

## 二重周期領域流れの流線トポロジカルデータ解析

坂上 貴之<sup>1</sup>, 横山 知郎<sup>2</sup>, 木村 満晃<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 京都大学 大学院理学研究科, <sup>2</sup> 埼玉大学 大学院理工学研究科, <sup>3</sup> 大阪歯科大学 数学教室  
e-mail: sakajo@math.kyoto-u.ac.jp

二次元（平坦）トーラス上  $\mathbb{T}^2$  上の密度一定の非圧縮粘性流体の運動を考える．このような流体運動は現実の流れとしては存在しないが，スペクトル法などの高精度スキームが利用できるため，境界の影響などを排除して流体方程式の持つ非線型性と複雑乱流構造の関係を調べる数値計算において，よく用いられる設定である．二次元乱流では大小さまざまな渦構造が相互作用して，次第に大きなスケールの渦構造へ遷移していくことが知られている．これに応じて，エンストロフィー（渦度の  $L^2$  ノルム）のスペクトルの統計則を見たとき，粘性流体の非粘性極限では，高波数の小スケール渦から低波数の大スケールの渦へとエンストロフィーが輸送される「逆カスケード」と呼ばれる現象が確認される．その生成メカニズムの解明に向けて，複雑な流れのパターンの中から大小さまざまなコヒーレントな渦構造を抽出して，それらの相互作用を調べるのが重要となる．

これに対して，渦度関数からコヒーレントな回転成分（渦構造）を抽出する様々な方法（例えば [1, 2] など）が，これまで提案されている．しかし，渦度は必ずしもコヒーレントな渦領域だけを表すのではなく，強いシア（せん断流）領域でも大きな値を持つため，渦領域の定義は明確でなく，実際は何らかのハイパーパラメータを導入して渦構造を定義することが多い．一方，二次元の流れから回転流構造を抜き出す別のアイデアとして，トポロジーと力学系理論に基づいて孤立した回転領域を抽出する流線トポロジカルデータ解析（Topological Flow Data Analysis）という方法が近年提案されている．この方法では，二次元ベクトル場によって生成される粒子軌道（流線）群を考え，それらのトポロジカルな構造を，ベクトル場における平衡点の指数に関するポアンカレ・ホップの定理と粒子軌道群の  $t \rightarrow \pm\infty$  における  $\omega(\alpha)$  極限軌道を与えるポアンカレ・ベンディクソンの定理により分類し，流線群の連結構造の様子を離散グラフ（木構造）として表現するものである．

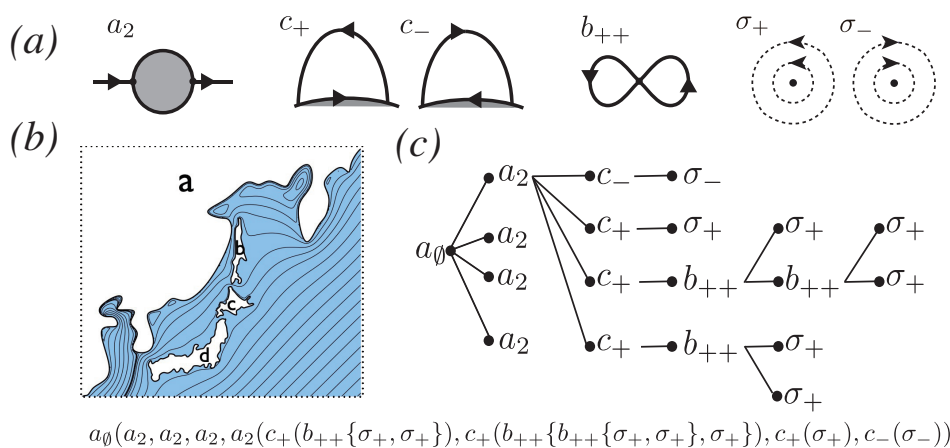


図 1. TFDA の概要. (a)  $\mathbb{R}^2$  上の構造安定なハミルトンベクトル場に現れる流線構造と表現記号 (COT 記号). (b) 日本近海の流線パターン例. (c) このパターンに対する COT. 各ツリーのノードのラベルは (a) に示す流線構造に対応している．一番下に示した文字列がこの COT に対応する COT 表現である．

$\mathbb{R}^2$  上の非圧縮流は流れ関数  $\psi$  をハミルトニアンとするハミルトンベクトル場が生成する流れであ

る。また、この流れに対する粒子軌道（流線）群は、 $\nabla\psi \cdot \mathbf{u} = 0$  より、ハミルトニアン $H$ の等高線と一致する。したがって、ハミルトン流の位相的分類とは、ハミルトニアン $H$ の等高線のトポロジカルな構造の分類に他ならない。Ma と Wang [3] は、コンパクト曲面上の構造安定なハミルトンベクトル場に対する流線構造をトポロジカルに分類した。論文 [4] では、彼らの理論を一様流中のハミルトン流れに拡張すると同時に、粒子軌道の作る大域的なトポロジカルな構造が、これら有限個の軌道の組み合わせで表現できることを示した。その後、この組み合わせ構造は、ハミルトン関数のレーブグラフと同一の部分円順序根付き木（partially Cyclically-Ordered rooted Tree=COT）に一対一に対応することが示されている [5]。さらに、COT は COT 表現と呼ばれる文字列表現を持ち、これによりハミルトン流れ場のトポロジカル構造を文字として認識し、そこからコヒーレントな回転流成分が抽出できる。図 1 はその適用例である。TFDA に異常気象の原因となる大気ブロッキング現象や、海洋学における黒潮大蛇行と呼ばれる特異現象の発生時期の特定ができることが示されている [6, 7]。

本研究は、この解析手法を  $\mathbb{T}^2$  上のハミルトンベクトル場に拡張するものである。 $\mathbb{T}^2$  は  $\mathbb{R}^2$  とは流れの領域の幾何学的構造が異なるため既存の理論はそのまま適用できない。一般に 2 次元多様体では局所座標ごとにハミルトニアンを定義するしかないからである。しかし、 $\mathbb{T}^2$  は一つの局所座標系ですべての曲面の上の点が一意に表現されるので、これを  $(x, y)$  平面と同一視して、その上で定義されるハミルトン関数  $H(x, y)$  が与えれば、流線軌道群は  $\mathbb{R}^2$  と同等にこのハミルトン関数の等高線と一致する。また、 $\mathbb{T}^2$  上のハミルトニアンのレーブグラフは一つループを持つため、COT を構成するには工夫も必要である。本講演では、この理論的拡張と、その 2 次元乱流データへの応用例を示す。

謝辞 本研究は科学技術振興機構 (JST) 未来社会創造事業 JPMJMI22G1 および BIPROGY (株) との共同研究契約から支援を受けています。

## 参考文献

- [1] J. C. McWilliams, The vortices of two-dimensional turbulence, *J. Fluid Mech.*, 219(1), 1990, 361.
- [2] M. Farge, Wavelet transforms and their applications to turbulence, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 24(1) 1992, 395–458.
- [3] T. Ma and S. Wang, *Geometric theory of incompressible flows with applications to fluid dynamics*, AMS, 2005.
- [4] T. Yokoyama and T. Sakajo, Word representation of streamline topologies for structurally stable vortex flows in multiply connected domains, *Proc. Roy. Soc. A*, 469, 20120558, 2013.
- [5] 宇田智紀, 横山知郎, 坂上貴之, パーシステントホモロジーとレーブグラフを用いた 2 次元ハミルトンベクトル場の流線位相構造の自動抽出アルゴリズム, *日本応用数理学会論文誌*, 29(2), 2018, 187–224.
- [6] T. Uda, T. Sakajo M. Inatsu, and K. Koga, Identification of atmospheric blocking with morphological type by topological flow data analysis, *J. Meteor. Soc. Japan, Ser. II*, 99(5), 2021, 1169–1183.
- [7] T. Sakajo, S. Ohishi, and T. Uda, Identification of kuroshio meanderings south of Japan via a topological data analysis for sea surface height, *J. Oceano.*, 78(6), 2022, 495–513.

## 2次元非圧縮キャビティ流れに対する流線トポロジー解析

宇田 智紀<sup>1</sup>, 坂上 貴之<sup>2</sup>, 鍛冶 静雄<sup>3</sup>, 松本 剛<sup>2</sup>, 横山 知郎<sup>4</sup>

<sup>1</sup> 富山大学, <sup>2</sup> 京都大学, <sup>3</sup> 九州大学, <sup>4</sup> 埼玉大学

e-mail : uda0@sci.u-toyama.ac.jp

### 1 概要

本講演では, 2次元非圧縮キャビティ流れに対して流線トポロジー解析を適用し, 複雑な流れの時間発展に現れる位相的特徴のあるパターンをグラフ解析的アプローチで記述できたことを報告する.

2次元領域上の滑らかな流れ関数  $\psi(x, y)$  を考える. ベクトル場  $\mathbf{u}(x, y)$  が

$$\mathbf{u} = -\nabla^\perp \psi, \quad \nabla^\perp := (\partial_y, -\partial_x)$$

で定義されるとき,  $\mathbf{u}$  をハミルトンベクトル場と呼ぶ.  $(x_0, y_0)$  を初期値としてベクトル場  $\mathbf{u}(x, y)$  が運ぶ粒子の軌道を  $O(x_0, y_0)$  と表す. すなわち,  $O(x_0, y_0) = \{\phi(s; x_0, y_0) \mid s \in \mathbf{R}\}$  であり, ここで  $\phi$  は微分方程式  $\dot{\phi}(s) = \mathbf{u}(\phi(s))$  の解写像 (フロアマップ) である. ベクトル場が定常ならば, 粒子軌道は流れ関数  $\psi$  の等値集合  $\psi^{-1}(a) = \{(x, y) \mid \psi(x, y) = a\}$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) に包まれる.

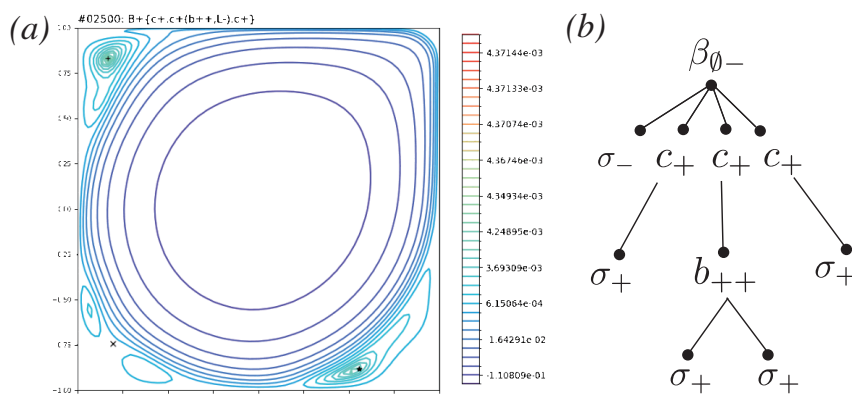


図 1. (a) 2次元キャビティ流れの流線図 ( $\psi$  の等高線図), (b) キャビティ流れに見られる典型的な COT 表現の例. 四隅の3つのマーカー位置がそれぞれ3つの渦流  $c_+$  の中心に対応する. 左下隅の  $c_+$  は内部にさらに入れ子渦構造  $b_{++}$  を持つ.

坂上・横山ら [1, 2] は, 全ての粒子軌道  $O(x_0, y_0)$  から為る集合  $\mathcal{O}$  のトポロジカルな特徴を分類するための数学的理論を開発した. トポロジカルな分類はポアンカレ・ベンディクソンの定理に基づいており, また, ポアンカレ・ホップの指数定理によりベクトル場の指数と流れ場のオイラー標数の関係が定まる. この理論に基づく  $\mathcal{O}$  内の粒子軌道のトポロジー構造を一意に表すグラフ表現を得るアルゴリズムを, 宇田ら [3] は位相的データ解析を用いて実現した. この一意表現を部分円順序付き根付き木 (COT と略す) 表現と呼ぶ. COT 表現は流れ関数  $\psi$  の等高線のトポロジーを要約したグラフであるレーブグラフと密接に関係する. 位相的データ解析における劣位集合・優位集合フィルトレーションに関する 0 次元パーシステントホモロジーを組み合わせることでレーブグラフを構築し, これを COT 表現へと変換できる. この手順を踏むことで, 流れ関数の離散なデータから COT 表現を計算機上で得ることができる. こうして確立した新しいデータ解析手法をトポロジカルフローデータ解析 (TFDA) と呼ぶ. TFDA で複雑な流れパターンの時間変化を離散力学系として記述でき, ト

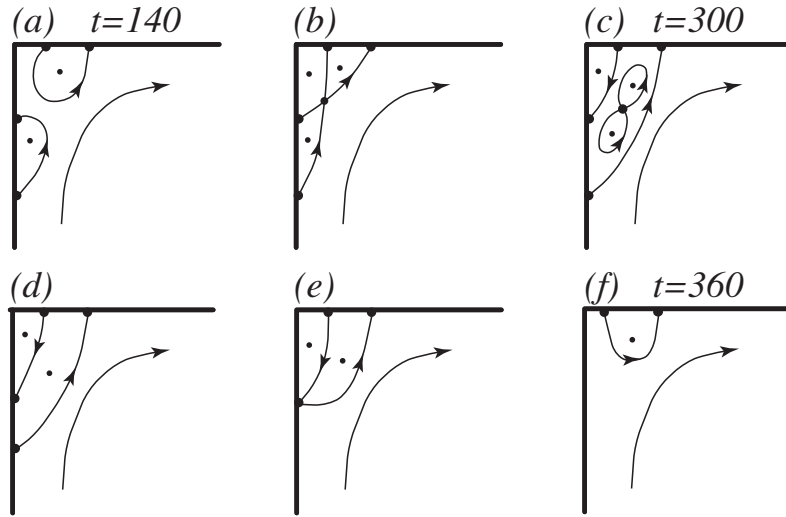


図 2. キャビティ流れで観察された典型的遷移. (a), (c), (f) は実際の数値計算で得た流線の模式図. (b), (d), (e) は遷移中に瞬時的に現れ得る中間パターン. 位相的制約により, これらの構造不安定な形を経由していると理論的に想定される.

ポロジーに基づく低次元化モデルが得られる.

そこで本研究では, 流体力学における複雑流体の標準的テスト問題である 2 次元非圧縮キャビティ流れに TFDA を適用した. 図 1 にキャビティ流れの流線図と COT 表現の例を示す. COT 表現が為す離散力学系へのグラフ解析アプローチにより, 複雑なキャビティ流れの時間変化の特徴が捉えられた. 具体的にはまず, 中程度のレイノルズ数  $Re = 14000$  における流線パターンの遷移と角運動量の輸送の関係を記述した. 図 2 に示すように, 典型的な流線トポロジー遷移が観察された. その後, レイノルズ数が  $Re = 14000$  から  $16000$  の範囲で流れがどう複雑化するかを離散力学系として比較した. 最後に, 高レイノルズ数  $Re = 32000$  での COT 表現の遷移とカオスの複雑さの間の関係性も示唆された. 計算には TFDA 用 Python モジュール `psiclone`[4] を用いた.

謝辞 本研究は科学技術振興機構 (JST) 未来社会創造事業 JPMJMI22G1 の支援を受けています.

## 参考文献

- [1] T. Yokoyama and T. Sakajo, Word representation of streamline topologies for structurally stable vortex flows in multiply connected domains, *Proc. Roy. Soc. A*, Vol. 469 (2013).
- [2] T. Sakajo and T. Yokoyama, Tree representation of topological streamline patterns of structurally stable 2D Hamiltonian vector fields in multiply connected domains, *IMA J. Appl. Math.*, Vol. 83 (2018), pp. 380–411.
- [3] T. Uda, T. Yokoyama, and T. Sakajo, Algorithms converting streamline topologies for 2d Hamiltonian vector fields using Reeb graphs and persistent homology, *Trans. Japan Soc. Indust. Appl. Math.*, Vol. 29 (2019), pp. 187–224.
- [4] GitHub - `psiclone`: Toolbox for Topological Flow Data Analysis using COT Representations, <https://github.com/t-uda/psiclone>.

# Interval Replacements of Persistence Modules

Hideto Asashiba<sup>1,2,3</sup>, Etienne Gauthier<sup>4</sup>, Enhao Liu<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Shizuoka Univ., <sup>2</sup>Kyoto Univ., <sup>3</sup>Osaka Metro. Univ., <sup>4</sup>Inst. Polytechnique de Paris  
e-mail : liu.enhao.b93@kyoto-u.jp

## 1 Outline

We define two notions. The first one is a *compression system*  $\xi$  for a finite poset  $\mathbf{P}$ , which assigns each interval subposet  $I$  to a poset morphism  $\xi_I: Q_I \rightarrow \mathbf{P}$  satisfying some conditions, where  $Q_I$  is a connected finite poset. An example is given by the *total* compression system that assigns each  $I$  to the inclusion of  $I$  into  $\mathbf{P}$ . The second one is an *I-rank* of a persistence module  $M$  under  $\xi$ , denoted by  $\text{rank}_I^\xi$ , the family of which is called the *interval rank invariant* of  $M$  under  $\xi$ . A compression system  $\xi$  makes it possible to define the *interval replacement*  $\delta^\xi$  not only for 2D persistence modules but also for any persistence modules over any finite poset. We will show that the forming of the interval replacement preserves the interval rank invariant, which is a stronger property than the preservation of the usual rank invariant. Moreover, to know what is preserved explicitly, we will give a formula of the *I-rank* of  $M$  under  $\xi$  in terms of the structure linear maps of  $M$  for any compression system  $\xi$ , and give a sufficient condition for the *I-rank* of  $M$  under  $\xi$  to coincide with that under the total compression system, the value of which is equal to the generalized rank invariant introduced by Kim–Mémoli.

## 2 Background

Persistent homology is a powerful technique in topological data analysis, employed to explore topological features of complex datasets. Multi-parameter persistent homology is less understood than one-parameter persistent homology because of its more intricate algebraic structure. Specifically, the presence of (usually infinitely many) non-interval indecomposable persistence modules significantly complicates the analysis in the multi-parameter persistent homology. To facilitate practical data analysis, we have developed a general theory of replacing any persistence modules over a finite poset with a pair of interval-decomposable modules (regarded as an element of the split Grothendieck group). In the sequel,  $\mathbb{k}$  denotes the field and  $\text{mod } \mathbb{k}[\mathbf{P}]$  denotes the  $\mathbb{k}$ -category of persistence modules over  $\mathbf{P}$ . By  $\text{sc}(Q_I)$  (resp.  $\text{sk}(Q_I)$ ) we denote the set of minimal (resp. the maximal) elements of poset  $Q_I$ .

## 3 Results

We first prove that the forming of  $\delta^\xi$  preserves the *I-ranks* as stated in the following.

**Theorem 1.** *Let  $\xi = (\xi_I: Q_I \rightarrow \mathbf{P})$  be a compression system for  $\mathbf{P}$ ,  $M \in \text{mod } \mathbb{k}[\mathbf{P}]$ , and  $I$  an interval of  $\mathbf{P}$ . Then*

$$\text{rank}_I^\xi \delta^\xi(M) = \text{rank}_I^\xi M.$$

Now we are interested in what the interval rank invariant actually is. To know this, for any compression system  $\xi$ , we will give an explicit formula of the interval rank invariant of  $M$  under

$\xi$  in terms of structure linear maps of  $M$ . We give a total order on the set  $\text{sc}(Q_I)$  (resp.  $\text{sk}(Q_I)$ ) by giving a poset isomorphism  $a: [n] \rightarrow \text{sc}(Q_I)$ ,  $i \mapsto a_i$  (resp.  $b: [m] \rightarrow \text{sk}(Q_I)$ ,  $i \mapsto b_i$ ). For any totally ordered set  $S$ , we denote by  $C_2 S$  the set of totally ordered subsets of  $S$  with cardinality 2. Set  $\underline{\mathbf{a}} := \min \mathbf{a}$  and  $\bar{\mathbf{a}} := \max \mathbf{a}$  for any  $\mathbf{a} \in C_2 S$ . Thus  $\mathbf{a} = \{\underline{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}\}$ . For any  $\mathbf{a} \in C_2 \text{sc}(Q_I)$  (resp.  $\mathbf{b} \in C_2 \text{sk}(Q_I)$ ), we set

$$\vee' \mathbf{a} := \text{sc}(\uparrow \underline{\mathbf{a}} \cap \uparrow \bar{\mathbf{a}}) \quad (\text{resp. } \wedge' \mathbf{b} := \text{sk}(\downarrow \underline{\mathbf{b}} \cap \downarrow \bar{\mathbf{b}})).$$

Here  $\uparrow x := \{y \in Q_I \mid x \leq y\}$ , and  $\downarrow x := \{y \in Q_I \mid y \leq x\}$ . By convention, we set  $\text{sc}(\emptyset) := \emptyset$  and  $\text{sk}(\emptyset) := \emptyset$ . We set

$$\begin{aligned} \text{sc}_1(Q_I) &:= \bigsqcup_{\mathbf{a} \in C_2 \text{sc}(Q_I)} \vee' \mathbf{a} = \{\mathbf{a}_c := (\mathbf{a}, c) \mid \mathbf{a} \in C_2 \text{sc}(Q_I), c \in \vee' \mathbf{a}\}, \\ \text{sk}_1(Q_I) &:= \bigsqcup_{\mathbf{b} \in C_2 \text{sk}(Q_I)} \wedge' \mathbf{b} = \{\mathbf{b}_d := (\mathbf{b}, d) \mid \mathbf{b} \in C_2 \text{sk}(Q_I), d \in \wedge' \mathbf{b}\}. \end{aligned}$$

**Theorem 2.** *Let  $M$ ,  $\xi$  be as above, and  $I$  an interval of  $\mathbf{P}$  with  $\text{sc}(Q_I) := \{a_1, \dots, a_n\}$  and  $\text{sk}(Q_I) := \{b_1, \dots, b_m\}$  for some  $m, n \geq 1$ . We assume that  $a_1 \leq b_1$  without loss of generality. Then we have*

$$\begin{aligned} \text{rank}_I^\xi M = \text{rank} & \begin{bmatrix} [\tilde{M}_{\mathbf{a}_c, a}]_{(\mathbf{a}_c, a) \in \text{sc}_1(Q_I) \times \text{sc}(Q_I)} & \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} M_{\xi_I(b_1), \xi_I(a_1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & [\hat{M}_{\mathbf{b}, \mathbf{b}_d}]_{(\mathbf{b}, \mathbf{b}_d) \in \text{sk}(Q_I) \times \text{sk}_1(Q_I)} \end{bmatrix} \\ & - \text{rank} [\tilde{M}_{\mathbf{a}_c, a}]_{(\mathbf{a}_c, a) \in \text{sc}_1(Q_I) \times \text{sc}(Q_I)} - \text{rank} [\hat{M}_{\mathbf{b}, \mathbf{b}_d}]_{(\mathbf{b}, \mathbf{b}_d) \in \text{sk}(Q_I) \times \text{sk}_1(Q_I)}, \end{aligned}$$

where

$$\tilde{M}_{\mathbf{a}_c, a} := \begin{cases} M_{\xi_I(c), \xi_I(a)} & (a = \underline{\mathbf{a}}), \\ -M_{\xi_I(c), \xi_I(a)} & (a = \bar{\mathbf{a}}), \\ \mathbf{0} & (a \notin \mathbf{a}), \end{cases} \quad \text{and} \quad \hat{M}_{\mathbf{b}, \mathbf{b}_d} := \begin{cases} M_{\xi_I(b), \xi_I(d)} & (b = \underline{\mathbf{b}}), \\ -M_{\xi_I(b), \xi_I(d)} & (b = \bar{\mathbf{b}}), \\ \mathbf{0}, & (b \notin \mathbf{b}), \end{cases}$$

for all  $\mathbf{a}_c \in \text{sc}_1(Q_I)$ ,  $a \in \text{sc}(Q_I)$ ,  $b \in \text{sk}(Q_I)$  and  $\mathbf{b}_d \in \text{sk}_1(Q_I)$ .  $M_{b,a}: M(a) \rightarrow M(b)$  is the structure linear map of  $M$  corresponding to the unique morphism from  $a$  to  $b$  in  $\mathbf{P}$  for all  $a, b \in \mathbf{P}$ .

Let  $M$  and  $I$  be as above,  $\xi$  a compression system, and  $\text{tot}$  the total compression system. Then we say that  $\xi_I$  *essentially covers*  $I$  if there exists a formula of  $\text{rank}_I^{\text{tot}} M$  in terms of linear maps  $M(p)$  ( $p \in S$ ) for some subset  $S$  of morphisms in  $I$  such that for each  $p \in S$  there exists a morphism  $q \in Q_I$  with  $p = \xi_I(q)$ . Then we will prove the following.

**Theorem 3.** *Let  $M$ ,  $I$ ,  $\xi$ , and  $\text{tot}$  be as above. If  $\xi_I$  essentially covers  $I$ , then we have*

$$\text{rank}_I^\xi M = \text{rank}_I^{\text{tot}} M.$$

**謝辞** Hideto Asashiba is partially supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 18K03207, JSPS Grant-in-Aid for Transformative Research Areas (A) (22A201), and by Osaka Central Advanced Mathematical Institute (MEXT Promotion of Distinctive Joint Research Center Program JPMXP0723833165). Enhao Liu is supported by JST SPRING, Grant Number JPMJSP2110.



## 完全可換クイバーの区間近似とその応用

平岡 裕章<sup>1</sup>, 中島 健<sup>2</sup>, 大林 一平<sup>3</sup>, 許 晨光<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 京都大学, <sup>2</sup> 島根大学, <sup>3</sup> 岡山大学

e-mail : xu.chenguang.k34@kyoto-u.jp

### 1 Introduction

Topological data analysis (TDA) has attracted considerable attention in recent years. The one-parameter version of persistent homology, a fundamental tool in TDA, has been successfully applied across diverse fields. However, the multiparameter version of persistent homology still faces several challenges [1]. To navigate through these obstacles, this research introduces an enriched framework to study multiparameter persistence modules. We define a concept of “courses” designed to trace selected compositions of paths that meet certain criteria. Building on this, we extend the established concept of interval approximation [2] as a linear combination of these courses, which amounts to analyzing the representation over a fully commutative quiver via synthesizing interpretations obtained from intervals. Our framework not only offers a holistic understanding of the original representation but also provides a mechanism to tune the balance between approximation resolution and computational efforts.

### 2 Methodology

A *quiver*  $Q = (Q_0, Q_1, \mathfrak{s}, \mathfrak{t})$  is a directed finite multigraph consisting of a vertex set  $Q_0$ , an arrow set  $Q_1$ , and two maps  $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}: Q_1 \rightarrow Q_0$  assigning the start and target for each arrow. A path  $p$  from vertex  $u$  to vertex  $v$  is a finite sequence of concatenable arrows in  $Q_1$ . A *relation*  $\rho$  in  $Q$  with coefficients in  $\mathbb{k}$  is a linear combination of paths, represented as  $\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$ , where  $\lambda_i \in \mathbb{k}$ , each  $p_i$  is a path, and every pair  $p_i, p_j$  satisfies  $\mathfrak{s}(p_i) = \mathfrak{s}(p_j)$  and  $\mathfrak{t}(p_i) = \mathfrak{t}(p_j)$ . A fully commutative quiver  $G := (Q, R)$  is a quiver where any two paths with the same start and end points are related by a commutativity relation. We say  $G'$  is an *interval subquiver* if it is convex and connected, and  $R'$  contains no zero relations. The set of interval subquivers of  $G$  is denoted as  $\mathbb{I}_G$ . A representation of  $G$  is a representation  $M$  of  $Q$  satisfying the additional condition that the evaluation of  $M$  on each relation  $\rho \in R$  vanishes. When  $M$  is finite-dimensional, by the Krull-Schmidt theorem,  $M$  is isomorphic to  $\bigoplus_{L \in \mathcal{L}} L^{d_M(L)}$ , a direct sum of indecomposable representations. The function  $d_M: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  in the exponent is called the *multiplicity function* of  $M$ . Given a fully commutative quiver  $G$ , we define a *course* on  $G$  to be a pair  $(C, F)$  where  $C := (C_0, C_1, \mathfrak{s}, \mathfrak{t})$  is a connected quiver and  $F: C_0 \rightarrow Q_0$  acts as a *labeling map*, such that for any arrow  $\alpha \in C_1$ , there exists a path from  $F(\mathfrak{s}(\alpha))$  to  $F(\mathfrak{t}(\alpha))$  in  $G$ . For an interval subquiver  $I$  in  $G$ , a vertex in  $I$  is *essential* if it has only either outgoing arrows or incoming arrows. The set of essential vertices is denoted as  $E(I)$ . We say a course  $(C, F)$  is an *essential course in  $I$*  if  $E(I) \subseteq F(C_0) \subseteq I_0$ .

The evaluation of a representation on a course  $(C, F)$  in  $G$  is called a *tour*, which is an additive

functor  $\text{tour}_{(C,F)}(-)$  that maps a representation  $M \in \mathbf{rep}(G)$  to  $\left( M_{F(\mathfrak{s}(\alpha))} \xrightarrow{M(F(\mathfrak{s}(\alpha)) \rightarrow F(\mathfrak{t}(\alpha)))} M_{F(\mathfrak{t}(\alpha))} \right)_{\alpha \in C_1}$  in  $\mathbf{rep}(C)$ , where  $M(F(\mathfrak{s}(\alpha)) \rightarrow F(\mathfrak{t}(\alpha)))$  represents the evaluation of  $M$  on a path in  $G$  from  $F(\mathfrak{s}(\alpha))$  to  $F(\mathfrak{t}(\alpha))$ . As interval subquivers have simpler structures, designating courses for them can facilitate the study of intricate representations. We refer to a map  $\xi$  that assigns essential courses for elements in  $\mathbb{I}_G$  as an *essential assignment*.

**Definition 1** ( $\xi$ -compressed multiplicity). Let  $M \in \mathbf{rep}(G)$ ,  $\xi$  be an essential assignment, and  $I \in \mathbb{I}_G$ . The  $\xi$ -compressed multiplicity of  $M$  on the interval  $I$  is  $c_M^\xi(I) := d_{\text{tour}_{\xi(I)}(M)}(\text{tour}_{\xi(I)}(V_I))$ .

This compression offers much greater flexibility to distill information from a complicated representation  $M$  using an interval  $I$ . From these compressions, we can construct our refined version of interval approximation.

**Definition 2** (Interval Approximation). Assuming the same conditions as in the previous definition. The *interval approximation of  $M$  by  $\mathbb{I}_G$  via  $\xi$ -compressed multiplicity functions* is an integer-valued function  $\delta_M^\xi$  on the intervals of  $G$  that satisfies  $c_M^\xi(I) = \sum_{J \leq I} \delta_M^\xi(J)$  for any  $I \in \mathbb{I}_G$ .

### 3 Applications

Our framework is then applied to equi-oriented commutative ladders, which are  $n \times 2$  grids that each square is commutative. Such an object of length  $n$  is denoted by  $\text{CL}(n)$ . It is known that for  $n \leq 4$ , it is representation-finite, but for  $n \geq 5$ , it is representation-infinite. Let  $X$  be a  $\text{CL}(n)$ -filtration of simplicial complexes and  $M := H_k(X)$  be its homology module. When  $n \leq 4$ , we want to determine the multiplicity function  $d_M$ . Existing methods for this task can be difficult, while our approach breaks the original computation into computations of one-parameter persistent homology and then assembles them to retrieve the function  $d_M$ , reducing the computational efforts significantly. For representation-infinite cases, we introduce a new topological invariant, called the *connected persistence diagram*, tailored for the unique two-row structure of commutative ladders, where it can visualize the topological persistence of both rows and certain types of persistence along the other direction. In the research, we also employ these tools to analyze random simplicial complexes and material structures adapted to commutative ladder filtrations, shedding new light on their topological properties.

### 参考文献

- [1] Gunnar Carlsson, Topology and data, Bulletin of the American Mathematical Society, 46 (2009), pp. 255–308.
- [2] Hideto Asashiba, Emerson G. Escolar, Ken Nakashima, and Michio Yoshiwaki, On approximation of 2D persistence modules by interval-decomposables, Journal of Computational Algebra, 6-7 (2023), 100007.