

ABR 加算過程のウェーブレット解析結果に基づく Listing difficulties への 1 つの検討

井川 信子¹¹ 流通経済大学

e-mail : ikawa@rku.ac.jp

1 概要

Listening difficulties（本稿では LiD と略し、聞き取り困難症と訳す）とは静かな場所での会話の聞き取りには問題がなく、日常生活における聞き取り難さのある症例である。LiD について例えば川瀬は文献 [1] などにおいて、その原因病理を末梢病理と中枢病理に区別し、後者を Listening difficulties with clinically normal audiogram（略して LiDwithCNA とする、オーディオグラムが正常な聴力障害）と呼んでいる。ただし、両者に全く影響がないとも言いきれないとしている。そして特に、LiDwithCNA については、中枢での聴覚系の情報処理に必要不可欠な、“（選択的）注意”や“ワーキングメモリ”のような認知機能の問題の寄与が少なくないことが指摘されてきたという。“注意”は高次脳機能の土台といわれ障害されると認知機能が障害されると考えられ、脳の前頭前野にかかわるものといわれている。2020 年に利根川らにより「青斑核（脳幹にある神経核）の活動が、ターゲットとする脳領域の神経活動を選択的に調節し、“注意力”をコントロールする、という重要な因果関係が、私たちの研究結果によって示された」（例えば文献 [2]）という画期的な報告がある。

聴覚情報処理検査手法の 1 つである聴性脳幹反応（Auditory brainstem responses : ABR）は音刺激に誘発される脳波を計測し、反応波形の潜時（音刺激から反応を得られるまでの時間）は、第 8 聴神経、蝸牛神経核、橋、下丘、内側膝状体と、中枢神経系に分類される脳幹（間脳、中脳（上丘、下丘）、橋、延髄）の一部を経ていることがわかっている。利根川らの“注意力”を制御する脳領域と脳幹内神経核との回路を肯定すれば、ABR においても“注意力”を制御する信号を取り出せうのかもしれない。我々はこれまで、誘発反応電位から ABR 形成過程の波形の信号解析として、離散定常ウェーブレット解析（略して DSWA）を適用した（例えば文献 [3, 4]）。本稿では再び ABR 波形加算過程に DSWA を適用した結果をみて LiD を考慮した新たな聴覚情報処理検査手法を検討する。

2 加算過程 ABR_N に DSWA を適用

ABR 反応をえるため 10ms 間サンプリングされた誘発脳波データを epoch と呼ぶ。epoch は 512 個のサンプリングデータ $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{511}$ からなる。Epoch_k = $(x_{k0}, x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{k511})$ を N 回加算平均して $ABR_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \text{Epoch}_k$ をえる。同時に加算過程波形に DSWA を適用して、 $ABR_N = \text{ISWT}(\text{SWT}(ABR_N)) = \sum_{i=1}^8 D_{iN} + A_{8N}$ をえる。ここで、 D_{iN} と A_{8N} はそれぞれ i 番目の detail と 8 番目の approximation を表す。さらに、低周波数領域 ($A_8 + D_8$ の構成周波数) を緩徐波成分 (slow ABR), 高周波数領域 ($D_1 + D_2 + D_3 + D_4$ の構成周波数) をノイズ成分、両者以外の周波数領域 ($D_5 + D_6 + D_7$ の構成周波数) を速波成分 (fast ABR) とすると、fast ABR における潜時はほとんど加算をしなくてもえられた。一方、slow ABR はむしろ一定の加算は潜時同期のために必要であった（詳細は [3]）。

3 A8, D8 の加算過程の観察結果

A8_N, D8_N それぞれを $y_i(t)$, $i = N$ として次式を適用した. $y_i(t) = \alpha_i + \beta_i \sin(k\pi t - \gamma_i)$, $0 \leq t \leq 10$. ここで, k は定数である. α_i は直流 (DC) 成分, β_i は振幅, γ_i は位相差をそれぞれ表す未知数で, これらを推定近似する. さらに, 上式の位相を $\theta_N(t) = k\pi t - \gamma_N$ として, $\theta_{2000}(t)$ を基準にした位相差 $\Delta\theta = \theta_N(t) - \theta_{2000}(t) = \gamma_N - \gamma_{2000}$, $N \in N_s$ を y 軸に, 加算回数 N を x 軸として Fig. 1 に表示した. 加算を進めると, 相反しながら位相同期する現象を $\Delta\theta$ が捉えているように Fig. 1 の左図から観察できる. また, 平均をとる回数 N を増やして行くと, 2000 回平均との位相差の絶対値 $|\Delta\theta|$ は 0 に近づく (Fig. 1 右図). 加算による潜時の位相同期状態を観察することができる.

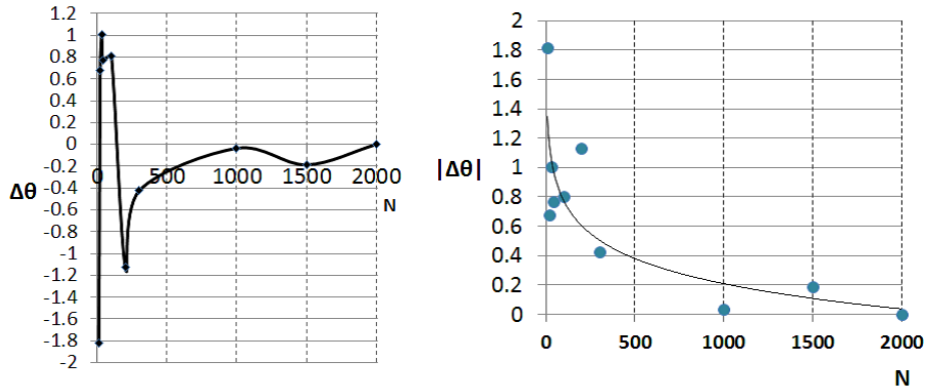


図 1. Example results of convergence of $\Delta\theta = \gamma_N - \gamma_{2000}$ (left graph) and $|\Delta\theta|$ (right graph) when A8_N, $N \in N_s$.

4 まとめ

聴覚情報処理検査の 1 つである ABR であるが, 本稿で示したように DSWA を適用した波形の加算過程を観察すると fast ABR と slow ABR は異なる振る舞いをすることがわかった. fast ABR は音入力による振動情報を神経スパイク情報としての出力の観察になるのではないかと. 一方 slow ABR は中枢 (中脳の下丘) 由来であり “注意” 信号に関連しているかもしれない. このような観察を容易に可能にする検査が実現できれば LiD 診断の補助になるかもしれない.

謝辞 本研究におけるウェーブレット理論および解析について, 大阪教育大学の芦野隆一教授と守本晃教授に長きにわたりご指導を賜っている. 心より感謝申し上げます.

参考文献

- [1] 川瀬哲明, Listening difficulties with clinically normal audiogram —原因病理に対する考え方と診断上の問題点—, Audiology Japan Vol. 66, No. 4 (2023), 237–246.
- [2] 理研脳神経科学研究センター, <https://cbs.riken.jp/jp/press/20201213.html>, “注意力” を制御する脳領域と回路を発見 (2020.12.13).
- [3] 井川信子, 守本晃, 芦野隆一, 離散定常ウェーブレット解析による高速聴性脳幹反応ピーク潜時検出, 日本応用数理学会論文誌, Vol.27, No.2 (2017), pp. 216–238.
- [4] 井川信子, 守本晃, 芦野隆一, ウェーブレット解析による slow ABR と 40-Hz ASSR の比較観察, 日本応用数理学会年会, 840 (2017.08.06).

パンディー-ウパディヤイのウェーブレット変換と関数の超局所的特異性について

李 旭¹, 森藤 紳哉²

¹ 奈良女子大学大学院 人間文化総合科学研究科, ² 奈良女子大学大学院 自然科学系 数学領域
e-mail : waa_ri@cc.nara-wu.ac.jp

1 Pandey-Upadhyay によるウェーブレット変換について

関数 $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ が許容条件を満たすウェーブレットであるとは, 以下に定義される C_ψ が 0 とは異なる有限値である時をいう.

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{|\omega_1 \cdots \omega_n|}.$$

この時, 関数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ の Pandey-Upadhyay[1] によるウェーブレット変換は

$$W_\psi f(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) |\xi_1 \cdots \xi_n| \bar{\psi}(\xi_1(t_1 - x_1), \dots, \xi_n(t_n - x_n)) dt, \quad x \in \mathbb{R}^n, \xi \in (\mathbb{R} - \{0\})^n$$

によって定義される. また [1] によるウェーブレット逆変換公式は以下の通りである.

$$f(t) = C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} - \{0\})^n} W_\psi f(x, \xi) |\xi_1 \cdots \xi_n| \psi(\xi_1(t_1 - x_1), \dots, \xi_n(t_n - x_n)) \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \cdots \xi_n|}, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

以下では, ウェーブレット関数 $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ のフーリエ変換 $\hat{\psi}(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t_1, \dots, t_n) e^{-i(t_1 \tau_1 + \cdots + t_n \tau_n)} dt$ ($\tau \in \mathbb{R}^n$) のサポートは立方体 $[1/2, 2]^n$ に含まれているものとする. また, $W_\psi f(x, \xi)$ の x に関するフーリエ変換 $(\widehat{W_\psi f})(\tau) = \hat{f}(\tau_1, \dots, \tau_n) \bar{\hat{\psi}}(\xi_1^{-1} \tau_1, \dots, \xi_n^{-1} \tau_n)$ のサポートは直方体 $[(1/2)\xi_1, 2\xi_1] \times \cdots \times [(1/2)\xi_n, 2\xi_n]$ に含まれている. このことから, [1] のウェーブレット変換を用いた関数の超局所的特異性を次のように定義する.

2 超局所的特異性について

定義 1. $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $(x_0, \xi^0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} - \{0\})^n$, $s \geq 0$ とする. f が (x_0, ξ^0) において [1] の意味でソボレフ空間 H^s に属するとは, x_0 のある近傍 $U(x_0)$ と ξ^0 のある錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ が存在して

$$\iint_{U(x_0) \times \Gamma(\xi^0)} |W_\psi f(x, \xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \cdots \xi_n|} < \infty \quad (1)$$

が成立することである.

Hörmander による関数の超局所的特異性を思い出し, [1] の場合の特異性と比較する. 周波数空間において, [2] では動径方向の拡大縮小と回転が用いられているが, [1] では各座標軸方向の拡大縮小が用いられており, 結果として, [2] と同じやり方で関数の超局所的特異性を見ることが出来る.

定義 2. $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $(x_0, \xi^0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$, $s \geq 0$ とする. f が (x_0, ξ^0) において Hörmander の意味でソボレフ空間 H^s に属するとは, x_0 のある近傍で恒等的に 1 に等しい関数 $\phi \in C_0^\infty$ と ξ^0 のある錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ が存在して

$$\int_{\Gamma(\xi^0)} |(\widehat{\phi f})(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty \quad (2)$$

が成立することである.

3 主定理

以降 $n = 2$ とし, $\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0)$ の両座標とも正であるとする.

定理 3. $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $(x_0, \xi^0) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}_{>0})^2$, $s \geq 0$ とする.

$$\Gamma_\psi = \left\{ \tau = (\tau_1, \tau_2) \in (\mathbb{R}_{>0})^2 \mid \frac{\xi_1^0}{5\xi_2^0} < \frac{\tau_1}{\tau_2} < \frac{5\xi_1^0}{\xi_2^0} \right\} \quad (3)$$

によって定められる ξ^0 の錐近傍 $\Gamma_\psi(\xi^0)$ に対して (2) が成り立つならば, x_0 のある近傍 $U(x_0)$ と ξ^0 のある錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ が存在して (1) が成り立つ. 逆に, x_0 のある近傍 $U(x_0)$ と (3) で定められた錐近傍 $\Gamma_\psi(\xi^0)$ に対して (1) が成り立つならば, x_0 のある近傍で恒等的に 1 に等しい関数 $\phi \in C_0^\infty$ と ξ^0 のある錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ が存在して (2) が成り立つ.

証明の概略. 前半について. まず, $W_\psi f(x, \xi)$ を以下のように二つに分ける.

$$\begin{aligned} W_\psi f(x, \xi) &= \int_{\mathbb{R}^2} (\phi f)(t_1, t_2) |\xi_1 \xi_2| \bar{\psi}(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) dt \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \phi)f(t_1, t_2) |\xi_1 \xi_2| \bar{\psi}(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) dt. \end{aligned}$$

$U_1(x_0)$ を $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x) = 1\}$ に含まれる x_0 の十分小さな近傍であるとする, 1 つ目の式の評価のみを考えればよいことになる. ξ^0 の十分小さな錐近傍 $\Gamma(\xi^0)$ をとることができて, これに対して以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma(\xi^0)} |W_\psi(\phi f)(x, \xi)|^2 (1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^s \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma(\xi^0)} |(\widehat{\phi f})(\tau) \hat{\psi}(\xi_1^{-1} \tau_1, \xi_2^{-1} \tau_2)|^2 (1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^s \frac{d\tau d\xi}{|\xi_1 \xi_2|} \\ &\leq C \int_{\Gamma_\psi(\xi^0)} |(\widehat{\phi f})(\tau)|^2 (1 + |\tau_1|^2 + |\tau_2|^2)^s d\tau < \infty. \end{aligned}$$

後半について. ウェーブレットの逆変換公式を用いて関数 $f(t)$ を 3 つの部分に分けて, 最も重要な部分だけを述べる. $U(x_0)$ にコンパクトサポートを持ち, x_0 のある近傍で恒等的に 1 に等しい関数 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と (3) の錐近傍 $\Gamma_\psi(\xi^0)$ を用いて定義される次の関数

$$f_{\phi, \Gamma_\psi}(t) = C_\psi^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \Gamma_\psi(\xi^0)} \phi(x) W_\psi f(x, \xi) |\xi_1 \xi_2| \psi(\xi_1(t_1 - x_1), \xi_2(t_2 - x_2)) \frac{dx d\xi}{|\xi_1 \xi_2|}$$

がソボレフ空間 H^s に属することを示せば十分である.

参考文献

- [1] J. N. PANDEY AND S. K. UPADHYAY, *The continuous wavelet transform and window functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no. 11, 4759–4773.
- [2] S. MORITOH, *Wavelet transforms in Euclidean spaces —their relation with wave front sets and Besov, Triebel-Lizorkin spaces—*, Tohoku Math. J. (2) **47** (1995), no. 4, 555–565.

伸張因子 4 の帯域制限ウェーブレットの構成法

古野 誠裕

筑波大学大学院数理物質科学研究群

e-mail : s2430046@u.tsukuba.ac.jp

1 はじめに

関数 $\psi^i \in L^2(\mathbb{R})$ ($1 \leq i \leq \ell$) に対し, $\{a^{j/2}\psi^i(a^j t - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ ($a > 1$) が $L^2(\mathbb{R})$ での正規直交基底となるときの, 伸張因子 a のウェーブレット基底と呼ぶ. 伸張因子は $a = 2$ の場合が一般的に考えられているが, それ以外の場合も考えることができる.

伸張因子に関するウェーブレット理論の先行研究として, [1] は多重解像度解析において伸張因子は有理数でなければならないことを示している. また, [2] や [3] では, 伸張因子 4 のウェーブレットの構成法が提案されている.

なお, 本講演の内容は, 筑波大学の木下保先生との共同研究に基づく.

2 伸張因子 4 の多重解像度解析

伸張因子 4 の場合, 多重解像度解析は次のように定義される.

定義 1. 次の条件を満たす $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間の列 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ を伸張因子 4 の多重解像度解析 (MRA(4)) という.

- (1) $V_j \subset V_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$.
- (2) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.
- (3) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
- (4) $f(t) \in V_j \iff f(4t) \in V_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$.
- (5) $\varphi \in V_0$ が存在して, $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が V_0 で正規直交基底になる.

伸張因子 4 の影響は, 条件 (4) のスケールに現れる.

3 伸張因子 2 の帯域制限ウェーブレットの例

伸張因子 2 の帯域制限ウェーブレットの例として, 次のようなものがある ([4], p.381, 例 B を見よ).

非負の整数 $\ell \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$K_\ell^+ = \left[\frac{2^\ell}{2^{\ell+1} - 1} \pi, \pi \right] \cup \left[2^\ell \pi, 2^\ell \pi + \frac{2^\ell}{2^{\ell+1} - 1} \pi \right]$$

かつ, $K_\ell^- = -K_\ell^+$ とおき,

$$K_\ell = K_\ell^+ \cup K_\ell^-$$

とおく. 関数 $\widehat{\psi}^\ell$ を次で定義する.

$$\left| \widehat{\psi}^\ell(\xi) \right| = \mathbb{1}_{K_\ell}(\xi).$$

すると, ψ^ℓ は帯域制限ウェーブレットとなる. さらに, この場合は MSF ウェーブレットと呼ぶ.

$\ell = 0$ のとき, ψ^0 は Shannon ウェーブレットであり, MRA から構成することができる.

$\ell = 1$ のとき, ψ^1 は MRA から構成することができる. 実際, スケーリング関数 φ を

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \mathbb{1}_{[-\frac{4}{3}\pi, -\pi] \cup [-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi] \cup [\pi, \frac{4}{3}\pi]}(\xi)$$

と定めると、周期 2π の関数 m_0 は、次のようになる。

$$m_0(\xi) = \mathbb{1}_{[-\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi]}(\xi).$$

よって、

$$\widehat{\psi^1}(\xi) = \mathbb{1}_{[-\frac{8}{3}\pi, -2\pi] \cup [-\pi, -\frac{2}{3}\pi] \cup [\frac{2}{3}\pi, \pi] \cup [2\pi, \frac{8}{3}\pi]}(\xi)$$

となり、 $\ell = 1$ のときのウェーブレットを構成できる。

$\ell = 2$ のとき、

$$K_2^+ = \left[\frac{4}{7}\pi, \pi \right] \cup \left[4\pi, \frac{32}{7}\pi \right]$$

であるので、

$$K_2 = \left[-\frac{32}{7}\pi, -4\pi \right] \cup \left[-\pi, -\frac{4}{7}\pi \right] \cup \left[\frac{4}{7}\pi, \pi \right] \cup \left[4\pi, \frac{32}{7}\pi \right]$$

となる。よって、

$$|\widehat{\psi^2}(\xi)| = \mathbb{1}_{K_2}(\xi)$$

となるが、 $\ell = 2$ のときは、Journé ウェーブレットといい、MRA から生成されないウェーブレットであることが知られている。

4 本講演の内容

本講演では、帯域制限ウェーブレットに限定し、伸張因子 4 の正規直交基底となるウェーブレットの構成法をいくつか提案する。また、MRA(4) から生成されないウェーブレットの例も紹介する。

謝辞 本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2124 の支援を受けたものである。

参考文献

- [1] P.Auscher, Wavelet bases for $L^2(\mathbb{R})$ with rational dilation factor, Wavelets and their applications, Jones and Bartlett, 439–451, 1992.
- [2] A.Cohen and I.Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets III. Better frequency resolution, *SIAM J.Math.Anal.*, **24**(1993), No.2, 520–527.
- [3] I. ドブシー（著）山田道夫・佐々木文夫（訳），ウェーブレットの 10 講，シュプリンガーフェアクラーク東京, 2003.
- [4] E. ヘルナンデス・G. ワイス（著）芦野隆一・萬代武史・浅川秀一（訳），ウェーブレットの基礎，科学技術出版, 2000.