

# 有限体積法をもとに局所保存性を担保した機械学習数値解析手法

堀江 正信<sup>1</sup>, 三目 直登<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 株式会社 RICOS, <sup>2</sup> 筑波大学

e-mail : horie@ricos.co.jp

## 1 概要

物質が流れによって移動する輸送現象の数値解析は、混合機などの工業製品の設計や性能評価において重要な位置を占めている。さらに、空気感染症予防の観点からも、飛沫等の輸送のリアルタイム解析、制御が必要とされている。しかしながら、古典的な数値解析手法では予測の計算に時間がかかることが多く、また並列計算による高速化のためには膨大な計算機リソースが必要となってしまう、リアルタイム解析の障害となっている。そのため、数値解析の結果を機械学習モデルで予測することによって解析の高速化・効率化をはかる試みが近年盛んになってきている。

数値解析を学習する手法として様々なものが考えられるが、graph neural network (GNN) と呼ばれる構造の機械学習モデルを用いて、メッシュや点群といった数値解析でひろく用いられるデータ構造を持つ数値解析データを学習した研究が主流となってきている。しかしながら、多くの GNN では入力形状に回転や平行移動といった変換を施すと入力データの値が異なってしまうため、予測結果が不安定になるといった問題が見られる。物理現象には、入力に回転や平行移動を施すと出力も同じ変換をうけるという同変性 (equivariance) と呼ばれる性質があるが、GNN をはじめとした通常の機械学習モデルは同変性を持たないことがその原因である。一方で、機械学習モデルに同変性を持たせると一般的にモデルが複雑化し、計算に時間がかかることが多い。

そこで筆者らは、高速に計算でき同変性を持つ GNN である IsoGCN と呼ばれるモデル [1, 2] とそれを改善して輸送現象や非圧縮性流れなどに適用できる physics-embedded neural network (PENN) [3] を提案した。

IsoGCN ならびに PENN は広いクラスの偏微分方程式に適用できる機械学習フレームワークであるが、一方で、輸送現象を考慮する上で重要となる、輸送される物質の保存性が考慮されていなかった。また、スケール変換に対しての同変性も有しておらず、したがって流体现象の汎用的な記述において中心的な役割を果たす相似則の考慮ができなかった。そこで本研究では、合同変換と拡大縮小を合わせた概念である相似変換に対する同変性に加え、有限体積法の定式化を活用することで保存性を付与した機械学習モデル [4] について議論する。提案手法では、代表的な GNN である message passing neural network [5] と空間離散化された保存形式である有限体積法の類似性に着目することで、自然に保存性を満たす機械学習モデルが構成できることを示す (図 1)。

**謝辞** 本研究は、JST さきがけ JPMJPR21O9、JST 創発的研究支援事業 JPMJFR215S、防衛装備庁安全保障技術研究推進制度 JPJ004596、JSPS 科研費 23H04532、23K24857、23KK0182 の支援を受けたものである。

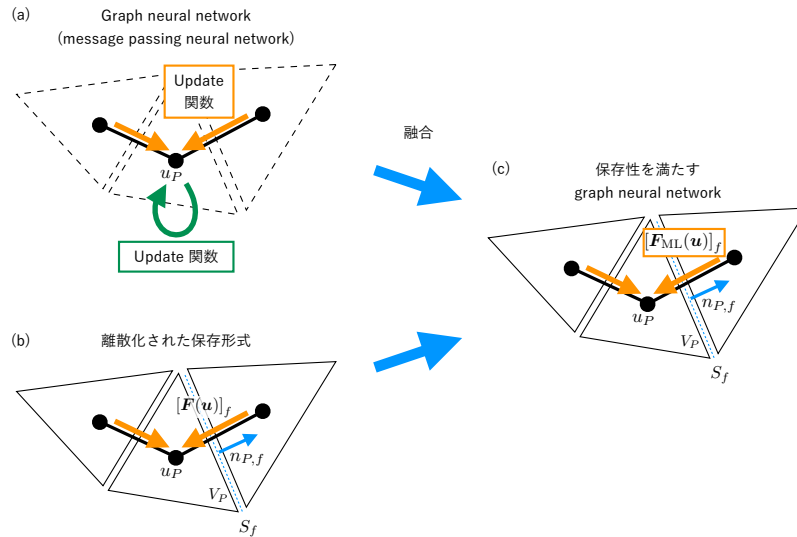


図 1. (a) GNN の代表的な形式である MPNN、(b) 空間離散化された保存形式、(c) 保存性を満たす GNN の模式図。

## 参考文献

- [1] Masanobu Horie, Naoki Morita, Toshiaki Hishinuma, Yu Ihara, and Naoto Mitsume. Isometric transformation invariant and equivariant graph convolutional networks. In *International Conference on Learning Representations*, 2021.
- [2] 堀江正信, 森田直樹, 井原遊, 三目直登. グラフニューラルネットワークを用いたメッシュベース数値解析の汎用的な学習. 日本計算工学会論文集, Vol. 2020, No. 1, pp. 20201005–20201005, 2020.
- [3] Masanobu Horie and Naoto Mitsume. Physics-embedded neural networks: Graph neural PDE solvers with mixed boundary conditions. In Alice H. Oh, Alekh Agarwal, Danielle Belgrave, and Kyunghyun Cho, editors, *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2022.
- [4] Masanobu Horie and Naoto Mitsume. Graph neural PDE solvers with conservation and similarity-equivariance. In *Forty-first International Conference on Machine Learning*, 2024.
- [5] Justin Gilmer, Samuel S Schoenholz, Patrick F Riley, Oriol Vinyals, and George E Dahl. Neural message passing for quantum chemistry. In *Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning-Volume 70*, pp. 1263–1272. JMLR. org, 2017.

# 直交選点有限要素法の曲線要素と微分作用素によるアイソパラメトリックとサブパラメトリック要素

大久保孝樹<sup>1</sup>

<sup>1</sup>函館高専名誉教授

e-mail: ohkubo@hakodate-ct.ac.jp

## 1 概要

極座標系の曲線要素や任意の曲線形状を表す形状関数を高次の直交多項式で表す場合は高次のサブパラメトリック要素やアイソパラメトリック要素であり、要素は非常に大きくなる。ここで、重要なことは、曲線要素・サブパラメトリック要素・アイソパラメトリック要素上の試行関数の直交選点の配置であり、選点間の曲線距離の間隔を直交選点の間隔と同じしなければならないことである。極座標系の円曲線の曲線要素の直交選点配置は容易であるが、任意の形状曲線(直交多項式で表示)上の試行関数の選点配置は選点までの距離を直交選点の間隔と同じになるように数値積分(Gauss-Legendre の数値積分)をしなければならず、計算に時間がかかる。形状関数の任意形状の  $x, y$  座標は任意に配置し、任意形状の形状関数を決定する必要がある。この形状関数を用いて形状関数上に試行関数(形状関数と同じかより高次の関数)の直交選点を数値積分によって配置することになる。数値積分して試行関数の直交選点配置を得て、さらにその直交選点配置から形状関数を計算して形状関数と試行関数の次数が同じアイソパラメトリック要素を得る。移動境界問題にはアイソパラメトリック要素が必要であるが、今回は、移動境界問題は行わず、境界が移動したとして仮定した任意形状の 2 次元チャネルの非定常ストークス問題を例にとった。

## 2 2次元空間の微分作用素

2次元多項式を Lagrange 補間公式によって表現すると式(1)のように表される。

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{N_1+2} \sum_{j=1}^{N_2+2} l_i(\xi) l_j(\eta) u(\xi_i, \eta_j) \quad (1) \quad l_i(\xi) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_1+2} \frac{\xi - \xi_k}{\xi_i - \xi_k} \quad l_j(\eta) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_2+2} \frac{\eta - \eta_k}{\eta_j - \eta_k} \quad (2)$$

上式(2)を、 $\xi, \eta$  で偏微分し、選点  $m$  ( $\xi$  方向の選点番号)、 $n$  ( $\eta$  方向の選点番号)での偏微分を以下に表示する。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{m,n} &= \sum_{i=1}^{N_1+2} \sum_{j=1}^{N_2+2} l'_i(\xi_m) l_j(\eta_n) u(\xi_i, \eta_j) & \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{m,n} &= \sum_{i=1}^{N_1+2} \sum_{j=1}^{N_2+2} l_i(\xi_m) l'_j(\eta_n) u(\xi_i, \eta_j) \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right|_{m,n} &= \sum_{i=1}^{N_1+2} \sum_{j=1}^{N_2+2} l''_i(\xi_m) l_j(\eta_n) u(\xi_i, \eta_j) & \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right|_{m,n} &= \sum_{i=1}^{N_1+2} \sum_{j=1}^{N_2+2} l_i(\xi_m) l''_j(\eta_n) u(\xi_i, \eta_j) \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{m,n} &= \sum_{i=1}^{N_1+2} \sum_{j=1}^{N_2+2} l'_i(\xi_m) l'_j(\eta_n) u(\xi_i, \eta_j) \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)より、微分作用素(行列)は式(4)で表される。ただし、( ' ) と ( '' ) は 1 階微分, 2 階微分である。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\xi &= l'_i(\xi_m) l_j(\eta_n) & \left[ \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] &= \mathbf{A}_\xi \mathbf{u} & \left[ \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] &= \mathbf{A}_\eta \mathbf{u} \\ \mathbf{A}_\eta &= l_i(\xi_m) l'_j(\eta_n) & \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right] &= \mathbf{B}_\xi \mathbf{u} & \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right] &= \mathbf{B}_\eta \mathbf{u} \\ \mathbf{B}_\xi &= l''_i(\xi_m) l_j(\eta_n) & \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right] &= \mathbf{C}_{\xi\eta} \mathbf{u} \\ \mathbf{B}_\eta &= l_i(\xi_m) l''_j(\eta_n) \\ \mathbf{C}_{\xi\eta} &= l'_i(\xi_m) l'_j(\eta_n) \end{aligned} \quad (4)$$

### 3 時間に関する微分作用素

$u$  を空間  $x, y$  と時間  $t$  の従属変数とすると,  $u$  の時間に関する偏微分は, 時間の微分作用素 (行列)  $\mathbf{A}_{tis}$  によって以下のように表示できる.

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right] = \mathbf{A}_{tis} \mathbf{u} \quad (5)$$

$\mathbf{A}_{tis}$  は 1 次元の Lagrange 補間式の微分により求めることができる.

### 4. 非構造格子に必要な座標変換マトリックスと形状関数

OCFEM (直交選点有限要素法) では, 要素内の離散的な選点 (直交選点) における偏微分を局所座標系から全体座標系 (非構造格子) に変換しなければならず, 合成関数の偏微分概念を用いることによって達成できる. 局所座標系を全体座標系 (非構造格子) に変換するための合成関数に用いる座標変換関数は, 曲線要素では極座標変換式, 任意形状関数では  $x, y$  座標を直交多項式の形状関数で表現する. 従属変数を  $u$  とすると, 合成関数の偏微分より (6) 式の全体座標から局所座標への変換マトリックスを得る. 形状関数は, 直交選点多項式によって表され, 全体座標系の  $x, y$  座標は局所座標系  $\xi, \eta$  によって次式で表示される (7).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} & \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 & \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 & 2 \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} & \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 & \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 & 2 \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} & \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) & \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) & \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{NA+2} \sum_{i=1}^{NA+2} \xi^{i-1} \eta^{j-1} d_{xij} \\ y &= \sum_{j=1}^{NA+2} \sum_{i=1}^{NA+2} \xi^{i-1} \eta^{j-1} d_{yij} \end{aligned} \quad (7)$$

直交選点での  $x, y$  の 1 階微分と 2 階微分は, 微分作用素によって次式で表される.  $x$  についてのみ表示.

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] &= \mathbf{A}_{\xi} \mathbf{x} & \left[ \frac{\partial x}{\partial \eta} \right] &= \mathbf{A}_{\eta} \mathbf{x} & \left[ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right] &= \mathbf{B}_{\xi} \mathbf{x} & \left[ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right] &= \mathbf{B}_{\eta} \mathbf{x} \\ \left[ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right] &= \mathbf{C}_{\xi\eta} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (8)$$

これらの微分は, 座標変換マトリックスの計算に用いられる.

### 6. 形状関数上の試行関数の直交選点配置

任意の形状の形状関数上への試行関数の直交選点配置には以下に示す 1 次元の微分作用素 (10) を利用した積分 (9) が必要である. 積分は Gauss-Legendre の積分公式によって数値積分した.

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \int_0^{\xi} \sqrt{\left( \frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\xi} \right)^2} d\xi & F(\eta) &= \int_0^{\eta} \sqrt{\left( \frac{dx}{d\eta} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\eta} \right)^2} d\eta \\ \left( \frac{dx}{d\xi} \right) &= \mathbf{A}_{\xi} \mathbf{x} & \left( \frac{dx}{d\eta} \right) &= \mathbf{A}_{\eta} \mathbf{x} & \left( \frac{dy}{d\xi} \right) &= \mathbf{A}_{\xi} \mathbf{y} & \left( \frac{dy}{d\eta} \right) &= \mathbf{A}_{\eta} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (9)$$

$F(\xi), F(\eta)$  を直交選点の配置間隔と同じになるように, 2 分割法により  $\xi, \eta$  を求た.

$F(\xi)$  より求めた形状関数の座標  $(x, y)$  と  $F(\eta)$  より求めた形状関数の座標  $(x, y)$  は, 一致しなければならない. 凹凸形状の要素では両者が最低有効数字 3 桁まで一致することを確認した. 他は, 16 桁まで一致している.

Stokes 方程式の数値計算結果は, 発表時に示す.

# A hypercircle-based a posteriori error estimation of finite element solutions

Xuefeng LIU<sup>1</sup>, Fumio KIKUCHI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Tokyo Woman's Christian University, <sup>2</sup>The University of Tokyo  
e-mail : xfliu@cis.twcu.ac.jp, kikuchi@ms.u-tokyo.ac.jp

## 1 Introduction

Kikuchi and Saito (Hironobu) once proposed a method for a posteriori error estimation of the finite element approximation to the Poisson equation, by combining the standard  $P_1$  element and the Raviart-Thomas mixed one, using the hypercircle method [1]. This method was later used for a posteriori error estimation of finite element solutions to the Stokes equations and for verified numerical computations. To maximize the accuracy of functions based on the Raviart-Thomas element, they used the mixed finite element solution. Additionally, they proposed a simplified method that post-processes the  $P_1$  element solution. Such a technique avoids solving simultaneous linear equations arising from the mixed FE method and can be easily used in solving practical problems. However, theoretical error estimation of the simplified method was insufficient, and they provided only numerical examples. Recently, progress has been made in the error estimation of the latter method, and we will report on the ideas and theoretical results, and compare the a posteriori error estimate with the actual error. Note that this technique can be applied to  $P_k$  elements. This report is a revised version of those previously presented orally.

## 2 Hypercircle method from Prager–Synge’s theorem

The hypercircle method originates from Prager–Synge’s theorem [4, 5]. This method is also proposed independently as the  $T^*T$  formulation by Kato and Fujita [2, 3].

Let  $\Omega$  be a domain with a proper boundary. Given  $f \in L^2(\Omega)$ , let  $u \in H_0^1(\Omega)$  be the weak solution of the variational equation:

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1)$$

For arbitrary  $v \in H_0^1(\Omega)$  and  $p \in H(\text{div}; \Omega)$  satisfying  $\text{div } p + f = 0$ , we have the hypercircle for the triple  $\{\nabla u, p, \nabla v\}$ :

$$\|\nabla u - p\|^2 + \|\nabla u - \nabla v\|^2 = \|\nabla v - p\|^2. \quad (2)$$

Note that the right-hand side is computable for some specific  $v$  and  $p$ .

## 3 FEM solution and a posteriori error estimation

Suppose  $\Omega$  is a polygonal domain with a regular triangulation  $\mathcal{T}^h$ . Let us apply the conforming  $P_1$  finite element to construct the finite element space  $V^h \subset H_0^1(\Omega)$  on  $\mathcal{T}^h$ , and define the approximate solution  $u_h \in V^h$  of  $u$  by

$$(\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V^h. \quad (3)$$

Let  $f_h$  be the element-wise average of  $f$  on the mesh  $\mathcal{T}^h$ . Let  $p_h$  be an approximation to  $\nabla u$  taken from the Raviart–Thomas space  $W^h$  such that

$$\operatorname{div} p_h + f_h = 0 \text{ in } \Omega.$$

Let  $u^h$  be the auxiliary solution to the Poisson equation (1) with  $f$  replaced by  $f_h$ . Then the triple  $\{\nabla u^h, p_h, \nabla v_h\}$  forms a hypercircle:

$$\|\nabla u^h - p_h\|^2 + \|\nabla u^h - \nabla v_h\|^2 = \|\nabla v_h - p_h\|^2. \quad (4)$$

With an easy-to-obtain estimate of the difference  $\nabla(u - u^h)$  using the error constant  $C_0$  for the averaging operator, we have the following *a posteriori* error estimation:

$$\|\nabla u - \nabla u_h\| \leq C_0 h \|f - f_h\| + \|\nabla v_h - p_h\| \quad (h : \text{mesh size}).$$

Since calculation of the optimal  $p_h$  requires solving a large linear algebraic system determined by the mixed FEM using  $W^h$ , one can apply local post-processing of  $u_h$  to obtain a good (but not optimal)  $p_h \in W^h$ . Here, let us introduce the technique introduced in [1] to construct  $p_h$  in conjunction with explicit error estimation. As  $\nabla u_h \cdot \mathbf{n}$  can be discontinuous across the interior edges, it is proposed to define the flux on an edge  $e = K \cap K'$  by taking the average of  $\nabla u_h \cdot \mathbf{n}$  on two elements  $K$  and  $K'$ . That is, for an interior edge  $e$ ,  $\hat{p}_h$  satisfies

$$\hat{p}_h \cdot \mathbf{n}|_e = \frac{1}{2}(\nabla u_h|_K \cdot \mathbf{n} + \nabla u_h|_{K'} \cdot \mathbf{n}). \quad (5)$$

For a boundary edge  $e$  such that  $e \subset \partial K \cap \partial\Omega$ ,  $\hat{p}_h \cdot \mathbf{n}|_e = \nabla u_h|_K \cdot \mathbf{n}$ . Note that  $\operatorname{div} \hat{p}_h + f_h \neq 0$  generally. By introducing  $\hat{f}_h := -\operatorname{div} \hat{p}_h$ , we obtain the following explicit *a posteriori* error estimate:

$$\|\nabla(u - u_h)\| \leq C_0 h (\|f - f_h\| + \|f_h - \hat{f}_h\|) + \|\hat{p}_h - \nabla u_h\|. \quad (6)$$

In the case that  $\|\operatorname{div} \hat{p}_h + f_h\| = \|f_h - \hat{f}_h\| = o(1)$ ,  $\|\hat{p}_h - \nabla u_h\|$  is the dominant term in (6).

Due to limited space, we will present numerical results orally.

## References

- [1] F. Kikuchi and H. Saito. Remarks on a posteriori error estimation for finite element solutions. J. of Comp. & Appl. Math., 199:329-336, 2007.
- [2] H. Fujita. Contribution to the theory of upper and lower bounds in boundary value problems. J. Phys. Soc. Japan, 10(1):1-8, 1955.
- [3] T. Kato. On some approximate methods concerning the operators  $T^*T$ . Mathematische Annalen, 126:253-262, 1953.
- [4] W. Prager and J.L. Synge. Approximations in elasticity based on the concept of function space. Quarterly of Applied Mathematics, 5(3):241-269, 1947.
- [5] J.L. Synge. The hypercircle in mathematical physics: a method for the approximate solution of boundary value problems. Cambridge University Press, 2012.

## 悪い要素を含む有限要素法の誤差解析

小林 健太<sup>1</sup>, 土屋 卓也<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 一橋大学, <sup>2</sup> 大阪大学

e-mail : kenta.k@r.hit-u.ac.jp

### 1 概要

有限要素法の誤差解析において、古典的な評価では、悪い要素が一つでもあると誤差評価が悪くなってしまう。しかし経験的には、少数の悪い要素は精度に悪影響を与えないということが知られている。また、既存の研究においても、悪い要素の配置が特定の条件を満たす場合には、有限要素解の精度が悪くならないことが証明されている。本研究では、悪い要素の存在を前提としつつ、精度が悪くならないような新たな誤差評価の手法を確立したので報告する。本手法は、既存の研究に比べても適用範囲が広く、悪い要素のより一般的な配置に対して有効である。

### 2 対象とする方程式と従来の誤差評価

$\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) の有界な多角形もしくは多面体領域とし、以下の Poisson 方程式

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

とその弱定式化

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1)$$

を考える。ここで  $f \in L^2(\Omega)$  は与えられた関数である。

この問題に対し、 $\mathcal{T}_h$  を  $\Omega$  の正則な単体分割とし、以下の有限要素空間を設定する。

$$S_h := \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v_h|_{\tau} \in \mathcal{P}_1, \forall \tau \in \mathcal{T}_h\}, \quad S_{h0} := S_h \cap H_0^1(\Omega),$$

ここで、 $\mathcal{P}_1$  は高々 1 次の多項式の集合である。

(1) に対応する有限要素解  $u_h \in S_{h0}$  は、次の方程式の解として求められる。

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v_h \, d\mathbf{x}, \quad \forall v_h \in S_{h0}. \quad (2)$$

さて、有限要素解  $u_h$  の誤差評価は古典的には以下のような手順により行われる [1]。まず、 $u_h$  は  $S_{h0}$  における  $u$  の最良近似であることが知られている (Céa の補題) ので、各単体  $\tau \in \mathcal{T}_h$  上の 1 次 Lagrange 補間を  $\Pi_{\tau}^1$  とし、それらを接続して  $\Omega$  全体で考えたものを  $\Pi_h^1$  とすると

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq \inf_{w_h \in S_{h0}} |u - w_h|_{H^1(\Omega)} \leq |u - \Pi_h^1 u|_{H^1(\Omega)}$$

が成り立つ。さらに

$$\begin{aligned} |u - \Pi_h^1 u|_{H^1(\Omega)}^2 &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} |u - \Pi_{\tau}^1 u|_{H^1(\tau)}^2 \leq \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} C_{\tau}^2 |u|_{H^2(\tau)}^2 \\ &\leq \max_{\tau \in \mathcal{T}_h} C_{\tau}^2 \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} |u|_{H^2(\tau)}^2 = \max_{\tau \in \mathcal{T}_h} C_{\tau}^2 |u|_{H^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

なる評価が成り立つ．ここで  $C_\tau$  は，補間誤差定数と呼ばれる三角形  $\tau$  のみに依存する定数である．これらを合わせると，以下の誤差評価が成り立つ．

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq \max_{\tau \in \mathcal{T}_h} C_\tau |u|_{H^2(\Omega)}$$

さて，単体  $\tau$  の最大辺長を  $d(\tau)$  とすると，三角形の最大角が  $\pi$  より小さいある定数以下となる，あるいは四面体の内接球の直径と  $d(\tau)$  の比が一定範囲に収まる，という条件が満たされる場合， $C$  を定数として

$$C_\tau \leq Cd(\tau)$$

なる評価が成り立つことが知られている（三角形についての条件は最大角条件として知られている [2]）．メッシュを構成する三角形や四面体がこの条件を満たしながら細分化されていくとき，メッシュを構成する単体の最大辺長を  $h$  とすると， $O(h)$  の誤差評価

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega)} \leq Ch|u|_{H^2(\Omega)}$$

が得られる．

### 3 本研究の結果

従来の有限要素解の誤差評価においては，評価を得る過程において  $\max_{\tau \in \mathcal{T}_h} C_\tau$  を，最も大きな  $C_\tau$  で評価しているため，メッシュ分割に一つでも補間誤差定数が悪くなる要素（最大角が  $\pi$  に近付いていく三角形や，形が潰れていく四面体）が存在すると，全体の誤差評価が悪くなってしまう．しかしながら，実際には少数の悪い要素の存在は，精度に悪影響を及ぼさないことが，数値計算結果などから示唆されてきた．

本研究においては，メッシュ分割が悪い要素を含んでいる場合でも，それらの要素が良い形状の単体で仮想的にカバーされ，その仮想的な単体たちが一定の条件を満たす場合には， $O(h)$  の誤差評価が得られることを示すことに成功した．

既存の研究においても，悪い要素の配置が特定の条件を満たす場合には，精度が悪くならないような有限要素解の誤差評価が得られている [3, 4] が，我々の得た手法は，既存の研究に比べても適用範囲が広く，悪い要素のより一般的な配置に対して有効である．

具体的な誤差評価の方法や，既存の研究との比較については，講演で解説する．

### 参考文献

- [1] S.C. Brenner, L.R. Scott, The mathematical theory of finite element methods, third edition, Springer, 2008.
- [2] I. Babuška, A.K. Aziz, On the angle condition in the finite element method, SIAM J. Numer. Anal. **13** (1976), 214–226.
- [3] V. Kučra, On necessary and sufficient conditions for finite element convergence, arxiv:1601.02942.
- [4] M. Duprez, V. Lleras, A. Lozinski, Finite element method with local damage of the mesh, Math. Model. Numer. Anal., **53** (2019) 1871–1891.