Optimal Risk Sharing Problem with Constraints - An Application to Double Barrier BSDEs

Hayashi Tadashi[1],
[1]Mitsubishi UFJ Trust and Banking Corporation,
e-mail : ta9da18@gmail.com

1 Overview

Optimal risk sharing problem (ORSP) has become classical topics in economics, insurance and finance (see Barrieu and El Karoui [1], [2] and Jiang [3], for example). In the insurance context, considering two agents, agent A and agent B, agent A plays a role of an insured who is interested in having an insurance protection against claims, and agent B plays the role of an insurer. Let ξ a risky position of agent A.

To reduce the risk exposure, the agent A issues a financial derivative F and tries to sell F to agent B for a price π. After the transaction, the risky position ξ is shared between agent A and agent B. Therefore, they need to consider the optimization problem

$$\inf_{F\in L^2(R)}\{\rho^A(\xi-F)+\rho^B(F)\},\quad \xi\in L^2(R),$$

with translation invariant and convex risk measures ρ^A and ρ^B.

We now move to a dynamic version. We are interested in solving the following optimization problem

$$ess \inf_{F\in L^2(R)}\{\rho_t^A(\xi-F)+\rho_t^B(F)\},\quad 0\le t\le T,\ \xi\in L^2(R),$$

where ρ_t^A and ρ_t^B are translation invariant and convex dynamic risk measures defined by g-expectation via BSDEs. That is, they are expressed as follows:

$$\rho_t^A(\xi-F)=-\xi+F+\int_t^T g^A(s,Z^A(s))ds-\int_t^T Z^A(s)dWs,$$
$$\rho_t^B(F)=-F+\int_t^T g^B(s,Z^B(s))ds-\int_t^T Z^B(s)dWs.$$

Then, it is well known that an optimal solution F^* to the (dynamic) optimal risk sharing problem.

On the other hand, we are also interested in Double Barrier BSDEs (DBBSDEs) (see Harraj et. al. [4], Hamadène et.al. [5] and Karouf [6], for example) as an application of BSDEs, written by this form:

$$\begin{aligned}
&Y_t=\alpha+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds-\int_t^T Z_sdW_s+(K_T^+-K_t^+)-(K_T^--K_t^-),\\
&L_t\le Y_t\le U_t,\\
&\int_0^T (Y_t-L_t)dK_t^+=\int_0^T (U_t-Y_t)dK_t^-=0,\quad 0\le t\le T,
\end{aligned}$$

where $K_t^{\pm}$ is continuous and increasing processes such that $K_0^{\pm} = 0$.

In practice, it is general that insurers and insured persons trade each other under some constraints. Therefore, combining DBBSDEs and ORSP, we are now tackling Optimal risk sharing problem with constraints (upper and lower bound) in this study.

2 Disclaimer

Contents expressed or implied in this presentation are solely those of the author, and do not represent the views of Mitsubishi UFJ Trust and Banking Corporation.

参考文献

[1] Barrieu, P. and El Karoui, N., Optimal derivatives design under dynamic risk measures, in: Yin, G., Zhang, Q. (eds.) Proceedings of an AMS-IMS-SIAN. Mathematics of finance, pp. 13–26, 2004.

[2] Barrieu, P. and El Karoui, N., Pricing, Hedging and Optimally Designing Derivatives via minimization of risk measures, in: Carmona, R. (eds.) Indifference Pricing-Theory and Applications, Princeton University Press, Princeton, pp. 77–141, 2005.

[3] Jiang, L., Convexity translation invariance and subadditivity for g-expectation and related risk measures, The Annals of Applied Probability, 18. (2008), 245–258.

[4] Harraj, N., Ouknine, Y. and Turpin, I., Double-barriers-reflected BSDEs with jumps and viscosity solutions of parabolic integrodifferential PDEs, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 1. (2005), 37–53.

[5] Hamadène, S., Lepeltier, J. P. and Matoussi, A., Double barrier backward SDE's with continuous coefficient, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 364. (1997), 161–175.

[6] Karouf, M., Reflected Solutions of Backward Doubly SDEs Driven by Brownian Motion and Poisson Random Measure, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 39. (2019), 5571–5601.

離散時間最大値に依存する金融商品のデルタの計算

澤原水月 [1], 中津智則 [2]
[1,2] 芝浦工業大学
e-mail : mf23059@shibaura-it.ac.jp

1 概要

本講演では，確率微分方程式の解を株価のモデルとし，ペイオフが株価の離散時間最大値に依存する金融商品を考える．このような金融商品のデルタと呼ばれるリスク指標を，部分積分公式を用いて計算する手法について述べる．

2 問題設定と既存結果

以下の確率微分方程式を考える：

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma_1(s)\sigma_2(X_s)dW_s, \tag{1}$$

ただし，$b : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma_1 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\sigma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ とし，W は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の一次元標準ブラウン運動とする．さらに時刻 $t \in [0,T]$ における株価 S_t を $S_t = e^{X_t}$ とする．

$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < T$ とペイオフ関数 f に対して $E^P[f(\max_{1\le i\le n} S_{t_i}, S_T)]$ は離散時間バリアオプションの価格を表す．本講演では $\frac{\partial}{\partial x_0}E^P[f(\max_{1\le i\le n} S_{t_i}, S_T)]$ の値を計算する手法について述べる．特に部分積分公式を用いて f の微分が現れない形でこれを表現する．

[1] では，このような確率変数に対する部分積分公式を導き，確率密度関数の性質を調べている．また [2] では株価の連続時間最大値に依存するオプションに対して，デルタの計算のための部分積分公式が示されているが，非常に複雑な形の部分積分となっており，数値計算を行う際のコストが大きくなることが予想される．そのため今回は，比較的簡単な形で部分積分公式が与えられる [1] で用いられたアイデアを修正し，部分積分公式を得た．

3 主結果

確率微分方程式 (1) の係数とペイオフ関数 f に対して，以下を仮定する．

仮定 (A)

(A1) $b(t,\cdot) \in C_b^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ が $t \in [0,\infty)$ について一様に成り立つ．

(A2) $\sigma_1(\cdot) \in C_b^0([0,\infty);\mathbb{R})$ で，ある $c_1 > 0$ が存在し $|\sigma_1(t)| \ge c_1$ が全ての $t \in [0,\infty)$ に対して成り立つ．

(A3) $\sigma_2(\cdot) \in C_b^2(\mathbb{R};\mathbb{R}_+)$ で，ある $c_2 > 0$ が存在し $\sigma_2(x) \ge c_2$ が全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ．

(A4) $f \in C_b^1(\mathbb{R}_+^2;\mathbb{R}_+)$.

定理 1 (A) を仮定する．このとき，ある可積分な確率変数 H_n が存在して

$$\frac{\partial}{\partial x_0}E^P\left[f\left(\max_{1\le i\le n} S_{t_i}, S_T\right)\right] = E^P\left[f\left(\max_{1\le i\le n} S_{t_i}, S_T\right)H_n\right] \tag{2}$$

が成り立つ．

注意 2 定理 1 において H_n の選び方は一通りではない．

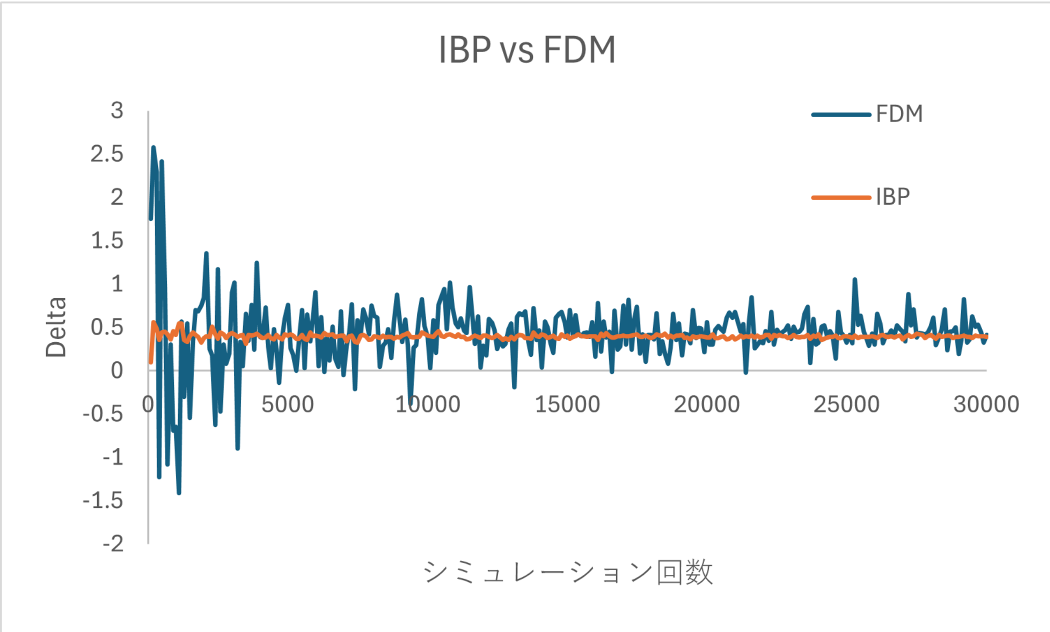
実際，H_n の構成については

$$\int_0^{t_i} \sigma_1(r) u_r dr = 1, 1 \leq \forall i \leq n, \int_0^T \sigma_1(r) u_r dr = 1$$

を満たすような $\{u_r, 0 \leq r \leq T\}$ を選ぶ必要がある．そのためには，$u_r = \frac{v_r}{\sigma_1(r)}, 0 \leq r \leq T$ とし，$\int_0^{t_1} v_r dr = 1$, $v_r = 0, r > t_1$ となる v を選べばよい．

4 数値計算結果

以下に，アップアウトコールオプションのデルタを (2) を用いて計算した結果と，有限差分法を用いてデルタを計算した結果を記載した：



上の図で，IBP は (2) を，FDM は有限差分法をそれぞれ使用しデルタを計算した結果である．横軸はモンテカルロシミュレーションの回数を表している．部分積分による計算の方が安定した数値実験結果を示していることが見て取れる．

参考文献

[1] T. Nakatsu, On density functions related to discrete time maximum of some one-dimensional diffusion processes, Appl. Math. Comput., 441(Mar. 2023), Article 127672.

[2] E. Gobet, A. Kohatsu-Higa, Computation of greeks for barrier and look-back options using Malliavin calculus, Electron. Commun. Probab., 8 (2003), 51-62.

わが国の発電事業者の卸電力取引の数理モデル

遠藤　操 [1]
[1] 一般財団法人電力中央研究所　社会経済研究所
e-mail : endo@criepi.denken.or.jp

1　概要

旧一般電気事業者（旧一電）の発電部門は，電力卸売の「内外無差別」のため，様々な条件の卸標準メニューを公表している [1]. どのような条件で電力卸売を行うかは，事業者にとって販売競争を左右する重要な課題である．本研究では，わが国の卸電力取引の市場環境や慣習，旧一電への規制等を考慮したうえで，事業者が取り得る電力卸売の契約条件を類型化し，その損益関数をモデル化する．

2　卸電力取引・燃料調達・ヘッジ取引に関する想定

卸電力取引として，相対契約と日本卸電力取引所 (JEPX) スポット取引を想定する（簡略化のため，同一エリア内の取引のみを想定する）．相対契約における契約期間のコマ数（1 コマ 30 分）を M とする．ヘッジ取引は，東京商品取引所 (TOCOM) もしくは European Energy Exchange(EEX) の電力先物・LNG 先物を想定する．わが国の取引慣習をふまえて，相対契約の交渉（もしくは公募と入札）が先に行われ，残った供給力がスポット市場に入札されるものとする．需給調整市場への応札は行わないものとする．LNG は，簡略化のため，すべて時間のラグなくスポット調達できるものと仮定する．以下のノーテーションを用いる:

i　卸売の類型のインデックス.

k　卸売期間のコマのインデックス.

e_k^i　卸売の類型 i のコマ k における取引電力量 [kWh]．$e_k^i \geq 0$ とする.

π_i　卸売の類型 i の損益関数.

$p^{\mathrm{Fix}(i)}$　相対契約における固定単価 (類型 $1, 2$)，もしくは，燃料費調整前の卸売単価（類型 3).

p_k^{Spot}　コマ k の JEPX スポット価格.

f_k^p　コマ k を含む限月のヘッジ時点における電力先物価格.

l^{ExDate}　相対契約時点の LNG スポット価格.

l_k^{Spot}　コマ k（を含む日）における LNG スポット価格.

f_k^l　コマ k を含む限月のヘッジ時点における LNG 先物価格.

α　事業者が保有するガス火力発電所の熱効率.

s　通告変更権に対する対価.（対価（スイングオプション価値）の計算については [2] 参照.）

3　電力卸売の類型と損益関数

1) **相対契約（固定単価）**：卸売単価が固定で，燃料費調整や通告変更がない場合.（固定単価による従量料金とは別に基本料金が設定される契約もあるが，ここでは考慮しない．）

$$\pi_1 = \sum_{k=1}^{M} e_k^1 (p^{\mathrm{Fix}(1)} - \frac{1}{\alpha} l_k^{\mathrm{Spot}}).$$

2) **相対契約（通告変更あり）**：卸売単価が固定で，契約 kW の範囲で受給量を変更できる通告変

更権（スイングオプション）がある場合．ただし，オプション対価 s は固定単価とは別に受け取るものとする．また，小売電気事業者は経済合理的に最大限権利を行使するものとする．

$$\pi_2 = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} e_k^2(p^{\mathrm{Fix}(2)} - \frac{1}{\alpha} l_k^{\mathrm{Spot}}) + s, & p_k^{\mathrm{Spot}} > p^{\mathrm{Fix}(2)} \text{ のとき，} \\ s, & \text{それ以外のとき．} \end{cases}$$

3) **相対契約（燃料費調整あり）**：卸売単価に燃料費調整がある場合．調整前の卸売単価を $p^{\mathrm{Fix}(3)}$ とし，契約時点の LNG スポット価格 l^{ExDate} を基準として価格変動が調整されるものとする．

$$\pi_3 = \sum_{k=1}^{M} e_k^3(p^{\mathrm{Fix}(3)} - \frac{1}{\alpha} l^{\mathrm{ExDate}}).$$

4) **相対契約（スポット市場価格連動）**：卸売単価がスポット市場価格連動の場合．

$$\pi_4 = \sum_{k=1}^{M} e_k^4(p_k^{\mathrm{Spot}} - \frac{1}{\alpha} l_k^{\mathrm{Spot}}).$$

5) **スポット市場入札**：旧一電の発電部門は，相対契約で電力供給をした後の余剰供給力全量について，限界費用に基づく価格でスポット市場に入札する義務を課されている．また，燃料制約を発生させない調達努力も求められている．限界費用について多くの旧一電が「LNG スポット調達等追加的な燃料調達価格を考慮した価格」の採用を表明しており，ここでは，LNG スポット価格から発電所の熱効率を用いて計算された燃料費を限界費用としてスポット売り入札されるものとする．

$$\pi_5 = \sum_{k=1}^{M} e_k^5(p_k^{\mathrm{Spot}} - \frac{1}{\alpha} l_k^{\mathrm{Spot}})^+.$$

5′) **スポット市場入札 (ヘッジあり）**：スポット入札量の一部 $e_k^{5'}$ について，電力先物と LNG 先物を使って，あらかじめスパーク・スプレッドを固定するヘッジ取引を行う場合 [3]．ヘッジできる量には先物の商品設計（商品の対象期間，対象エリア，ロード種別など）による制約がある．

$$\pi_{5'} = \sum_{k=1}^{M} e_k^{5'}(f_k^p - \frac{1}{\alpha} f_k^l).$$

4　まとめ

本研究では，わが国の電気事業の市場環境を想定して，旧一般電気事業者の発電部門による電力卸売を類型化し，その損益関数をモデル化した．今後の課題は，事業者の意思決定に資するように，各類型のポートフォリオについて期待収益とリスクを計測する手法を提案することである．

参考文献

[1] 電力・ガス取引監視等委員会, 内外無差別な卸売の実施に向けた取組状況等について, 第 91 回制度設計専門会合事務局提出資料, 2023 年 11 月 27 日.

[2] 遠藤, わが国の卸電力取引におけるスイング・オプションの価値評価, エネルギー・資源学会論文誌, 41(2020), pp.233-242.

[3] Endo, M., Optimization of electricity futures and LNG futures trading under practical constraints of power producers in Japan, JSIAM Letters, 16(2024), pp.41-44.

バブルモデルにおけるオプション価格の数値的解法

都築幸宏
信州大学経法学部
e-mail : yukihirotsuzuki@shinshu-u.ac.jp

1 概要

株価が局所マルチンゲールであるが, マルチンゲールでないようなモデルをバブルモデルという. このようなモデルにおいて, ペイオフが線型増大度を持つ場合 Black–Scholes 方程式は複数の解をもち, デリバティブ価格は最小解として特徴づけられる. 有限差分法などの数値的解法においては境界条件の与え方によって求まる解が決まるが, 最小解に対応する境界条件は一意に定まらず, いくつかの方法 ([1],[2],[3]) が提案されている. 本講演では, 講演者が提案する解法 [4] を紹介する.

2 問題

株価を Y とし, リスク中立測度の下で以下の確率微分方程式に従うとする:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(Y_u) d\beta_u. \tag{1}$$

ただし β はブラウン運動であり,0 は吸収壁とする. $\sigma : I \longrightarrow (0,\infty)$ は, 局所的に 1/2-Hölder 連続とする. このモデルにおいて受け渡し時刻 T の先渡し価格は $v_0(t,y) := E_y[Y_{T-t}]$ で与えられ ($E_y[\cdot]$ は $Y_0 = y > 0$ の条件の下での期待値とする), 以下の偏微分方程式を満たす:

$$\begin{cases} v_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 v_{yy}, \\ v(T,y) = y. \end{cases} \tag{2}$$

偏微分方程式 (2) の解は *classical solution* と呼ばれるが, 特に関数 v_0 のようにペイオフの期待値で表される解は *stochastic solution* と呼ばれる.

バブルモデルにおいて偏微分方程式 (2) の解は複数存在する. たとえば,$v(t,y) = y$ は v_0 と異なる解である:

$$v_0(t,y) = E_y[Y_{T-t}] < y = v(t,y). \tag{3}$$

不等号は Y が優マルチンゲールであることに因る. デリバティブ価格は偏微分方程式 (2) の最小解として特徴づけられる.

最小解 v_0 が明示的に表されない場合, 数値的な解法に頼ることになる. 有限差分法など有界領域 $[0,T) \times (0,n]$ において数値的に偏微分方程式 (2) を解く場合,$y = n$ における境界条件

$$v(t,n) = k_n(t) \tag{4}$$

を与える (あるいは $v_y(t,n)$ に関する条件を与えてもよい). この場合, 解の一意性が成り立ち, 問題は境界条件 k_n の与え方に帰着される. ただし境界条件をペイオフの値 $k_n(t) = n$ とすれば,$v(t,y) = y$ が求まり最小解は得られない. 境界条件 $k_n(t)$ に対応する解を $v^{(n)}$ とする. たとえば [1] は $v_y(t,n) = 0$ とし, [2] は $k_n(t) = 0$ とした. また [3] は偏微分方程式 (2) を変数変換により別の偏微分方程式に帰着した.

3　数値的解法 [4]

講演者の研究 [4] では $y=n$ における境界条件として次を提案している:

$$v(T-t,n) = -2\frac{d}{d\tau}\int_0^n yv(T-t,y)\frac{dy}{\sigma(y)^2}. \tag{5}$$

これは $n=\infty$ とすれば真の解 v_0 が満たす条件である．また境界条件として

$$k_n(t) = 2\int_0^n v^{o,n}(\tau,y)\frac{dy}{n} \tag{6}$$

とすれば, 対応する解 $v^{(n)}$ は $v_0 \geq v^{(n)}$ をみたす．さらに $v^{(n)}(\cdot,n)$ と k_n は $n\to\infty$ のとき真の解 $v_0(\cdot,\infty)$ に収束する．ただし,$v^{o,n}$ は n にバリアがあるノックアウト型フォワードの価格である．

これらは [5] で得られた結果を発展させたものである．[5] では 3 次元ベッセル過程の Pitman 定理を用い, 自社株の新規発行による資金調達を考慮した資金調達者にとってのデリバティブ価格を導出した．たとえば, ブラウン運動 β に対して X を

$$X_t = X_0 + \beta_t + \int_0^t \frac{1}{X_u}du \tag{7}$$

とすれば X は 3 次元ベッセル過程であり, 本稿の問題では $Y=1/X$,$\sigma(y)=y^2$ に相当する．Pitman 定理とは 3 次元ベッセル過程 X を

$$X_t = B_t + 2J_t, J_t := \inf_{u>t} X_u \tag{8}$$

と分解する定理であり,B は (X,J) が生成するフィルトレーションに関するブラウン運動である．[5] では, 非減少過程 J の増加を資金調達活動の結果とみなし, 調達資金も資金調達者の資産価格過程に考慮しデリバティブ価格を導出した．境界条件 (6) に対応する解 $v^{(n)}$ はこの資金調達者にとってのデリバティブ価格であり, $n\to\infty$ とすれば (5) で $n=\infty$ とした関係式が得られる．

謝辞　討論していただいた信州大学理学部乙部厳己准教授に感謝する. 本研究は科研費 23K01466 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Erik Ekström, Per Lötstedt, Lina Von Sydow, and Johan Tysk, Numerical option pricing in the presence of bubbles, *Quantitative Finance*, Vol. 11(8) (2011), 1125–1128.

[2] Qingshuo Song and Pengfei Yang, Approximating functionals of local martingales under lack of uniqueness of the Black–Scholes PDE solution, *Quantitative Finance*, Vol. 15(5) (2015), 901–908.

[3] Umut Çetin, Diffusion transformations, Black–Scholes equation and optimal stopping, *The Annals of Applied Probability*, Vol. 28(5) (2018), 3102–3151.

[4] Yukihiro Tsuzuki, Boundary conditions at infinity for Black-Scholes equations, Preprint (2024), arXiv:2401.05549.

[5] Yukihiro Tsuzuki, Pitman's theorem, Black-Scholes equation, and derivative pricing for fundraisers, Preprint (2023), arXiv:2303.13956.

