepsilon S_1(\rho, d'; \varepsilon)$  に対し,  $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき,  $f(\rho, d; \varepsilon) = (\rho + \frac{\partial S_0}{\partial d'}(d), d)$  となる. ここで, 以下で紹介する KAM 定理を用いて, 本研究では  $\varepsilon^{-1}$  に対応するモジュール数  $N$  を十分大きくした際にも不変曲線が存在することを証明した. 面積保存写像をシンプレティック写像とも呼び, 本研究の折り紙写像は面積保存写像である [2]. 講演では, 折り紙写像において  $N \rightarrow \infty$  とした際の関数形がある  $d$  の関数  $\xi(d)$  を用いて,  $(\rho + \xi(d), d)$  の形になることを紹介する.

#### 定理 1 (KAM 定理)

シンプレティック写像  $f$  に対する非退化条件  $\det(\text{Hess } S_0) \neq 0$  が成立し,  $\omega = \frac{\partial S_0}{\partial d'}(d)$  がディオファントスベクトルであるならば, 十分小さい  $\varepsilon > 0$  に対して,  $f(\rho, d; \varepsilon)$  にも不変トーラスが存在し, その上に制限した写像は  $\rho \in \mathbb{T} \rightarrow \rho + \omega$  と位相共役である.

### 4 数値実験結果

折り紙写像を図 1(a) の展開図に適用した結果を以下に記す. なお, 初期点は等間隔に取っており, 解が有限解の場合は図示しないものとする. 一つの曲線については, 600 個の点を取っている. 数値実験より, モジュール数  $N$  が大きくなっていくにつれ相図の曲線は全体的に  $d_m$  が一定の直線形になり, 不変曲線が多く存在することが確認できる. 講演では他の例でも直線形になることを紹介する.

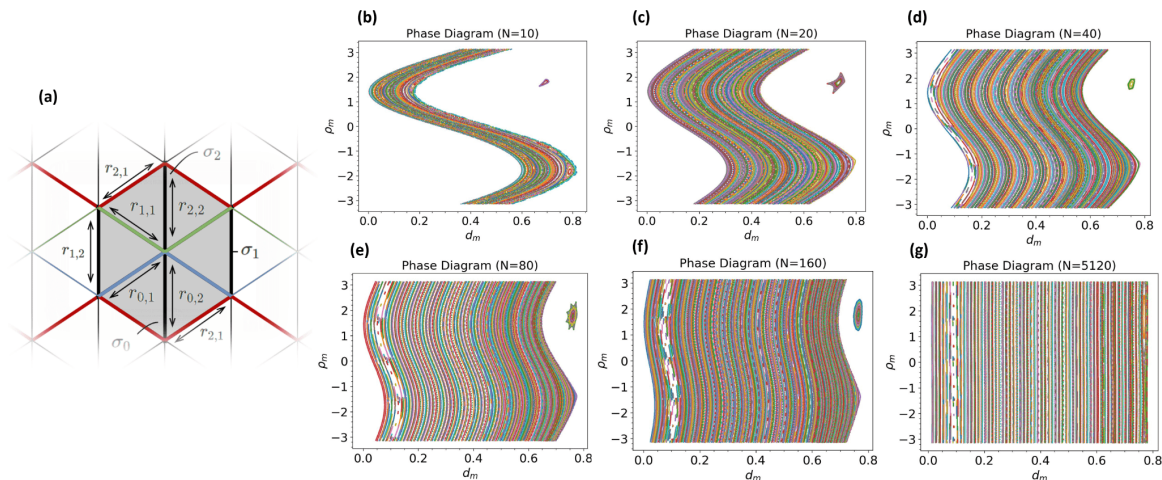


図 1. (a) 折り紙写像を適用する展開図. パラメータは  $(r_{0,1}, r_{0,2}, \sigma_0, r_{1,1}, r_{1,2}, \sigma_1, r_{2,1}, r_{2,2}, \sigma_2) = (0.815, 0.985, M, 1.23, 1.185, M, 1.28, 0.61, V)$  である. (b)-(g) モジュール数を変化させていった際の相図 ( $N = 10, 20, 40, 80, 160, 5120$ ).

### 参考文献

- [1] R. Imada and T. Tachi, Geometry and Kinematics of Cylindrical Waterbomb Tessellation, *Journal of Mechanisms and Robotics*, **14**(2022), 041009
- [2] R. Imada and T. Tachi, Conservative Dynamical Systems in Oscillating Origami Tessellations. In: Cheng, LY. (eds) ICGG 2022 - Proceedings of the 20th International Conference on Geometry and Graphics. ICGG 2022. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, 146(2023). Springer, Cham.

## 変分法と力学系理論による探査機の軌道設計

柴山 允瑠

京都大学大学院情報学研究科

e-mail : shibayama@amp.i.kyoto-u.ac.jp

### 1 制限 3 体問題

2 質点が 2 体問題に従って円運動し、それらから受ける万有引力のもとでの無限小の質量の質点の運動を調べる問題を円周制限 3 体問題という．惑星探査機の軌道設計でよく用いられるモデルの 1 つである [1, 2]．その運動方程式は

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x + U_x, \quad \ddot{y} = -2\dot{x} + y + U_y, \quad \ddot{z} = U_z$$

と表される．ここで,

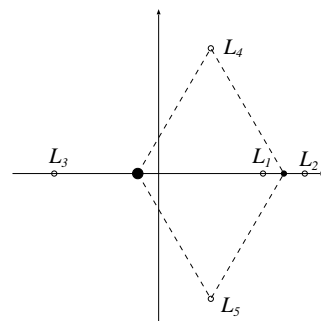
$$U(x, y, z; \mu) = \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2}}$$

である．図の  $L_1, \dots, L_5$  は平衡点でラグランジュ点と呼ばれる．

パラメータ  $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$  は例えば,

- 地球-月:  $\mu = 1.217333774 \times 10^{-2}$
- 太陽-地球:  $\mu = 3.002826693 \times 10^{-6}$
- 太陽-木星:  $\mu = 9.533769536 \times 10^{-4}$

である．



### 2 周期解の数値計算

平面 ( $z = 0$ ) 制限 3 体問題は

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + x\dot{y} - y\dot{x} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U(x, y)$$

をラグランジアンとするラグランジュ系である．作用積分

$$\mathcal{A} = \int_0^T \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + x\dot{y} - y\dot{x} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U(x, y) dt$$

の臨界点が解に対応する．

$x(t)$ ,  $y(t)$  をフーリエ級数による近似は

$$x(t) = \sum_{k=1}^N a_{1k} \cos \frac{2\pi kt}{T} + a_{2k} \sin \frac{2\pi kt}{T}, \quad y(t) = \sum_{k=1}^N b_{1k} \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_{2k} \sin \frac{2\pi kt}{T}.$$

の形で, フーリエ係数を最急降下法 ( $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \delta \text{grad}(\mathcal{A}) (0 < \delta \ll 1)$ ) で  $\mathcal{A}$  が小さくなるようにしていく  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_{11}, \dots, a_{2N}, b_{11}, \dots, b_{2N})$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{4} \left( \frac{2\pi k}{T} \right)^2 (a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + b_{1k}^2 + b_{2k}^2) + \frac{2\pi k(a_{1k}b_{2k} - a_{2k}b_{1k})}{T} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(a_{1k}^2 + a_{2k}^2 + b_{1k}^2 + b_{2k}^2) \right) + \int_0^T U(x, y; \mu) dt, \end{aligned}$$

だから,  $\text{grad } \mathcal{A}$  の成分は

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial a_{1k}} = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi k}{T} \right)^2 a_{1k} + \frac{2\pi k b_{2k}}{T} + a_{1k} + \int_0^T U_x(x, y; \mu) \cos \frac{2\pi k t}{T} dt, \dots$$

となる. この方法により, 多くの周期解を数値計算により求めた. 制限 3 体問題の周期解は膨大に存在するので, コペンハーゲン問題 ( $\mu = 0.5$  の場合の制限 3 体問題) に対する Strömgren-Hénon[3, 4, 5, 6] の分類 (図 1,2) に従って求める.

他にも, 変分構造を用いて求めた準周期解やホモ/ヘテロクリニック軌道, 無限遠点の正則化を用いて求めた深宇宙探査軌道の数値解を紹介する.

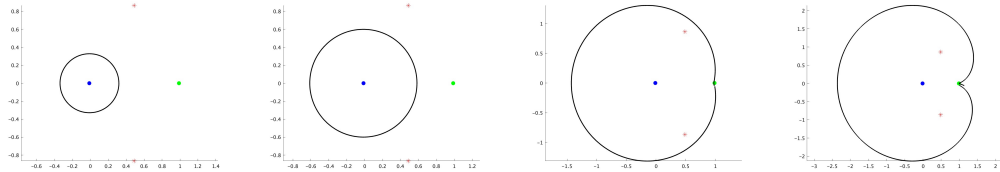


図 1. タイプ i の周期解

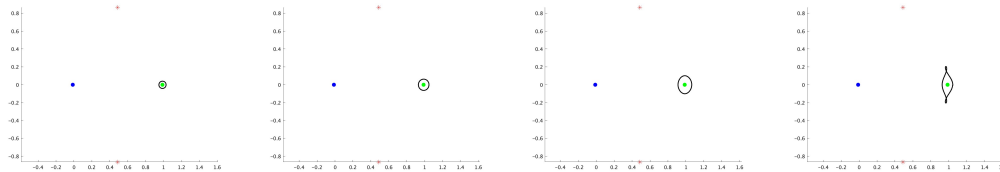


図 2. タイプ f の周期解

謝辞 本研究は, JST さきがけ JPMJPR2124 の支援を受けたものである.

## 参考文献

- [1] G. GÓMEZ, J. LLIBRE, R. MARTÍNEZ, AND C. SIMÓ, *Dynamics and mission design near libration points. Vol. I.*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001.
- [2] W. S. KOON, M. W. LO, J. E. MARSDEN, AND S. D. ROSS, *Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design*, Springer-Verlag New York Inc, 2009.
- [3] M. HÉNON, *Exploration numérique du problème restreint. I. Masses égales ; orbites périodiques*, Annales d'Astrophysique, 28 (1965), p. 499-511
- [4] M. HÉNON, *Exploration numérique du problème restreint. II. Masses égales, stabilité des orbites périodiques*, Annales d'Astrophysique, 28 (1965), p. 992-1007.
- [5] E. STRÖMGREN, *Unsere Kenntnisse über die Bewegungsformen im Dreikörperproblem*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1925, pp. 233-242.
- [6] E. STRÖMGREN, *Periodic Orbits in the Restricted Problem of Three Bodies in Their Relation to Hill's Work on the Motion of the Moon*, Amer. J. Math., 60 (1938), pp. 867-879.