

# 波動方程式の逆散乱による超音波物質同定問題の基礎研究

森岡 悠<sup>1</sup>, Steeve Gréaux<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 愛媛大学理工学研究科, <sup>2</sup> 愛媛大学地球深部ダイナミクス研究センター  
e-mail : morioka@cs.ehime-u.ac.jp

## 1 概要

鉱物や岩石の物質特性として、弾性波の伝播速度がある。これは、波動方程式  $\partial_t^2 w(t, x) = c(x)^2 \partial_x^2 w(t, x)$  の係数  $c(x)$  として現れる。物理学的な実験において、超音波を用いた非破壊検査により、標本物質の弾性波伝播速度を決定する手法がしばしば用いられる。この際、バッファロッドに標本を固定するため、接合材層が挟みこまれることになる。実験系のスケールでは、反射波の中に含まれる接合材層による擾乱の影響を無視できない。そのため、bond correction method と呼ばれる補正法が用いられてきた ([1] 等)。実験的には、地球物理学の領域で必要となる深々度超高压環境下での補正に再評価の動きがある ([2]) など、現在でも検討が続いている問題である。数学的には、この補正法の定式化について再検討の余地がある。実験物理学の先行研究では、基本的に平面波を想定したモデルにより定式化されている。一方、実験としてはパルス状の波を transducer から射出し、反射波を同じ位置で計測し、その伝播時間のデータと標本長を用いて弾性波伝播速度を逆推定している。そのため、本来なら波動方程式を用いて反射波の時系列的な解析をするべきであるが、従来そのような詳細な解析は行われていないようである。そこで、本研究では、波動方程式の理論的解析に基づいて、パルス状の入射波に対し bond correction method の再評価を数物協働して行う。本講演は、本研究の初動における考察を報告するものである。

## 2 波動方程式による定式化とインパルス応答

本講演では、バッファロッド、接合材層、標本層の3層からなる多層系の波動方程式による定式化を試みる。  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3$  を固定する。  $I = (0, x_3) = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \{x_1, x_2\}$ ,  $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ , とする。  $I_1$  はバッファロッド,  $I_2$  は接合材層,  $I_3$  は標本層に相当する。  $l_0 = x_1$ ,  $l_b = x_2 - x_1$ ,  $l_s = x_3 - x_2$  に対し,  $l_b \ll l_s \ll l_0$  を仮定する。各層の弾性波伝播速度を  $c_j > 0$  とし,  $x \in I_j$  のとき  $c(x) = c_j$  とおくことにより正值区分的定数関数  $c(x)$  を定める。各  $\overline{I_j}$  上の2点  $a, b$  に対し, 距離  $d(a, b) \geq 0$  を

$$d(a, b) = \int_a^b c(x)^{-1} dx = c_j^{-1} |a - b|$$

により定義する。ここで、波動方程式に対するインパルス応答  $G(t, t', x)$  を

$$\begin{aligned} \partial_t^2 G(t, t', x) &= c(x)^2 \partial_x^2 G(t, t', x), \quad t > 0, \quad x \in \cup_{j=1}^3 I_j, \\ G(0, t', x) &= \partial_t G(0, t', x) = 0, \quad x \in I, \\ G(t, t', 0) &= \delta(t - t'), \quad \partial_x G(t, t', x_3) = 0, \quad t \geq 0, \\ G(t, t', \cdot) &\in H^{-1}(I), \quad t > 0, \end{aligned}$$

の解として定める。このような解を用いた逆問題は、[3], [4] 等で既に用いられている。今の場合、区分的定係数を考えているので、 $\delta$ -関数の特異性がそのまま伝播し、その伝播速度は係数  $c_j$  で決定される。層状媒質の境界に当たると、特異性を保ったまま反射-透過を生じる。実際、特異性の伝播は境界

での透過-反射ルールだけを考えれば良いことが示される．係数  $c_j$  の層から  $c_k$  の層に向かって入射するとき，その反射係数  $\rho_{jk}$  と透過係数  $\tau_{jk}$  は

$$\rho_{jk} = \frac{c_k - c_j}{c_k + c_j}, \quad \tau_{jk} = \frac{2c_k}{c_k + c_j},$$

で与えられる．この透過-反射ルールにより，反射第 1 波の強度は  $\rho_{12} = (c_2 - c_1)/(c_2 + c_1)$ ，反射第 2 波の強度は  $\tau_{12}\tau_{23}\tau_{32}\tau_{21}$ ，さらに，接合材層で乱反射して生じる反射波は  $n = 1, 2, \dots$ ，に対し  $\tau_{12}\rho_{23}^{n-1}\rho_{21}^{n-1}\tau_{21}$  を満たすことが示される (図 1)．

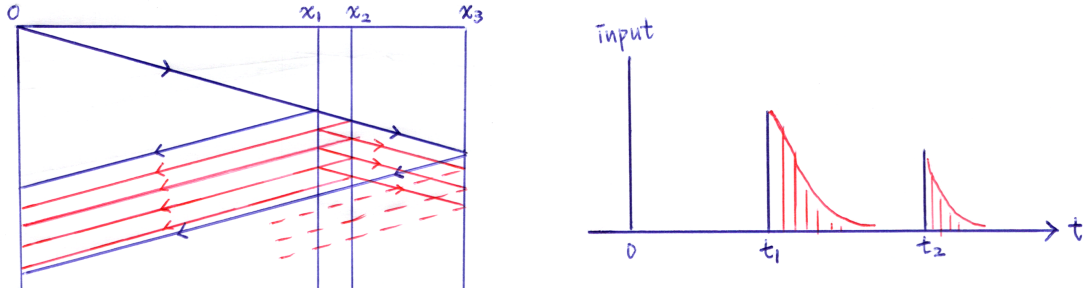


図 1. 接合材層があることにより，理想的な 2 層系とは異なり，乱反射によって擾乱される反射波が観測される．ただし，擾乱された反射波は，時系列と共に急減衰するので，標本層の情報を持つ観測波として取り出すべき波は，第 1 および第 2 のピークとして識別される．よって，弾性波の伝播時間が観測から得られる．

以上のことから，観測により

$$m := t_2 - t_1 = 2(d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)) = 2 \left( \frac{|x_1 - x_2|}{c_2} + \frac{|x_2 - x_3|}{c_3} \right)$$

また実験諸元として  $c_1, c_2, |x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|$  を得たとき，標本の弾性波伝播速度は

$$c_3 = |x_2 - x_3| \left( \frac{m}{2} - \frac{|x_1 - x_2|}{c_2} \right)^{-1}$$

によって再構成される．

今後，このような考察が妥当であるかどうか，実データと照らし合わせて再検討を重ねる予定である．

## 参考文献

- [1] H. A. Spetzler, G. Chen, S. Whitehead and I. C. Getting, *A new ultrasonic interferometer for the determination of equation of state parameters of sub-millimeter single crystals*, PAGEOPH, **141** (1993), 341-377.
- [2] M. Noda, T. Inoue, T. Tsuchiya and Y. Higo, *Reassessment of a bond correction method for in situ ultrasonic interferometry on elastic wave velocity measurement under high pressure and high temperature*, High Pressure Research, **42** (2022), 278-293.
- [3] M. I. Belishev, *Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method*, Inverse Problems, **20** (2004), 1-27.
- [4] S. Avdonin and P. Kurasov, *Inverse problems for quantum tree*, Inverse Probl. Imaging, **2** (2008), 1-21.

## 境界積分によるドップラートモグラフィの数値計算

藤原宏志<sup>1</sup>, David Omogbhe<sup>2</sup>, Kamran Sadiq<sup>3</sup>, Alexandru Tamasan<sup>4</sup>

<sup>1</sup> 京都大学, <sup>2</sup>University of Vienna, <sup>3</sup>RICAM, <sup>4</sup>University of Central Florida

e-mail : fujiwara@acs.i.kyoto-u.ac.jp

### 1 Introduction

Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  be a two dimensional bounded convex domain with smooth boundary, and  $F \in H_0^s(\Omega)$  be a vector field. For  $F$  extended by zero outside  $\Omega$ ,

$$I^k F(x, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \theta \cdot F(\Pi_\theta(x) + t\theta) dt, \quad x \in \mathbb{R}^2, \theta \in S^1 = \{\xi \in \mathbb{R}^2; |\xi| = 1\},$$

is called the  $k$ -th moment Doppler transform of  $f$  where  $\Pi_\theta(x) = x - (x \cdot \theta)\theta$  is the projection of  $x$  to  $\theta^\perp$ . We consider the reconstruction of the vector field  $F$  in  $\Omega$  from the measurement of  $I^0 F$  and  $I^1 F$  on  $\Gamma_+$  appeared in geophysics [1] and medical imaging [2], where  $\Gamma_\pm = \{(x, \theta) \in \partial\Omega \times S^1; \pm n(x) \cdot \theta > 0\}$  with the outward unit normal vector  $n(x)$  at  $x \in \partial\Omega$  to  $\Omega$ .

A reconstruction procedure for the solenoidal part of  $F$  from  $I^0 F$  has been given in [1]. It has been also discussed that the irrotational part of  $F$  cannot be reconstructed from  $I^0 F$ . Subsequently, the method based on the conventional inverse Radon transform has been studied [2, 3].

### 2 Reconstruction Procedure and Numerical Results

In this talk we consider the reconstruction by an inverse source problem of the following system [4]:

$$\begin{aligned} \theta \cdot \nabla_x u(x, \theta) &= \theta \cdot F(x), & \text{in } \Omega \times S^1, & \quad \theta \cdot \nabla_x v(x, \theta) = u(x, \theta), & \text{in } \Omega \times S^1, \\ u(x, \theta) &= 0, & \text{on } \Gamma_-, & \quad v(x, \theta) = 0, & \text{on } \Gamma_-, \end{aligned}$$

with  $\nabla_x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$ . The unique existence of the solution  $u$  and  $v \in H^s(\Omega \times S^1)$  is known, and it holds that for  $(x, \theta) \in \Gamma_+$ ,

$$\begin{aligned} u(x, \theta) &= I^0 F(x, \theta), & \text{on } \Gamma_+, \\ v(x, \theta) &= (x \cdot \theta) I^0 F(x, \theta) - I^1 F(x, \theta), & \text{on } \Gamma_+. \end{aligned}$$

By identifying  $\theta \in S^1$  with  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi$  by the standard polar coordinate,  $u$  and  $v$  have the Fourier series

$$u(x, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} u_m(x) e^{im\theta} \quad \text{and} \quad v(x, \theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m(x) e^{im\theta}, \quad \text{for } x \in \bar{\Omega}.$$

Furthermore, by equating  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  with  $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ ,  $A$ -analytic theory [5] leads, for  $m = -2, -4, -6, \dots$ ,

$$u_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{u_m(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial\Omega} u_{m-2j}(\zeta) \left( \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\zeta - z} \right)^j \left\{ \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right\}, \quad z \in \Omega.$$

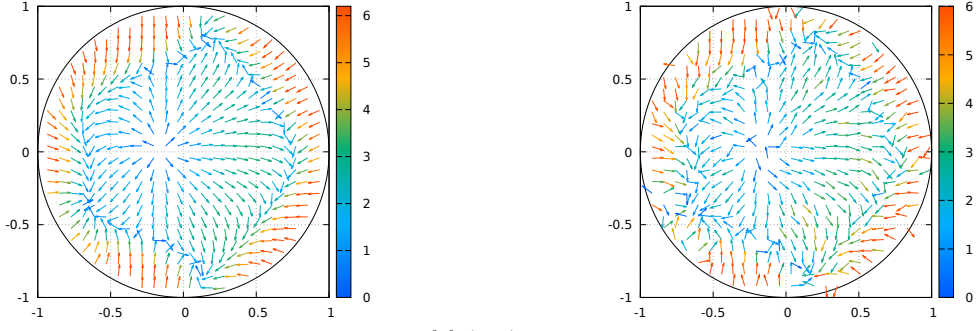


図 1. Numerical experiments; exact vector field [3] (left) and numerically reconstructed vector field from measurement data with 5% noise (right)

In addition, it holds that

$$v_{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{v_{-1}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial\Omega} v_{-1-2j}(\zeta) \left( \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{\zeta - z} \right)^j \left\{ \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right\} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\Omega} \frac{u_{-2-2j}(\xi + i\eta)}{\xi + i\eta - z} \left( \frac{\xi - i\eta - \bar{z}}{\xi + i\eta - z} \right)^j d\xi d\eta, \quad z \in \Omega.$$

Finally  $u_0 = 2\operatorname{Re}(\partial v_{-1})$  and  $f = 2(\bar{\partial}u_0 + \partial u_{-2})$  give  $F = (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$ , where  $\bar{\partial} = (\partial_{x_1} + i\partial_{x_2})/2$  is the Cauchy-Riemann operator.

Figure 1 shows numerical reconstruction by the proposed method from measurement data with approximately 5% noise.

**謝辞** The first author was supported in part JSPS KAKENHI Grant Numbers JP22K18674 and JP24K00539. The second author was supported in part by Austrian Science Fund (FWF) Project 10.55776/P31053 and FWF SFB 10.55776/F68 ‘Tomography Across the Scales’ Project F6801-N36. The third author was supported in part by FWF Project 10.55776/P31053. The forth author was supported in part by NSF DMS-1907097.

## 参考文献

- [1] S. J. Norton, Tomographic reconstruction of 2-D vector fields: application to flow imaging, *Geophys. J.*, 97 (1988), 161–168.
- [2] T. Schuster, 20 years of imaging in vector field tomography: a review, in *Mathematical Methods in Biomedical Imaging and Intensity-Modulated Radiation Therapy (IMRT)*, (Ed. Y. Censor et. al.) CRM Series, Vol. 7, Birkhäuser, 2008, 389–424.
- [3] S. G. Kazantsev and A. A. Bukhgeim, Inversion of the scalar and vector attenuated X-ray transform in a unit disc, *J. Inverse Ill-posed Probl.*, 15 (2007), 735–765.
- [4] H. Fujiwara, D. Omogbhe, K. Sadiq, and A. Tamasan, Inversion of the attenuated momenta ray transform of planar symmetric tensors, *Inverse Problems*, 40 (2024), 075004.
- [5] A. L. Bukhgeim, Inversion formulas in inverse problems, in *Linear operators and ill-posed problems* (Ed. M. M. Lavrentiev and L. Y. Savalev), Pleum, 1995.

## 再生核を用いた脳磁場補外法

奈良 高明, 大澤 悠一

東京大学大学院情報理工学系研究科

e-mail : takaakinara@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

### 1 はじめに

人間の頭部外部において磁場を計測し、脳内の神経活動源を推定する逆問題を脳磁場逆問題という。時間分解能の高い脳機能解析法として、また、異常電流源であるてんかん焦点の同定のために用いられる。電流源のモデルとして、局所的な電流源を複数個の等価電流双極子として表すモデルと、皮質上に設定したメッシュの全節点上に電流双極子を配置するモデルがある。てんかん焦点同定において臨床で通常用いられるのは前者であるが、双極子個数を推定するのは悪条件性の高い逆問題となる。その原因は、脳磁場を計測するセンサが頭部表面から数 cm 離れてしか設置できず、空間高周波成分が減衰することにある。本講演では観測データから再生核を用いて頭部表面の脳磁場を補外する手法を導出し、双極子個数推定に資することを示す。

### 2 理論

図 1 (a) のように、頭部を表す領域  $\Omega$  内にのみ電流源があるとき、頭外  $\Omega_c = \mathbb{R}/\Omega$  の位置  $\mathbf{r}_i (i = 1, \dots, N)$  において計測した  $\mathbf{n}_i$  方向の磁場成分  $B_i^{data}$  から、頭部表面に近い仮想センサ位置における磁場を補外する問題を考える。 $\Omega_c$  において Maxwell の方程式を満たすベクトル場全体の空間

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{B} \mid \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0\}$$

を考え、この空間において

$$J[\mathbf{B}] := \sum_{i=1}^N |B_i^{data} - \mathbf{B}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_i|^2 + \lambda \|\mathbf{B}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (1)$$

を最小化する。磁場のノルムのとり方に自由度があるが、ここでは  $\Omega$  を含半径  $r_0$  の球  $B$  をとり、 $S = \partial B$  とし、すべてのセンサは  $B$  の外側にあるとして、

$$\|\mathbf{B}\|_{\mathcal{H}}^2 := \int_S |\Delta_{\theta, \phi} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\nu}|^2 dS$$

と定義する。ここで、 $\boldsymbol{\nu}$  は  $S$  上の外向き単位法線ベクトル、 $\Delta_{\theta, \phi}$  は球面ラプラシアンである。このとき、リプリゼンター定理より、 $B$  の外側における任意位置  $\mathbf{r}$ 、任意方向  $\mathbf{n}$  の磁場成分は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \sum_{i=1}^N \alpha_i K(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \mathbf{r}_i, \mathbf{n}_i) \quad (2)$$

と書ける [1]。ただし、 $K$  は再生核であり、

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \mathbf{r}', \mathbf{n}') = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{r_0^4 (2l+1)}{4\pi l^2 (l+1)^4} (\mathbf{n} \cdot \nabla)(\mathbf{n}' \cdot \nabla') \left(\frac{r_0}{r}\right)^{l+1} \left(\frac{r_0}{r'}\right)^{l+1} P_l \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r r'}\right)$$

で与えられる。また展開係数は  $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T = (G + \lambda I)^{-1} \mathbf{d}$  で求まる。ただし、 $G$  は  $(i, j)$  成分が  $K(\mathbf{r}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{n}_j)$  である行列であり、 $\mathbf{d} = (B_1^{data}, \dots, B_N^{data})^T$  である。



### 3 数値例

図 1(b) のような脳内の 2 箇所 に電流源に対し、実センサ (Neuromag, 102ch) で観測される磁場の法線方向分布を描いたものが図 1(c) である。一見、単一双極子による磁場パターンに見える。この観測データの標準偏差の 5% のガウシアンノイズを混入させ、双極子個数を 1 個、2 個として仮定した場合の Goodness of Fit はそれぞれ 90.66%, 91.15% となり、殆ど変わらない。このため赤池情報量基準 (AIC) を計算すると、双極子 1 個と仮定したモデルの方が値が小さくなり、誤って 1 個と推定されることになる。これに対し、 $S$  表面上に 1250 点の仮想センサを配置し、式 (2), (3) を用いて磁場を補外した結果が図 2(a) であり、双極子 2 個による磁場パターンが明瞭に見えるのがわかる。補外される磁場分布の滑らかさは正則化パラメタに依存する (図 2(b), (c)) が、 $\lambda$  の値を変えながら評価関数 (1) の第一項、第二項の値をプロットした L カーブ (図 2(d)) のコーナーから選択することで、図 2(a) のように適切な磁場補外が行えることがわかる。

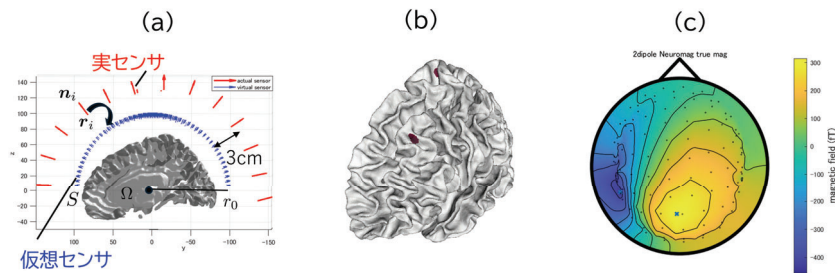


図 1. (a) 問題設定：実センサ (赤) で計測した磁場から、頭部表面上の仮想センサ (青) での磁場を補外する。 (b) 真の電流源。 (c) 実センサにおける磁場：あたかも単一の電流双極子による磁場パターンに見える。

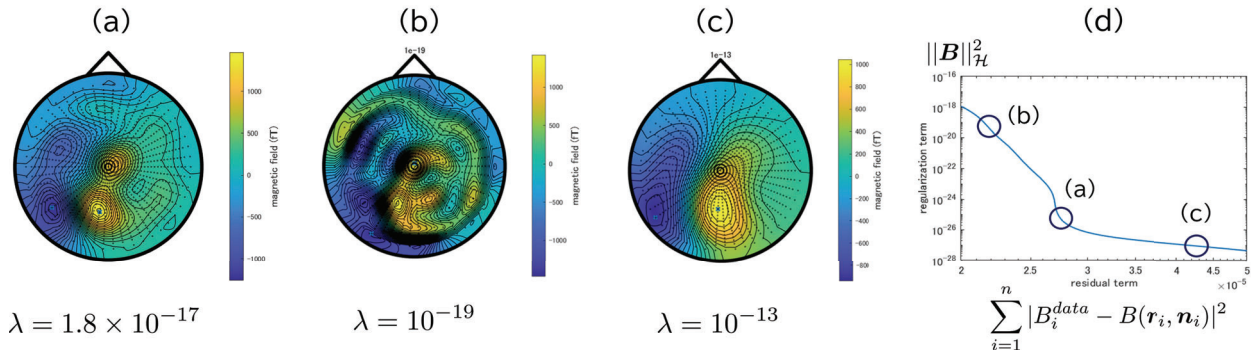


図 2. (a) 磁場補外結果：電流双極子 2 個による磁場パターンが復元できている。 (b), (c) 補外結果は正則化パラメタ  $\lambda$  に依存するが、評価関数に対する L カーブ (d) のコーナーから最適値を決めることで、図 (a) が得られる。

**謝辞** 本研究は、科研費 24K00892、および (公財) セコム科学技術振興財団特定領域研究助成の支援を受けて行われたものである。

### 参考文献

- [1] K. Kabashima, T. Wu, and T. Nara, Reconstruction of current dipoles based on tensor decomposition of multipole coefficients, JSIAM Letters, 11 (2019), 29-32.