

CT 画像再構成における shearlet 変換を用いたリングアーティファクトの除去について

鈴木 俊夫¹, 藤ノ木 健介¹, 藤井 克哉²

¹ 神奈川大学, ² 畿央大学

e-mail: ¹tosuzuki@kanagawa-u.ac.jp

1 目的

コンピュータ断層撮影法 (CT) は, X 線とコンピュータ処理を用いて被写体の詳細な断面画像を作成する画像技術である. X 線検出器の特徴や撮影条件, 物体の形状や密度, 情報の欠陥等により, CT で得られた画像にはアーティファクトと呼ばれるノイズがしばしば現れる ([1] 参照). 特にリングアーティファクトは図 1 に示すように, 回転軸を中心とした同心円状に現れるアーティファクトである. 本研究ではこのリングアーティファクトの発生している CT 画像に, shearlet 変換を用いたノイズ除去を適用した.

2 Shearlet 変換

Shearlet 変換は近年注目を浴びている時間周波数解析の変換の 1 つである. Shearlet は, 正規直交基底を成す直交 wavelet とは異なりフレームを構成するため, より柔軟な表現が可能である ([2] 参照). 2 つの行列 A_a , S_s をそれぞれ

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}, \quad a > 0, \quad S_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}$$

で定める. このとき, 関数 $\psi \in L^2(\mathbf{R}^2)$ に対して,

$$\left\{ \psi_{j,k,m}(x) = 2^{\frac{3}{4}j} \psi(S_k A_{2^j} x - m) \mid j, k \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{Z}^2 \right\}$$

とおくと, これは $L^2(\mathbf{R}^2)$ のフレームを構成する. これを用いて, $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$ の離散 shearlet 変換 $\mathcal{SH}[f]$ を

$$c_{j,k,m} = \mathcal{SH}[f](j, k, m) = \langle f, \psi_{j,k,m} \rangle = \int_{\mathbf{R}^2} f(x) \overline{\psi_{j,k,m}(x)} dx$$

で定める.

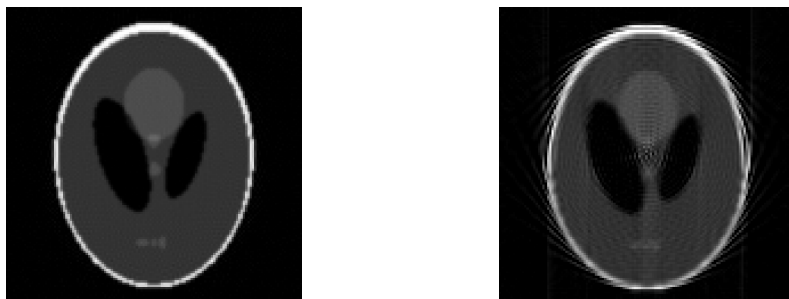


図 1. 元画像 (左) とリングアーティファクトを含む画像 (右)



図 2. リングアーティファクトを含む CT 画像（左），離散 wavelet 変換によるノイズ除去結果（中央），提案法によるノイズ除去結果（右）

3 数値実験

リングアーティファクトが現れた画像 f に対して，離散 shearlet 変換を適用し，そのノイズ除去がどの程度可能であるかを数値実験で検討した．その手順を以下に示す．

- 1) 画像 f に対して離散 shearlet 変換を適用し，shearlet 係数 $\{c_{j,k,m}\}$ を得る．
- 2) 適切に選択した係数 $\{c_{j,k,m}\}$ をハード閾値法 [3] によって 0 に置き換え，再構成を行う．係数の選択は，再構成画像との L^2 ノルム誤差が最小となるような係数の組み合わせにする．

本手法をリングアーティファクトを含む画像に対して適用したノイズ除去結果を図 2 に示す．画像サイズは 128×128 画素とした．比較対象として，通常の離散 wavelet 変換を用いた結果も示す．

結果より，離散 wavelet 変換を用いた場合において，リングアーティファクトがある程度除去されていることがわかるが，エッジ部分にかなりの画質劣化が観測されている．一方で，離散 shearlet 変換を用いた場合はこのような問題は生じておらず，エッジ部分が良好に再現されており，全体的により優れたノイズ除去結果が得られている．

4 まとめ

本研究では，リングアーティファクトが現れた画像に対して，shearlet 変換を用いてノイズ除去を行った．Wavelet 変換の場合と比較して，提案法ではより優れたノイズ除去結果を得ることができた．

参考文献

- [1] F. Edward Boas, D. Fleischmann, CT artifacts: causes and reduction techniques, Imaging Med 4.2 : 229–240, 2012.
- [2] D. Labate, W. Lim, G. Kutyniok, and G. Weiss, Sparse multidimensional representation using shearlets, in Wavelets XI, edited by M. Papadakis, A. F. Laine, and M. A. Unser, SPIE Proc. 5914 (2005), SPIE, Bellingham, WA, 254–262, 2005.
- [3] D. L. Donoho, De-noising by soft-thresholding, IEEE Trans. Inform. Theory, **41** (1995), 613–627.

有限個の標本信号のための標本化定理の統計的拡張

富安 亮子¹¹ 九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所

e-mail: tomiyasu@imi.kyushu-u.ac.jp

1 概要

$L \subset \mathbb{R}^d$ を full-rank の格子とし, Kramer 標本化定理と同様の状況 (1), (2) を考える. 標本化定理の無限和において信号 $F(t_n)$ の値が観測されたとする. データ数は有限個なので, 無限和を有限和に打切ることになるが, 実際上は, 観測範囲外で $F(t_n) \approx 0$ を仮定できないこともしばしば起きる.

そこで, 各点 $\omega = \omega_0$ の近傍 $\omega_0 + D$ で $f(\omega)$ を近似する多項式などの線形モデル関数 $g_{\mathbf{p}}(\omega) = \sum_{k=1}^m p_k g_k(\omega)$ ($p_k \in \mathbb{C}$) を考え, パラメータ \mathbf{p} (と \mathbf{p} の観測信号からの伝播誤差) を無限次元線形最小二乗法により推定することを考える. この状況は理論的に有限次元行列計算に帰着されるため, 定式上は打ち切り誤差が生じない. 最適解 \mathbf{p} は観測信号の有限線形和になるが, 各係数は $\omega_0 + D$ および観測値の座標 t_1, \dots, t_s のみに依存する行列の逆行列を含む厳密式 (closed form) で書き下せる. 有限個の信号のみの状況では, 標本化定理のような完全な復元は当然できないが, 係数を closed form で表せる状況は標本化定理の有限版類似と考えることもできる.

本手法は計測データへの応用を念頭に開発したので, 数値計算の結果も紹介する.

2 Kramer の標本化定理の状況

$L^2(\mathbb{R}^d/L)$ の内積を $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^d/L} f(\omega) \overline{g(\omega)} d\omega$ と書く. $L^2(\mathbb{R}^d/L)$ の Riesz 基底 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を固定し, 双対 Riesz 基底を $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ とする (i.e., $\langle x_m, y_n \rangle = \delta_{m,n}$). ある集合 Ω と $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $t_n \in \Omega$, および $K(t) : \Omega \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d/L)$ が存在して, $K(t_n) = x_n$ ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$) が成立するとする. Riesz 基底の性質から, 任意の $f(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^d/L)$ は, 以下のように一意的に表せる.

$$f(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} F(t_n) y_n, \quad F(t_n) := \langle f(\omega), x_n \rangle = \langle f(\omega), K(t_n) \rangle. \quad (1)$$

これに対応して下式により, $F(t) := \langle f(\omega), K(t) \rangle$ ($t \in \Omega$) の値を完全に復元できる, というのが標本化定理である (より一般的な仮定の下で説明されることもある).

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F(t_n) \langle y_n, K(t) \rangle. \quad (2)$$

以下では, (1), (2) の無限和において, データの有限性のため打ち切りが生じる状況を考える. $\mathcal{F}(f)(t) := \langle f(\omega), K(t) \rangle$ とする.

3 (無限次元) 線形最小二乗法の適用

観測信号 $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ とパラメータ $p \in \mathbb{R}^m$ から定まるモデル関数 Mp ($M \in \mathbb{R}^{n \times m}$) の誤差二乗和 (3) を最小化する最小二乗法は, 正規分布 $e^{-\Sigma(p)/2}$ に基づく最尤法から導出される.

$$\min_{p \in \mathbb{R}^m} \Sigma(p) := {}^t(\mathbf{v} - Mp) \text{Cov}(\mathbf{v})^+ (\mathbf{v} - Mp). \quad (3)$$

ただし, $\text{Cov}(\mathbf{v})$ は, \mathbf{v} の各成分の誤差行列 (共分散行列) である. 疑似逆行列の性質から, $\text{Cov}(\mathbf{v})$ の i 行, i 列の成分を全て 0 としておけば, 最適解から v_i の影響が完全に除かれることは, よく知ら

れた最小二乗法の技法の 1 つである.

$\mathbf{v} = (F(t_n))_{n=1}^{\infty}$ の観測されていない信号に対応する成分を $F(t_n) = 0$ とし, まずは以下の $\omega_0 + D \subset \mathbb{R}^d/L$ における L^2 ノルム最小化を考える.

$$\int_{\omega_0+D} |f(\omega) - g_{\mathbf{p}}(\omega - \omega_0)|^2 d\omega = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}((f(\omega) - g_{\mathbf{p}}(\omega - \omega_0))|_{\omega_0+D})(t_n) y_n \right\|^2. \quad (4)$$

右辺の係数 $\mathcal{F}((f(\omega) - g_{\mathbf{p}}(\omega - \omega_0))|_{\omega_0+D})(t_n)$ は $\mathbf{v} = (F(t_n))_{n=1}^{\infty}$ の線形式になるが, (4) において設定されていると考えられる係数間の誤差共分散行列はグラム行列 $(\langle x_j, x_j \rangle)$ である. 観測信号 $F(t_1), \dots, F(t_s)$ の誤差共分散は入力値とし, それ以外はすべて 0 に設定して得られる誤差共分散行列に取り換えれば, 観測されていない $F(t_n) = 0$ の影響が最適解から取り除かれる.

$L^2(\mathbb{R}^d/L)$ で考えるので行列ではなく線形作用素の議論になるが, 行と列が $\mathbb{Z}_{>0}$ に一対一対応するベクトル・行列と同一視しておく, 最小二乗法の議論は見やすい. そこで節 2 の Riesz 基底 y_1, \dots, y_n を用いて, 同型射 $L^2(\mathbb{R}^d/L) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_{>0}) := \left\{ \{c_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \right\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n \mapsto \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ によって与え, $L^2(\mathbb{R}^d/L)$ 上の有界線形作用素 T に対応する行列 (c_{ij}) を以下のように取る.

$$f \mapsto (Tf)(\omega) := \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} y_i \langle f, x_j \rangle.$$

有界作用素 T に対しては随伴作用素 T^* が定義されるので, (c_{ij}) は,

$$\mathfrak{M} := \left\{ (c_{ij}) : \sum_{i=1}^{\infty} |c_{ik}|^2 < \infty, \sum_{j=1}^{\infty} |c_{kj}|^2 < \infty \text{ for any } k \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}$$

の元である. 絶対収束性から, \mathfrak{M} の元 $\mathbf{M} = (a_{ij})$, $\mathbf{M}_2 = (b_{ij})$ の積や, その $\mathbf{v} \in \ell^2(\mathbb{Z}_{>0})$ への作用も有限次元の場合と同様の式で計算できる.

講演では, 最小二乗法の最適解の厳密式を与える. 最終的に有限次元の行列計算に帰着される理由は, $\mathbf{v} = (F(t_n))_{n=1}^{\infty}$ の共分散行列 $\text{Cov}(\mathbf{v})$ の各成分が, 観測値に対応する有限個を除いて 0 となるため, この場合, $(T^* \text{Cov}(\mathbf{v}) T)^+$ ($T \in \mathfrak{M}$ or 有界作用素) も, コンパクト作用素の疑似逆作用素と同様に定義できる.

4 数値計算の状況と概要

節 3 で述べた最適解の厳密式は, 観測信号 $F(t_1), \dots, F(t_s)$ の数 s にサイズが等しく, 用いた線形モデルに依存しないシンプルな構造の行列の逆行列を含む. 特にフーリエ変換の場合, 座標 $\omega = \omega_0$ にも依存しない行列の逆行列計算に帰着できるが, 極めて ill-conditioned のため, 逆行列を数値的に精度よく計算することは困難である. そこで, $\omega = \omega_0$ の近傍での Taylor 展開を用いて, 線形モデルを y_1, \dots, y_s の線形和によって明示的に近似したものに置き換える. この場合, t_1, \dots, t_s の Vandemonde 行列の逆行列を事前にただ一度計算すればよい. やはり ill-conditioned だが, Vandemonde 行列の逆行列は厳密式が知られている.

一般の場合も, モデル関数の設定で逆行列の計算を不要にできることがある. 無限和 (1) の打ち切りによる Gibbs 現象は, この文脈では誤差二乗和 = 0 となる状況の overfitting の結果と解釈できる.

謝辞 本研究は JST 未来社会創造事業 (JPMJMI18GD), 科研費基盤 C (24K06867) の支援で実施された. コード開発では (株) Visible Information Center と WDB (株) 有村隆氏にご協力頂いた.

ジャイロ群上で定義される関数の性質

橋本 紘史¹

¹ 新潟大学 教育基盤機構

e-mail : hashimoto@ge.niigata-u.ac.jp

1 ジャイロ群について

ジャイロ群とは 1988 年に Ungar [1] によって定義された代数的構造であり, Einstein の特殊相対性理論における速度和の研究を通して発見された. 通常の群は Euclid 空間の幾何と相性が良いが, ジャイロ群は Euclid の平行線公準を否定した体系である双曲幾何と相性が良い. 以下, 集合に二項演算のみが入っている代数系をマグマと呼ぶ.

定義 1 (ジャイロ群) マグマ (G, \oplus) が (G1) から (G5) を満たすとき, ジャイロ群と呼ばれる.

(G1) 任意の $a \in G$ に対して, 0 で表されて,

$$0 \oplus a = a$$

を満たす左単位元が少なくとも 1 つ存在する.

(G2) 任意の $a \in G$ に対して, $\ominus a$ で表されて,

$$\ominus a \oplus a = 0$$

を満たす左逆元が存在する.

(G3) 任意の $a, b, c \in G$ に対して, 唯 1 つの元 $\text{gyr}[a, b]c \in G$ が存在し, 左ジャイロ結合法則

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus \text{gyr}[a, b]c$$

を満たす.

(G4) 任意の $a, b \in G$ に対して,

$$\text{gyr}[a, b] \in \text{Aut}(G, \oplus)$$

が成り立つ. この $\text{gyr}[a, b]$ を a, b で生成されたジャイロ自己同型といい, 写像

$$\text{gyr}: G \times G \rightarrow \text{Aut}(G, \oplus)$$

をジャイレーターと呼ぶ.

(G5) 任意の $a, b \in G$ に対して, ジャイロ自己同型 $\text{gyr}[a, b]$ は

$$\text{gyr}[a, b] = \text{gyr}[a \oplus b, b]$$

を満たす.

複素平面における Möbius 変換の一般論から, 次の例が導かれる.

例 2 (Möbius ジャイロ群) 複素数平面内の単位開円盤 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ に演算

$$a \oplus_M b = \frac{a + b}{1 + \bar{a}b}$$

を入れたマグマ (\mathbb{D}, \oplus_M) はジャイロ群である. ジャイレーターは, 任意の $x \in \mathbb{D}$ に対し,

$$\text{gyr}[a, b]x = \frac{a \oplus_M b}{b \oplus_M a} x = \frac{1 + a\bar{b}}{1 + \bar{a}b} x$$

として定義される.

さらに, ジャイロ群 (G, \oplus) の任意の元 $a, b \in G$ に対して, ジャイロ可換法則

$$a \oplus b = \text{gyr}[a, b](b \oplus a)$$

が成り立つならば, G はジャイロ可換であるという.

先の例 2 で定義した Möbius ジャイロ群 (\mathbb{D}, \oplus_M) はジャイロ可換なジャイロ群である. 定義より, ジャイレーターが任意の元に対して恒等写像となると, ジャイロ群は通常の群の定義に一致することがわかる. 定義を振り返ると, 実は左単位元は唯 1 つしかないことが証明できるが, このように, 上で定義したジャイロ群とベクトル空間のジャイロ版であるジャイロベクトル空間の詳しい構造については Ungar [2, 3, 4] 等を見よ.

2 ジャイロ群上の関数

ジャイロ群, またはジャイロベクトル空間が与えられたとき, その上の関数を考えることは自然である. 近年, Ferreira はいくつかのジャイロ群上の関数に対し, 平行移動や Fourier 変換をはじめとする調和解析の可能性を示している (例えば, [5, 6, 7] を見よ). そこで, 今回の講演では先行文献を考察したうえで, ジャイロ構造の上に定義される関数の性質について, いくつかの結果を紹介をする予定である.

参考文献

- [1] A. A. Ungar, Thomas rotation and the parametrization of the Lorentz transformation group, *Found. Phys. Lett.*, **1**(1988), no.1, 57–89.
- [2] A. A. Ungar, *Analytic hyperbolic geometry, Mathematical foundations and applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005.
- [3] A. A. Ungar, *Analytic hyperbolic geometry and Albert Einstein’s special theory of relativity*, Second edition, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2022.
- [4] A. A. Ungar, From Möbius to gyrogroups, *Amer. Math. Monthly*, **115**(2008), no.2, 138–144.
- [5] M. Ferreira, Harmonic analysis on the Einstein gyrogroup, *J. Geom. Symmetry Phys.*, **35**(2014), 21–60.
- [6] M. Ferreira, Harmonic analysis on the Möbius gyrogroup, *J. Fourier Anal. Appl.*, **21**(2015), no.2, 281–317.
- [7] M. Ferreira, Harmonic analysis on the proper velocity gyrogroup, *Banach J. Math. Anal.*, **11**(2017), no.1, 21–49.