

# 遅延微分方程式 $x'(t) = x(t)^2 - x(t - \tau)$ の解の爆発と零解への収束について

中田 行彦<sup>1</sup>, 石渡 哲哉<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 青山学院大学 理工学部, <sup>2</sup> 芝浦工業大学 システム理工学部

e-mail : <sup>1</sup> ynakata@math.aoyama.ac.jp

## 1 遅延微分方程式の解の有限時間爆発

時間遅れを伴う反応や相互作用は自然現象や社会現象において普遍的に存在する。時間遅れを伴う現象の記述に現れる遅延微分方程式は 20 世紀より精力的に研究されてきた。近年、遅延微分方程式の解の有限時間爆発について研究が行われている ([1, 2, 3, 4])。[3] では、ある 2 次元の微分方程式系において、時間遅れがないとき、原点以外の全ての解が収束するリミットサイクルが存在するが、時間遅れによって、有限時間で無限遠方へと発散する爆発解が現れることが示された。時間遅れフィードバックをもつ 2 次元の微分方程式系の解の爆発は [4] でも調べられている。[5] では、 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を連続関数として、時間遅れをもつスカラーの微分方程式

$$x'(t) = F(x(t), x(t-1)) \quad (1)$$

に対して、有限時間爆発する解が存在するための条件を、パラメータをもつ常微分方程式

$$x'(t) = F(x(t), a), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

を用いて与えた。方程式 (1) の解の最大存在時間が有限であるとき、方程式 (1) の解は有限時間で爆発する、という。

**定理 1 ([5])** 方程式 (2) が有限時間で爆発する解をもつようなパラメータ  $a \in \mathbb{R}$  が存在するならば、方程式 (1) は爆発解をもつ。

定理 1 の証明は、(1) に対して特別な初期関数を考えることで、時間局所的に (1) の解が、(2) を満たすことを利用する。同様のアイデアは、[2, 3] で使われている。

方程式 (1) に対して、爆発解の存在が確認されたとしても、解の爆発が方程式 (1) において典型的な現象かどうかについては、吟味が必要である。スカラーの微分方程式 (1) に対しても、有限時間で解の爆発を引き起こすような初期関数のクラスを調べることは一般的に困難である ([1])。この点は、時間遅れを持たないスカラーの常微分方程式と大きく異なる。定理 1 で得られる方程式 (1) の解の爆発時刻は 1 よりも以前のものである。方程式によっては、方程式がもつ時間遅れに比べて「長い」時間が経過してから爆発する解が存在することが数値的に確認されている [3]。

## 2 時間遅れによる負のフィードバック項を備えた遅延微分方程式

遅延微分方程式において、どの解がいつ爆発するかを知ることは、一般的に困難な問題である。スカラーの微分方程式  $x'(t) = x^2(t)$  は、全ての正の解が有限時間で爆発する。そこで、時間遅れ項が、解の成長を抑制するような簡単な遅延微分方程式として、以下の微分方程式を考える。

$$x'(t) = x^2(t) - x(t - \tau) \quad (3)$$

ここで、 $\tau$  は時間遅れを表す非負のパラメータである。 $\tau = 0$  のとき、初期条件  $x(0) = x_0$  を満たす (3) の解は、 $x_0 > 1$  ならば有限時間で爆発する。また、 $x_0 < 1$  のとき、 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  である。

$\tau > 0$  とする．初期関数が定数関数である場合について考える． $x_0 \in \mathbb{R}$  として，方程式 (3) の初期条件を  $x(t) = x_0$  ( $t \in [-\tau, 0]$ ) と定めると，(3) の解は，

$$x'(t) = x^2(t) - x_0, \quad t \in [0, \tau] \cap [0, T_{x_0}) \quad (4)$$

を満たす．ただし， $T_{x_0}$  は，初期条件  $x(t) = x_0$  ( $t \in [-\tau, 0]$ ) を満たす (3) の解の最大存在時刻を表す．(4) は明示的な解が得られる自励系の常微分方程式であり，(4) より，時刻  $t = \tau$  までに解が爆発する（即ち  $T_{x_0} \leq \tau$  である）具体的な条件を得ることが可能である． $x_0 > 1$ ,  $\tau > 0$  に対して，

$$\frac{\log \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{x_0}-1} \right)}{2\sqrt{x_0}} \leq \tau \quad (5)$$

が成り立つとき，初期条件  $x(t) = x_0$  ( $t \in [-\tau, 0]$ ) を満たす (3) の解は爆発する． $x_0 < 0$  に対しても，解が時刻  $t = \tau$  までに爆発する条件を得ることが出来る．次に，方程式 (3) の初期条件を

$$x(t) = \varphi(t) \quad (t \in [-\tau, 0]) \quad (6)$$

と定める．ここで， $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  は連続関数である．初期条件 (6) を満たす (3) の解を  $x(t; \varphi)$  と表し， $x(t; \varphi)$  の最大存在時刻を  $T_\varphi$  と表す．(3) の解が，ある時刻  $t = \bar{t} > 0$  で， $x(\bar{t}) \geq 1$  であり， $x : [0, \bar{t}] \rightarrow \mathbb{R}$  が単調増加関数であれば， $\bar{t} < t < T_\varphi$  に対して， $x : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$  も単調増加関数であることが示される．ある時刻で  $x = 1$  を超えて，時間と共に単調増加する解は，有限時間で爆発する．

**定理 2** 初期関数  $\varphi$  は以下の条件を満たすとする．

$$(i) \quad \varphi(0) \geq 1, \quad (ii) \quad \varphi(0)^2 > \varphi(-\tau), \quad (iii) \quad \varphi(0)^2 \geq \varphi(\theta), \quad \forall \theta \in (-\tau, 0). \quad (7)$$

このとき初期条件 (6) を満たす (3) の解  $x(t; \varphi)$  に対して， $T_\varphi < \infty$  であり，全ての  $t \in [0, T_\varphi)$  に対して， $x'(t; \varphi) > 0$  が成り立つ．

また， $0 < x < 1$  の範囲で単調減少する解は，有限時間で  $x = 0$  に到達するか， $t \rightarrow \infty$  で  $x = 0$  に収束する．零解への収束についても得られた結果を発表する．

**謝辞** 本研究は，科学研究費補助金（基盤研究 (C) 20K03734）の助成を受けている．

## 参考文献

- [1] K. Ezzinbi, M. Jazar, Blow-up results for some nonlinear delay differential equations. Positivity, 10 (2006) pp. 329–341.
- [2] I. Györi, Y. Nakata, G. Röst, Unbounded and blow-up solutions for a delay logistic equation with positive feedback, Comm. Pure Appl. Anal., 17.6 (2018): 2845.
- [3] A. Eremin, E. Ishiwata, T. Ishiwata, Y. Nakata, Delay-induced blow-up in a planar oscillation model. Jpn. J. Ind. Appl. Math. 38 (2021) pp. 1037–1061
- [4] K. Yagasaki, Existence of finite time blow-up solutions in a normal form of the subcritical Hopf bifurcation with time-delayed feedback for small initial functions. Disc. Cont. Dyn. Syst. Ser. B 27 (2022) pp. 2621 – 2634
- [5] T. Ishiwata, Y. Nakata, A note on blow-up solutions for a scalar differential equation with a discrete delay. Jpn. J. Ind. Appl. Math. 39 (2022) pp. 959 – 971

# 特殊な遅延微分方程式におけるフーリエ変換を用いた解の構成

大平 健太

名古屋大学, 情報学研究科

e-mail : ohira.kenta.n7@f.mail.nagoya-u.ac.jp

## 1 概要

最近、我々はある特殊な遅延微分方程式を研究している。それは特に時間によって変化する係数を持つ、非自励系遅延微分方程式と呼ばれるカテゴリに属する。その方程式はあるパラメータ範囲でフーリエ変換可能であるため、フーリエ空間上で得た方程式の解に逆変換をすることで元の微分方程式の解を得ることができる。この解についての性質を考えていく [1],[2]。

## 2 提案する微分方程式

具体的には以下の形をした方程式である。ここで  $t$  は時間、 $\tau$  は遅れで  $\tau \geq 0$  を満たし、 $a$  及び  $b$  は実数パラメータである。

$$\frac{dX(t)}{dt} + atX(t) = bX(t - \tau) \quad (1)$$

この式は、多くの研究がなされている Hayes の式に似た形である [3]。

## 3 フーリエ変換を用いた一般解

$\tau > 0$  で  $a > 0$  の時、フーリエ空間上の微分方程式の解  $\hat{X}(\omega)$  は以下となる。( $\omega$ : 角周波数、 $C$ : 積分定数)

$$\hat{X}(\omega) = C \exp\left[-\frac{1}{2a}\omega^2 + \frac{b}{\tau a}e^{-i\tau\omega}\right] \quad (2)$$

フーリエ変換の性質から、この  $\hat{X}(\omega)$  にフーリエ逆変換をすればもとの微分方程式の一般解  $X(t)$  を得ることができる。

$$X(t) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2a}\omega^2 + \frac{b}{\tau a} \cos \tau\omega\right] \cos\left(\frac{b}{\tau a} \sin \tau\omega - t\omega\right) d\omega \quad (3)$$

この  $X(t)$  は、任意の  $t \in \mathbb{R}$  で元の微分方程式 (1) を満たす一般解である。よって当然ではあるが、この  $X(t)$  の  $t \in [-\tau, 0]$  を初期関数として  $t \geq 0$  において元の微分方程式を解けば、解はこの  $X(t)$  の  $t \geq 0$  の部分と一致する。

## 4 解のダイナミクス

図 1.

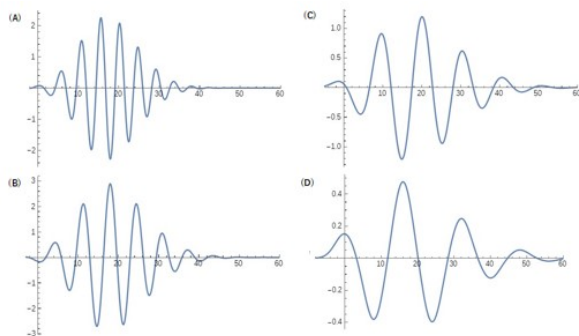
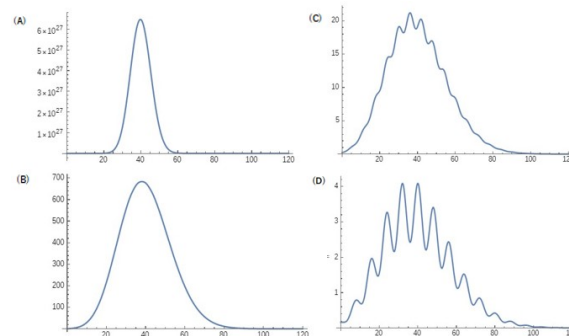


図 2.



先ほど得られた解について、図 1,2 はそれぞれ  $b < 0$ ,  $b > 0$  におけるダイナミクス  $t - X(t)$  の代表例である。図 1 ではパラメータを  $a = 0.15$ ,  $b = -3$  と固定し、遅れ  $\tau$  を (A)2, (B)3, (C)5, (D)8 と徐々に大きくしている。図 2 では  $a = 0.15$ ,  $b = 6$ ,  $\tau$  は (A)0.6, (B)4, (C)6, (D)8。どちらの概形もガウス関数を包絡線とする波形のようになっている。

## 5 パワースペクトラムを用いた共振現象の解析

このダイナミクスについて、適切に調整された  $\tau$  の時に最も特定の周波数が強調される共振現象が現れる。それを解析するのにパワースペクトラム  $S(\omega)$  を用いる。これは式 (2) の  $\hat{X}$  から計算できる。

$$S(\omega) = |\hat{X}(\omega)|^2 = \hat{X}(\omega)\hat{X}^*(\omega) = C^2 \exp\left[-\frac{1}{a}\omega^2 + \frac{2b}{\tau a} \cos \omega \tau\right] \quad (4)$$

このパワースペクトラムを遅れ  $\tau$  と角周波数  $\omega$  の 2 変数関数として考え、 $\omega \neq 0$  で  $S(\tau, \omega)$  が最大かつ極大となる時に共振現象となる。これを与える  $(\tau, \omega) = (\tau_r, \omega_r)$  とその時のパワースペクトラム  $S_r$  は以下で与えられる。

$$\tau_r = \frac{1}{|b|} \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta^2}, \quad \omega_r = |b|\delta, \quad S_r = S(\tau_r, \omega_r) = C^2 \exp\left[\frac{b^2}{a} \delta^2\right] \quad (5)$$

ただし  $\delta$  は以下の式の解である。

$$\begin{aligned} \delta &= \left| \sin \sqrt{\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 - 1} \right| \\ b > 0: \quad & \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 + 1}} < \delta < \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}\pi^2 + 1}} \\ b < 0: \quad & \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + 1}} < \delta < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2 + 1}} \end{aligned} \quad (6)$$

$b > 0$ ,  $b < 0$  の時の  $\delta$  をそれぞれ  $\delta^+$ ,  $\delta^-$  として、これを数値的に解くと  $\delta^+ \approx 0.161228$ ,  $\delta^- \approx 0.336508$  となる。以上からこの遅れ  $\tau_r$  の時、角周波数  $\omega_r$  が最も強調される共振現象が確認できる。

**謝辞** 名古屋大学情報学研究科の大平英樹教授の有益なコメントに感謝します。この研究はトヨタ自動車の予兆学プロジェクト、科研費 JSPS 19H01201, および JSPS 課題設定による先導的人文学・社会科学研究推進事業 JPJS00122674991 より支援を受けました。

## 参考文献

- [1] K. Ohira, Resonating Delay Equation, European Physics Letters, 137(2022), 23001
- [2] K. Ohira and T. Ohira, Solving a Delay Differential Equation through Fourier Transform, arXiv:2401.02027v3.13448
- [3] N. D. Hayes, Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equation, J. Lond. Math. Soc., 25(1950), 226—232.

# 時間遅れを伴う complex balanced な化学反応ネットワークの線形安定性解析

小松 弘和<sup>1</sup>, 中島 弘之<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 近畿大学 工学部 教育推進センター, <sup>2</sup> 近畿大学 工学部 電子情報工学科  
e-mail : komatsu@hiro.kindai.ac.jp

## 1 時間遅れを伴う化学反応ネットワーク

化学反応ネットワーク (CRN) は, 以下の 3 つの集合の組  $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$  によって記述される [1]:

1.  $\mathcal{S}$  は,  $n$  個の物質からなる集合であり,  $\mathcal{S} := \{X_1, \dots, X_n\}$  と表す.
2.  $\mathcal{C}$  は,  $m$  個の complexes  $y$  からなる集合であり,  $\mathcal{C} := \{y_1, \dots, y_m\}$  と表す.
3.  $\mathcal{R}$  は,  $R$  個の反応  $y \rightarrow y'$  からなる集合である.

ここで, 反応  $y \rightarrow y' \in \mathcal{R}$  は, complex  $y$  が反応し, complex  $y'$  が生成されることを表す. また,  $i$ -番目の complex  $y_i \in \mathcal{C}$  は非負の整数値  $y_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, n$  を用いて,  $y_{i1}X_1 + \dots + y_{in}X_n$  と表される. さらに, 物質  $X_1, \dots, X_n$  の順序は固定されているので, 以下,  $y_i$  はその係数のみを用いて  $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{in})^T$  と表す.

物質  $X_1, \dots, X_n$  の各濃度  $x_1, \dots, x_n$  を並べた濃度ベクトルを  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$  とする. このとき, 時間遅れを伴う CRN の各物質の濃度の時間変化  $x(t)$ ,  $\forall t \geq 0$  を記述する遅れ型関数微分方程式 (DDE) は, 次式で記述される [2]:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m k(i, j) [x(t - \tau_{ij})^{y_i} y_j - x(t)^{y_i} y_i], \quad \forall t \geq 0. \quad (1)$$

ただし,  $x^{y_i} := x_1^{y_{i1}} x_2^{y_{i2}} \dots x_n^{y_{in}}$ ,  $i = 1, \dots, m$  である.  $k(i, j)$  は反応  $y_i \rightarrow y_j$  の反応速度定数と呼ばれ,  $y_i \rightarrow y_j$  が存在するとき  $k(i, j) > 0$ , そうでないとき  $k(i, j) = 0$  である. また,  $\tau_{ij}$  は反応  $y_i \rightarrow y_j$  に生じる時間遅れを表す非負の定数である.

次に,  $K^{(i, j)} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, m$ ,  $i \neq j$  を,  $(i, j)$ -成分は  $k(i, j) > 0$  であり, それ以外の成分は零の  $m \times m$  行列とし,  $K^{(d)} \in \mathbf{R}^{m \times m}$  を次式で定義される  $m \times m$  行列

$$K^{(d)} := \text{diag} \left( -\sum_{j=1}^m k(1, j), -\sum_{j=1}^m k(2, j), \dots, -\sum_{j=1}^m k(m, j) \right) \quad (2)$$

とすると, DDE (1) は次式のように変形できる:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Y \left[ K^{(d)} x^Y(t) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m K^{(i, j)} x^Y(t - \tau_{ij}) \right], \quad \forall t \geq 0. \quad (3)$$

ここで,  $Y := (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ , および,  $x^Y := (x^{y_1}, x^{y_2}, \dots, x^{y_m})^T \in \mathbf{R}^m$  である.

## 2 主結果

本研究では, complex balanced な CRN  $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$  を対象とする. ここで, CRN  $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$  が complex balanced であるとは, DDE (3) に対して, 反応速度定数  $k(i, j)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, m$ ,  $i \neq j$

のある値で、次式を満たす正值平衡点  $x = \bar{x} \in \mathbf{R}_{>0}^n$  が存在することを意味する [2, 3] :

$$\left[ K^{(d)} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m K^{(i,j)} \right] \bar{x}^Y = 0. \quad (4)$$

本研究の目的は、時間遅れを伴わない場合に [3] で示された、条件 (4) を満たす正值平衡点  $x = \bar{x}$  の局所指数安定性を、時間遅れを伴う場合へ拡張することである。

そこで、条件 (4) を満たす正值平衡点  $x = \bar{x}$  周りで DDE (3) を線形化すると、次式の線形 DDE を得る：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= Y \left[ K^{(d)} [Dx^Y]_{x=\bar{x}} y(t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m K^{(i,j)} [Dx^Y]_{x=\bar{x}} y(t - \tau_{ij}) \right] \\ &= Y \left[ K^{(d)} \text{diag}(\bar{x}^Y) Y^T X y(t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m K^{(i,j)} \text{diag}(\bar{x}^Y) Y^T X y(t - \tau_{ij}) \right], \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 $X := \text{diag}(1/\bar{x}_1, \dots, 1/\bar{x}_n)$  であり、 $[Dx^Y] \in \mathbf{R}^{m \times n}$  は次式で定義される  $m \times n$  行列である：

$$[Dx^Y] := \left( \frac{\partial}{\partial x} [x^{y_1}], \frac{\partial}{\partial x} [x^{y_2}], \dots, \frac{\partial}{\partial x} [x^{y_m}] \right)^T \quad (6)$$

このとき、DDE (5) の特性方程式は次式となる：

$$F(\lambda) := \det \left( \lambda I_n - Y \left[ K^{(d)} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m K^{(i,j)} e^{-\tau_{ij}\lambda} \right] \text{diag}(\bar{x}^Y) Y^T X \right) = 0, \quad \lambda \in \mathbf{C}. \quad (7)$$

本研究では、特性方程式 (7) の根に対して次の結果を得た。

**定理 1** CRN  $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$  は、complex balanced であるとする。このとき、時間遅れ  $\tau_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, m$  の値によらず、特性方程式 (7) の全ての根  $\lambda$  は、 $\lambda = 0$ 、もしくは、 $\text{Re}(\lambda) < 0$  である。

紙面の都合上、定理 1 の証明は省略したが、発表当日はその概略を紹介する。

**謝辞** 本研究は、JSPS 科研費 24K16972 の助成を受けたものである。

## 参考文献

- [1] M. Feinberg, Foundation of chemical reaction network theory, Springer, New York, 2019.
- [2] H. Komatsu and H. Nakajima, Stability The Deficiency Zero Theorem and global asymptotic stability for a class of chemical reaction networks with arbitrary time delays, Systems and Control Letters, Vol. 136, No.104601 (2020), pp. 1–10 .
- [3] D. Siegel and M. D. Johnston, Linearization of complex balanced chemical reaction systems, <https://johnstonmd.files.wordpress.com/2015/02/linearization.pdf>.

## 2 種類の遅延項をもつ線形微分方程式の漸近安定性

松永 秀章<sup>1</sup>, 曲 明珠<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 大阪公立大学理学研究科, <sup>2</sup> 大阪府立大学理学系研究科

e-mail: hideaki.matsunaga@omu.ac.jp

### 1 序文

2 種類の遅延項をもつ 1 次元線形微分方程式

$$x'(t) = -ax(t) - bx(t - \tau) - c \int_{t-\tau}^t x(s)ds \quad (1)$$

を考える. ここで  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $\tau > 0$  である. 方程式 (1) の解の挙動は, 特性方程式

$$F(\lambda) := \lambda + a + be^{-\lambda\tau} + c \int_{-\tau}^0 e^{\lambda s} ds = 0 \quad (2)$$

の根によって決定される. よく知られているように, 方程式 (1) の零解が漸近安定であるための必要十分条件は, 特性方程式 (2) のすべての根が負の実部をもつことである.

時間遅れをもつ微分方程式の漸近安定性に関する結果は, 2 つのタイプがある. 1 つは時間遅れのパラメータを固定したときの係数パラメータ空間における安定領域を与える結果である. もう 1 つは係数パラメータを固定したときの時間遅れに依存した漸近安定条件を与える結果である. 漸近安定性におけるパラメータの依存性を明らかにすることは重要である. 特に, 理論的および応用的な側面から, 時間遅れに依存した漸近安定条件の導出が期待されている.

$a = 0$  のとき, 方程式 (1) の安定領域に関する次の結果が知られている ([1]).

**定理 A**  $a = 0$  とする. このとき, 方程式 (1) の零解が漸近安定であるための必要十分条件は

$$-\frac{b}{\tau} < c < \psi(b)$$

である. ただし,  $c = \psi(b)$  は

$$b = \frac{\omega \sin \omega\tau}{1 - \cos \omega\tau}, \quad c = -\frac{\omega^2 \cos \omega\tau}{1 - \cos \omega\tau}, \quad 0 < \omega < \frac{2\pi}{\tau}$$

で定義されたパラメータ曲線である.

方程式 (1) の時間遅れに依存した漸近安定条件について,  $c = 0$  のときは [2] で  $b = 0$  のときは [3], [4] で得られているが,  $bc \neq 0$  のとき ( $a = 0$  も含めて) 時間遅れに依存した漸近安定条件は得られていない.  $a = 0$  かつ  $b, c$  を固定したときの時間遅れに依存した漸近安定条件を定理 A から導くことは難しいことに注意する. 本研究の目的は,  $bc \neq 0$  のとき, すなわち, 方程式 (1) が 2 種類の遅延項をもつとき, 時間遅れに依存した漸近安定条件を与えることである. 講演の内容は [5] に基づく.

### 2 主定理

簡単のため,  $\omega_0 = \sqrt{b^2 + 2c - a^2}$  とし,  $\tau$  の 3 つの閾値を

$$\tau^* = -\frac{a+b}{c}, \quad \tau_0 = \frac{1}{\omega_0} \arccos \left( \frac{(b-a)^2 - \omega_0^2}{(b-a)^2 + \omega_0^2} \right), \quad \sigma_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} - \tau_0$$

と定める. 今回得られた結果は, 次の通りである.

定理 1  $a > 0$  とする. このとき, 方程式 (1) の零解が漸近安定であるための必要十分条件は,  $a + b + c\tau > 0$  かつ次の 5 つの条件のいずれかが成り立つことである.

$$b \geq a, \quad b^2 + 2c - a^2 > 0, \quad 0 < \tau < \tau_0, \quad (3)$$

$$b > -a, \quad b^2 + 2c - a^2 \leq 0, \quad c < 0, \quad 0 < \tau < \tau^*, \quad (4)$$

$$b^2 + 2c - a^2 \leq 0, \quad c \geq 0, \quad (5)$$

$$|b| < a, \quad b^2 + 2c - a^2 > 0, \quad 0 < \tau < \sigma_0, \quad (6)$$

$$b \leq -a, \quad c > 0, \quad \tau^* < \tau < \sigma_0. \quad (7)$$

定理 2  $a \leq 0$  とする. このとき, 方程式 (1) の零解が漸近安定であるための必要十分条件は,  $a + b + c\tau > 0$  かつ次の 4 つの条件のいずれかが成り立つことである.

$$b > -a, \quad b^2 + 2c - a^2 > 0, \quad 0 < \tau < \tau_0, \quad (8)$$

$$b > -a, \quad b^2 + 2c - a^2 \leq 0, \quad 0 < \tau < \tau^*, \quad (9)$$

$$|b| \leq -a, \quad b^2 + 2c - a^2 > 0, \quad \tau^* < \tau < \tau_0, \quad (10)$$

$$b < a, \quad c > 0, \quad \tau^* < \tau < \sigma_0. \quad (11)$$

### 3 主定理の証明の概略

主定理を証明するためは, 主定理の漸近安定条件が特性方程式 (2) のすべての根が負の実部をもつための必要十分条件であることを示せばよい.  $F(0) = a + b + c\tau$  かつ十分大きな  $\lambda > 0$  に対して  $F(\lambda) > 0$  であるから, 中間値の定理より,  $a + b + c\tau \leq 0$  ならば, 特性方程式 (2) は少なくとも 1 つ非負の根をもつ. よって,  $a + b + c\tau > 0$  の下で特性方程式 (2) の根の分布を調べればよい. その際, 特性根が  $\tau$  の連続関数であることを本質的に用いる. 次の命題は, 特性根解析の根幹をなす.

命題 1  $\tau$  の変化により右半平面に存在する特性方程式 (2) の根の重複度も含めた数の和が変化するのは, 根が虚軸上に現れる, または, 根が虚軸を横切るときに限る.

命題 1 より, 特性根解析は「特性方程式の純虚数根の存在条件」「 $\tau$  の変化による純虚数根の虚軸の横断性」「純虚数根が存在する  $\tau$  の値の大小関係」の解明に帰着される.

虚軸上の特性根が重根のとき,  $\tau$  の変化による虚軸の横断性が判定しにくい, 次の命題が有効な場合がある. この命題は  $p = 0$  のときを考察した [4] の結果の拡張である.

命題 2 多項式  $P(\lambda)$  と定数  $q \neq 0$  に対して, 方程式  $\lambda P(\lambda) + q = 0$  は実部が正の根をもつとき, 定数  $p$  と十分大きな  $\tau > 0$  に対して, 方程式  $P(\lambda) + pe^{-\lambda\tau} + q \int_{-\tau}^0 e^{\lambda s} ds = 0$  も実部が正の根をもつ.

謝辞 本研究は科研費 (課題番号: 19K03524, 24K06801) の助成を受けたものである.

### 参考文献

- [1] S. Sakata and T. Hara, *Funkcial. Ekvac.* **47** (2004), 129–144.
- [2] K. L. Cooke and Z. Grossman, *J. Math. Anal. Appl.* **86** (1982), 592–627.
- [3] M. Funakubo, T. Hara and S. Sakata, *J. Math. Anal. Appl.* **324** (2006), 1036–1049.
- [4] T. Hara and S. Sakata, *Appl. Math. Lett.* **24** (2011), 1–15.
- [5] M. Qu and H. Matsunaga, accepted for publication in *J. Math. Anal. Appl.*