

一次多項式で表現される保存量をもつ多値セルオートマトン

森澤 亮司¹, 福田 亜希子²

¹ 芝浦工業大学大学院理工学研究科, ² 芝浦工業大学システム理工学部数理科学科
e-mail : mf23117@shibaura-it.ac.jp

1 はじめに

セルオートマトン (CA) が加法的保存量をもつための必要十分条件が導出され, ECA および ERCA の各ルールがもつ保存量の数が列挙されている [1]. さらに, [1] の必要十分条件が任意の q 状態 CA に対して拡張され, 3 値 3 近傍 CA において粒子数 (セルの状態の総和) が保存される 144 個のルールが解析されている [2]. 一方, q 状態 CA の各状態を q 次の標準基底ベクトルで表現するベクトル値 CA (q -VCA) が導入されており, 各状態の総和が独立に保存される完全一次保存と呼ばれる 15 個のルールが得られている [3].

本研究では, q -VCA において保存量密度がベクトル成分の一次多項式で与えられるルールを数え上げる方法を定式化する. さらに, それを 3-VCA と 4-VCA に対して適用し, いくつかの多項式の係数を与え, その保存量をもつルールを数え上げた結果について報告する.

2 ベクトル値セルオートマトン

$\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^\top, \mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]^\top, \mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]^\top$ とする. 3-VCA の局所遷移関数 $h : \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}^3 \rightarrow \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ は以下のように表せる.

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \sum_{j,k,\ell=1}^3 x_j y_k z_\ell h(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell) \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{h(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell) = \mathbf{e}_1} x_j y_k z_\ell \\ \sum_{h(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell) = \mathbf{e}_2} x_j y_k z_\ell \\ \sum_{h(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_\ell) = \mathbf{e}_3} x_j y_k z_\ell \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ただし, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\top, \mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^\top, \mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3]^\top$ である. ここで, $[a_{jkl}, b_{jkl}, c_{jkl}]^\top \in \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ とすると,

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \sum_{j,k,\ell=1}^3 a_{jkl} x_j y_k z_\ell \\ \sum_{j,k,\ell=1}^3 b_{jkl} x_j y_k z_\ell \\ \sum_{j,k,\ell=1}^3 c_{jkl} x_j y_k z_\ell \end{bmatrix}$$

と書ける. 周期を L とする周期境界条件を課し, 時刻 t におけるセル $i \in \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ の状態ベクトルを $\mathbf{x}_i^t = [[\mathbf{x}_i^t]_1, [\mathbf{x}_i^t]_2, [\mathbf{x}_i^t]_3]^\top$ で表す. [3] では, 各状態ベクトルの第 k 成分の総和 $\sum_{i=1}^L [\mathbf{x}_i^t]_k, k = 1, 2, 3$ を保存するルールの総数が求められている. これを第 k 成分保存という.

3 ベクトル成分の多項式で表現される保存量

粒子数保存や成分保存を含む一般化として、保存量が q -VCA のベクトル成分の一次多項式で与えられる場合について考える。 Φ^t を

$$\Phi^t = \sum_{i=1}^L (h_1[\mathbf{x}_i^t]_1 + h_2[\mathbf{x}_i^t]_2 + \cdots + h_q[\mathbf{x}_i^t]_q), \quad h_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, \dots, q$$

と定義し、 $\Phi^{t+1} = \Phi^t$ を満たすルールについて考える。 3-VCA において、 Φ^t は

$$\begin{aligned} h_1 \sum_{i=1}^L [\mathbf{x}_i^t]_1 + h_2 \sum_{i=1}^L [\mathbf{x}_i^t]_2 + h_3 \sum_{i=1}^L [\mathbf{x}_i^t]_3 &= h_1 \sum_{i=1}^L [\mathbf{x}_i^{t+1}]_1 + h_2 \sum_{i=1}^L [\mathbf{x}_i^{t+1}]_2 + h_3 \sum_{i=1}^L [\mathbf{x}_i^{t+1}]_3 \\ &= \sum_{i=1}^L \sum_{j,k,\ell=1}^3 m_{j k \ell} [\mathbf{x}_{i-1}^t]_j [\mathbf{x}_i^t]_k [\mathbf{x}_{i+1}^t]_\ell \end{aligned} \quad (1)$$

と書ける。ただし、

$$m_{j k \ell} = h_1 a_{j k \ell} + h_2 b_{j k \ell} + h_3 c_{j k \ell}, \quad j, k, \ell \in \{1, 2, 3\} \quad (2)$$

である。 (1) において、周期境界条件を考慮して導かれる恒等式を解くことで、 $m_{111}, m_{112}, \dots, m_{333}$ の値が得られる。得られた $m_{j k \ell}$ に対して、 (2) の 27 本の方程式を独立に解き、その解の組み合わせを考えることで、上記の保存量をもつルールが導出できる。 $q \geq 4$ に対する q -VCA の場合でも同様の方法で求めることができる。

3-VCA に対して、 $(h_1, h_2, h_3) = (0, 1, 2)$ に対応する保存量をもつルールは 144 個得られた。 3-VCA は状態がスカラーである 3 値 3 近傍 CA と数学的に等価なので、粒子数が保存するルールの数 [2] と一致している。また、 $(h_1, h_2, h_3) = (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$ に対応する保存量をもつルールは 9×2^{18} 個得られ、第 k 成分保存するルールの数 [3] と等しい。また、 $(h_1, h_2, h_3) = (0, 1, 3)$ に対応する保存量をもつルールは 15 個得られ、これは完全一次保存するルールの数と一致している。

4-VCA に対しても同様に保存量をもつルールを求めた。 $(h_1, h_2, h_3, h_4) = (0, 1, 2, 3)$ に対応する保存量をもつルールは 89588 個得られ、これは 4 値 3 近傍 CA における粒子数が保存するルール数を意味する。さらに、 $(h_1, h_2, h_3, h_4) = (0, 1, 2, 4)$ の場合には 887 個、 $(h_1, h_2, h_3, h_4) = (0, 1, 3, 4)$ の場合には 1369 個のルールが得られた。

参考文献

- [1] T. Hattori, S. Takesue, Additive conserved quantities in discrete-time lattice dynamical systems, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **49** (1991), 295–322.
- [2] N. Boccara, H. Fuk s, Number-conserving cellular automaton rules, *Fundamenta Informaticae*, **52** (2002), 1–13.
- [3] Y. Nishida, S. Watanabe, A. Fukuda, Y. Watanabe, q -VFCA: q -state vector-valued fuzzy cellular automata, *Journal of Cellular Automata*, **15** (2023), 207–222.

基本図を厳密に導出可能なセルオートマトンのクラスについて

小林 克樹¹

¹ 京都大学大学院 情報学研究科

e-mail : kobayashi.katsuki.8c@kyoto-u.ac.jp

1 概要

セルオートマトン (CA) とは時間・空間ともに離散的で、空間の各点が有限個の状態のみを取りうる力学系のことをさす。CA は様々な現象のモデリングに利用されており、特に渋滞現象を CA モデルを使って理解しようとする試みがこれまでに多くなされている [1]。その際に重要なのは基本図と呼ばれる図である。基本図とは粒子の密度と平均流量の関係をグラフにしたものであり、これを用いることでモデルがどのような渋滞状態を持つのかを簡便に確認できる。基本図は数値実験によって求められるだけでなく、様々なモデルに対して厳密な解析がなされている [2, 3]。本講演では、基本図が厳密に導出できる CA のクラスを与える。その際に CA の流れ関数の持つ性質に着目する。

2 粒子保存的 CA とその流れ

$A = \{0, 1\}$ とする。 L を正の整数とし、 A^L を長さ L の 01 列全体の集合とする。 $x \in A^L$ を $x = (x_i)_{i=0}^{L-1}$, $x_i \in A$ と表す。また任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $x_{i+L} = x_i$ と定める。

定義 1. M を正の整数とする。写像 $T: A^L \rightarrow A^L$ が、ある関数 $J: A^M \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ およびある整数 $0 \leq l \leq L-1$ を用いて

$$T(x)_i = x_i + J(x_{i-l}, x_{i-l+1}, \dots, x_{i-l+M-1}) - J(x_{i-l+1}, x_{i-l+2}, \dots, x_{i-l+M}) \quad (1)$$

と書けるとき、 T を粒子保存的セルオートマトンという。また J を CA T の流れ関数と呼ぶ。

この名称は (1) から $\sum_{i=0}^{L-1} T(x)_i = \sum_{i=0}^{L-1} x_i$ が成り立つことに由来する (1 を粒子, 0 を開いた空間とみなす)。より一般の CA と粒子保存的 CA の関係については [4] を見よ。 $x \in A^L$ に対してその密度を $\rho(x) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} x_i$ と定める。また平均流量 $J_{\text{ave}}(x)$ を $J_{\text{ave}}(x) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} J(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+M-1})$ と定める。ある初期列 $x^{(0)} \in A^L$ を与えたとき、その時間発展を $x^{(t+1)} = T(x^{(t)})$ により定める。平均流量の長時間平均を $\bar{J}(x^{(0)}) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} J_{\text{ave}}(x^{(t)})$ で定める。 A^L は有限集合であるので $x^{(t+1)} = T(x^{(t)})$ は最終的に周期軌道に落ち込む。したがってこの極限は任意の $x \in A^L$ に対して存在する。

3 流れ関数の性質と CA の基本図

以下、(1) において $l = M$ とした次の形のセルオートマトンを考える：

$$T(x)_i = x_i + J(x_{i-M}, x_{i-M+1}, \dots, x_{i-1}) - J(x_{i-M+1}, x_{i-M+2}, \dots, x_i). \quad (2)$$

式 (2) で定義される CA はシフト写像 $\sigma: A^L \rightarrow A^L$, $\sigma(x)_i = x_{i+1}$ あるいはその逆写像を適当な個数合成することで (1) の形の CA に変換できることに注意する。さらに流れ関数 $J: A^M \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対する次の条件を考える：

$$\text{関数 } J(a_1, a_2, \dots, a_M) \text{ は和 } \sum_{i=1}^M a_i \text{ のみに依存する。} \quad (3)$$

関数 J が条件 (3) を満たすとき, J の引数の和が i である場合の J の値を J_i , $i = 0, 1, \dots, M$ と表す. また J に定数を加えても (2) は変化しないので, 以下 $J_0 = 0$ とする. J が CA を定義すること (すなわち (2) が A^L で閉じること) と, J が $0 \leq J_{i+1} - J_i \leq 1$, $i = 0, 1, \dots, M-1$ を満たすことは同値であることが示せる. このとき, 次が成立することが分かった.

定理 2. ある整数 k が存在して $L = Mk$ であるとする. このとき条件 (3) を満たす流れ関数 J と (2) により定義される CA について, 平均流量の長時間平均 \bar{J} は密度の一価関数

$$\bar{J}(\rho) = J_{\lfloor M\rho \rfloor} + (J_{\lfloor M\rho \rfloor + 1} - J_{\lfloor M\rho \rfloor})(M\rho - \lfloor M\rho \rfloor), \quad (4)$$

となる. ただし $J_{M+1} = J_M$ とする.

例として $M = 3$ で (3) を満たす全ての CA の基本図を挙げる. $L = 12$ とし, A^{12} のすべての元に対して密度と平均流量を計算しプロットした. 横軸は密度 ρ , 縦軸は平均流量の長時間平均 \bar{J} を表す.

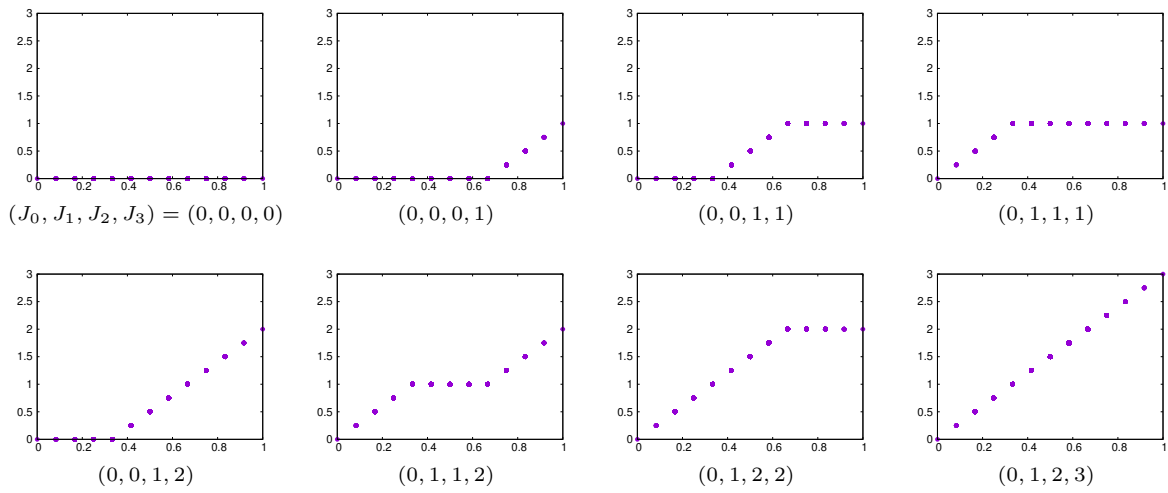


図 1: $M = 3$ の場合の基本図

講演では流れ関数 J に (3) 以外の条件を課して得られる CA の基本図についても述べる.

謝辞 本研究の一部は京都大学とトヨタ自動車の共同研究プロジェクト「モビリティ基盤数理の研究」の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] K. Nagel and M. Schreckenberg, *A cellular automaton model for freeway traffic*, J. Phys. I. France, **2**, (1992), 2221–2229.
- [2] D. Takahashi, J. Matsukidaira, H. Hara and B. Feng, *Max-plus analysis on some binary particle systems*, J. Phys. A: Math. Theor., **44**, (2011), 134102.
- [3] K. Endo and D. Takahashi, *Three-dimensional fundamental diagram of particle system of 5 neighbors with two conserved densities*, JSIAM Letters, **14**, (2022), 80–83.
- [4] T. Hattori and S. Takesue, *Additive conserved quantities in discrete-time lattice dynamical systems*, Physica D, **49**, (1991), 295–322.

中心差分に基づく符号付き超離散非線形バネ方程式の解析

鈴木 清一郎¹, 磯島 伸²

¹ 法政大学 研究補助者, ² 法政大学 理工学部 経営システム工学科 教授

e-mail : ¹seiichiro.suzuki.38@hosei.ac.jp, ²isojima@hosei.ac.jp

1 概要

符号付き超離散系に対して, その解の時間発展を相平面上の領域から領域への対応として再理解(「粗視化」)し, 分岐付きの状態遷移図にまとめる手法が提案されている. この手法により, 解の周期的構造や分岐構造の可視化などが可能になる.

硬性バネ方程式については, 可積分な差分化を元に符号付き超離散化類似を構成し, 粗視化解析を行った結果が発表されている [1]. 今回は単純な中心差分を用いた差分化を元に解析 [2] し, 可積分な場合との差異を議論する.

2 符号付き超離散化

以下の変換を超離散化という.

$$x_n = e^{\frac{X_n}{\varepsilon}}, \varepsilon > 0 \quad (1)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \left(e^{\frac{A}{\varepsilon}} + e^{\frac{B}{\varepsilon}} \right) = \max(A, B) \quad (2)$$

符号付き超離散化では以下の変換を行う.

$$\xi_n := \frac{x_n}{|x_n|}, e^{\frac{X_n}{\varepsilon}} := |x_n|, x_n = \xi_n e^{\frac{X_n}{\varepsilon}}, \varepsilon > 0 \quad (3)$$

この変換により差は項を移項した形に, 積は和に, 商は差に, 和は \max 演算に置き換えられる. ここで, X_n を振幅と呼ぶ.

3 硬性バネの符号付き超離散化

硬性バネ方程式は $k > 0, l > 0$ を定数として (4) で与えられる.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + kx + lx^3 = 0, x = x(t) \quad (4)$$

中心差分を採用し

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{x(t + \frac{\delta}{2}) - x(t - \frac{\delta}{2})}{\delta} \quad (5)$$

とする. ただし, $\delta > 0$ は時間差分間隔である. $t = n\delta, x(t) = x_n$ とし (4) を差分化した式

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} + \delta^2 k x_n + \delta^2 l x_n^3 = 0 \quad (6)$$

を, (3) と以下に定義した変数変換を使い符号付き超離散化をする.

$$e^{\frac{A}{\varepsilon}} := \delta, e^{\frac{K}{\varepsilon}} := k, e^{\frac{L}{\varepsilon}} := l, \hat{k} := K + 2\Delta, \hat{l} := L + 2\Delta, \quad (7)$$

負の項を移項して極限をとり, X_{n+1} を X_+ , X_n を X , X_{n-1} を X_- と置く. 方程式は, 符号 $\xi_{n+1}, \xi_n, \xi_{n-1}$ の組み合わせにより 4 通りの場合分けになる. 以下の 4 つの変数

$$os = \max[X_-, \hat{k} + X, \hat{l} + 3X], ss = X, os' = \max[\hat{k} + X, \hat{l} + 3X], ss' = \max[X, X_-] \quad (8)$$

を定義すると, 4 通りの場合分けは以下のように表せる.

$$\begin{aligned} \xi_{n-1} = \xi_n = \xi_{n+1} : \max[X_+, os] = \max[ss], \quad \xi_{n-1} = \xi_n = -\xi_{n+1} : \max[os] = \max[X_+, ss] \\ -\xi_{n-1} = \xi_n = \xi_{n+1} : \max[X_+, os'] = \max[ss'], \quad \xi_{n-1} = -\xi_n = \xi_{n+1} : \max[os'] = \max[X_+, ss'] \end{aligned}$$

上の 4 つの式は $os^{(l)} \neq ss^{(l)}$ のとき $X_+ = \max[os^{(l)}, ss^{(l)}]$ と X_+ は一意に決まるが, $os^{(l)} = ss^{(l)}$ のとき $X_+ < \max[os^{(l)}, ss^{(l)}]$ と X_+ は不定になる. また, $os^{(l)} > ss^{(l)}$ の場合, 符号 ξ_{n+1} は ξ_n と異符号 ($\xi_{n+1} = -\xi_n$) となり, $os^{(l)} < ss^{(l)}$ の場合は同符号 ($\xi_{n+1} = \xi_n$) となる.

4 相平面での遷移の粗視化

相平面での解析を行う上で, 振幅の相平面 (X, X_-) を図 1(a) のような領域 ($S1$ など), 半直線 ($L1$ など) 及び点 ($P1$) に分ける. ここで, 集合 A 内の要素が集合 B 内に遷移することを, 集合 A から集合 B への遷移とみなし, これを粗視化という. 先程の領域分けと符号 (ξ_n, ξ_{n-1}) の情報とを照らし合わせて書いた遷移図が図 1(b), (c) である.

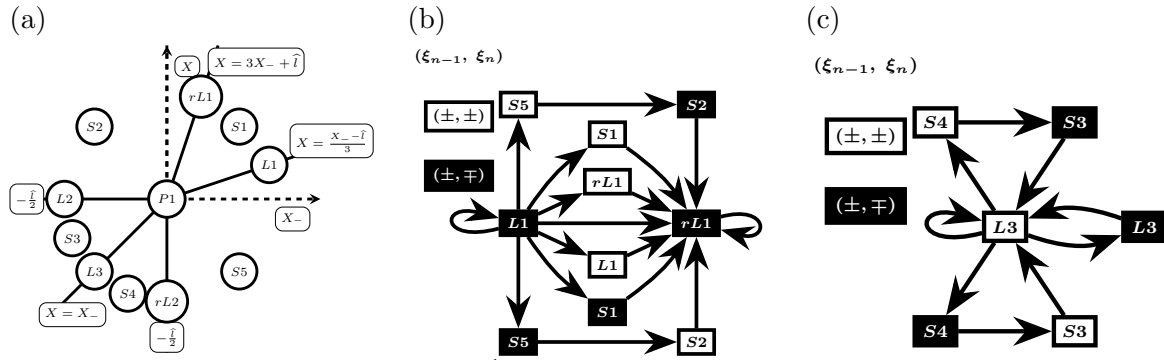


図 1. $\hat{k} < 0$ の領域分けと遷移図

5 まとめ

超離散系の相平面解析と粗視化の考え方で, $\hat{k} < 0$ の場合の解の挙動を遷移図にまとめ, 把握できた. 遷移図は 3 種に分類され, 各ノードは 3 つの遷移図のどこかに 1 回だけ現れる. 相平面上の多くの点は, 遷移の繰り返しにより, 遷移図上の「 $rL1$ 上のループ」に収束するが, 実際は直線上を発散していく解である. すなわち, ループでも定数解ではなく, 粗視化のため詳細情報が失われているという課題点が明らかになった. 可積分性を保つ差分方程式を元にしていないため, 超離散系でも解が発散することを予想していたが, これに反して発散せず周期的な挙動を示す遷移も存在することがわかった. 差分方程式での数値実験でも, 初期値によっては解が発散せず周期解となりそうな例を確認している. このように可積分系と非可積分系の差異が観察できたことから, (符号付き) 超離散化を, 差分スキームの良し悪しを判断するフィルタとして活用できる可能性があるのではないかと.

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP22K03407 の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] Shin Isojima, Seiichiro Suzuki, Ultradiscrete hard-spring equation and its phase plane analysis, JJIAM, 40 (2023), 1083–1105.
- [2] Shin Isojima, Seiichiro Suzuki, in preparation.

同期現象を示すセルオートマトンの拡張系について

延東 和茂¹

¹ 近畿大学理工学部理学科数学コース

e-mail : k-endo@math.kindai.ac.jp

1 背景

特定のエレメンタリーセルオートマトン (ECA) は, 周期境界条件において空間周期長が 2 のべき乗である場合, 任意の初期値から一様解に到達することが知られている (図 1). 蜷川らはこの現象をセルオートマトンにおける同期現象と呼び, 特性多項式を用いた手法によって同期現象の証明を行った. さらに, $2r + 1$ 近傍に拡張された系についても同様の証明を与えた [1, 2].

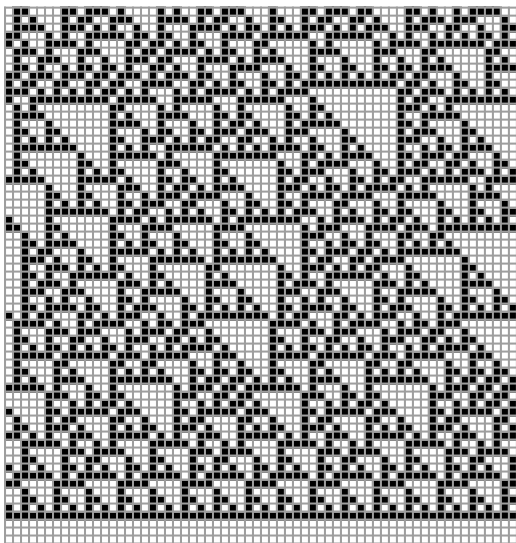


図 1. 空間サイト数 64 での ECA60 の時間発展例.
横方向右向きに空間サイト j , 縦方向下向きに時刻 n .

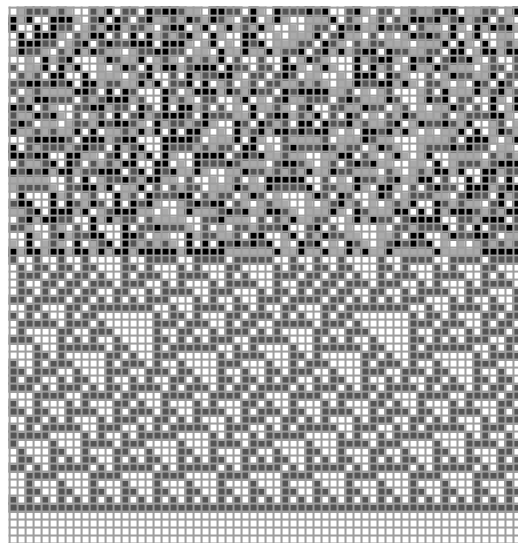


図 2. 8 値拡張系の空間サイト数 64 での時間発展例のうち,
 $62 \leq n \leq 130$ までの部分.

たとえば, ECA60 は

$$u_j^{n+1} = u_j^n + u_{j-1}^n \pmod{2}$$

という漸化式で表現される (u_j^n は時刻 n における j 番目のサイトの状態変数で, $u_j^n \in \{0, 1\}$). この漸化式を繰り返し適用すると,

$$\begin{aligned} u_j^n &= u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1} \pmod{2} \\ &= u_j^{n-2} + 2u_{j-1}^{n-2} + u_{j-2}^{n-2} \pmod{2} \\ &= \cdots = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_{j-k}^0 \pmod{2} \end{aligned}$$

となり, $n = 2^m - 1$ とすると (m は非負整数), $u_j^{2^m-1} = \sum_{k=0}^{2^m-1} \binom{2^m-1}{k} u_{j-k}^0 \pmod{2}$ となる. こ

こで, $\binom{2^m-1}{k}$ は全ての k ($0 \leq k \leq 2^m - 1$) に対して奇数になるという二項係数の性質 [3] より,

上式は

$$u_j^{2^m-1} = \sum_{k=0}^{2^m-1} u_{j-k}^0 \pmod{2}$$

となる。もし空間周期長が 2^m となるように周期境界条件を設定すると、右辺は初期条件における 1 周期分全ての状態変数の総和となるので、時刻 $2^m - 1$ の状態はサイト番号 j によらず一様になる。このことから、もし初期値の総和が偶数であれば時刻 $2^m - 1$ において、奇数であれば時刻 2^m において同期現象が起こることが示された。

2 拡張系

上述の ECA60 を 2^n 値に拡張した多値拡張系

$$u_j^{n+1} = u_j^n + u_{j-1}^n \pmod{2^n} \quad (u_j^n \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\})$$

は同期現象を示すと予想される (図 2)。さらに、2 次元拡張系

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n \pmod{4} \quad (u_{i,j}^n \in \{0, 1, 2, 3\})$$

なども同様に同期現象を示すことが分かった (図 3)。本講演ではこれらをはじめとした、同期現象を示す種々の拡張系について、その性質の議論と考察を行う。

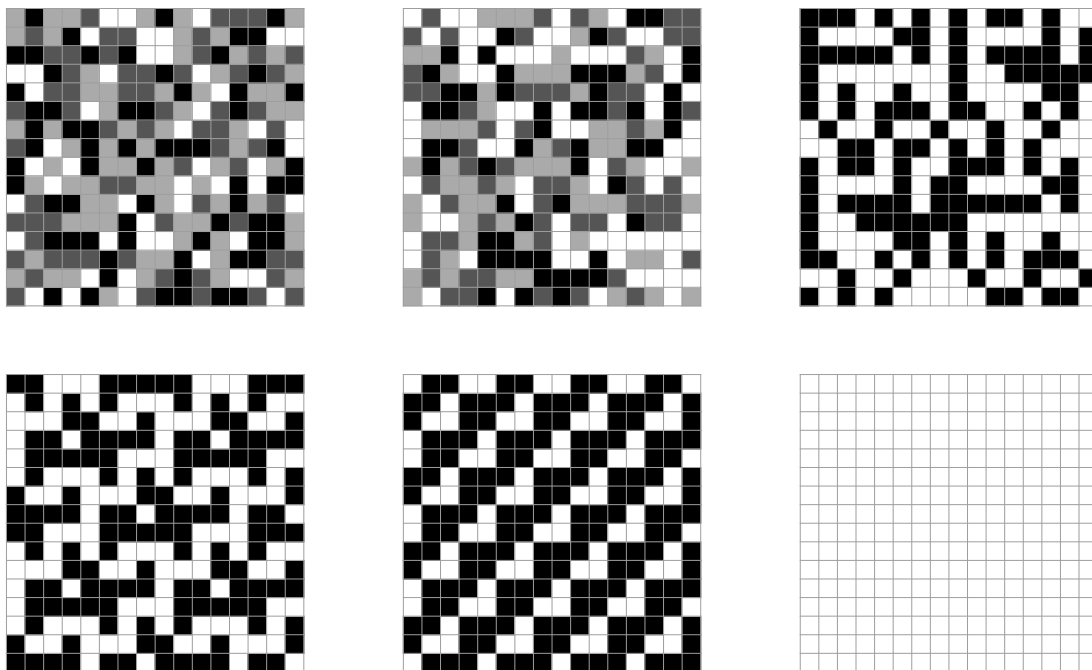


図 3. 2 次元拡張系の時間発展例。上段左から時刻 $n = 1, 4, 8$ ，下段左から時刻 $n = 12, 14, 16$ 。

参考文献

- [1] 蜷川繁, 1 次元セルオートマトンにおける同期現象について, 信学技報 COMP, 50 (2007), 17–21.
- [2] 蜷川繁, 米田政明, 広瀬貞樹, 散逸境界条件下でのセルオートマトンについて, 情処学論, 38(1997), 927–930.
- [3] 成嶋弘, 数え上げ組合せ論入門, 日本評論社, 1996.