

安定マッチング問題に対するアルゴリズム研究

宮崎 修一¹

¹ 兵庫県立大学 情報科学研究科

e-mail : shuichi@sis.u-hyogo.ac.jp

1 はじめに

安定マッチング問題 [1] とは、他者に対して選好を持つ参加者の集合が入力として与えられた際、逸脱者が生じない「安定な」マッチングを求める問題である。研修医配属や学校配属をはじめ実世界の多くの配属への応用があり、経済学、数学、計算機科学等の分野で広く研究されている。本稿では、著者がこれまでにやってきた各種安定マッチング問題に対するアルゴリズム開発や計算困難性の成果を幾つか紹介する。なお、紙面の都合上、定義や研究成果を正確には述べられていない点や、関連する参考文献を網羅できていない点を断っておく。

2 諸定義

ここでは安定マッチング問題を研修医配属の文脈で定義する。入力は研修医 $r_i (1 \leq i \leq n)$ と病院 $h_j (1 \leq j \leq m)$ からなる。各病院 h_j は受け入れたい研修医数の最大値である**定員** u_j を持つ。また、各研修医は病院を好みの順に並べた全順序の**選好リスト**を持っており、同様に各病院も研修医に対する選好リストを持つ。各研修医を高々 1 つの病院に割り当て、各病院 h_j に割り当てられた研修医が u_j 人以下である配属を**マッチング**と呼ぶ。マッチング M において研修医 r_i は病院 h_j に配属されていないが、 r_i を h_j に配属することにより r_i と h_j が共により良い状態になるとき、 (r_i, h_j) を M の**ブロッキングペア**と呼ぶ。ブロッキングペアを持たないマッチングを**安定マッチング**と呼ぶ。安定マッチングを求める、入力サイズの多項式時間で動作するアルゴリズムの存在が知られている [1]。

3 同順位リストにおける最大サイズ安定マッチング問題

2 節で述べた定義では選好リストは全順序であるが、より柔軟性を持たせる場合には選好リストに同順位を含めることが考えられる。選好リストに同順位を許した場合、弱安定と呼ばれる安定性では異なるサイズ（配属先を得た研修医の数）のマッチングが存在する。（同順位を許さない場合は全ての安定マッチングが同サイズであることが知られている [2].）出来るだけ多くの研修医の配属先を決めることが望ましいため、サイズの大きな安定マッチングを求めることが望ましい。我々は、この問題が NP 困難であることを示し [3]、近似可能性や近似困難性の結果を与えた [4, 5]。

4 定員下限付き安定マッチング問題

安定マッチング問題では、各病院 h_j は定員上限 u_j を宣言するが、これだけでは不十分な状況もある。例えば日本の研修医配属においては、都市部の病院への配属希望が多く、地方の病院に配属される研修医数が少ないという問題がある。また、大学における卒論生の研究室配属では、各研究室に配属される人数が均等になることが求められる場合がある。このような状況を取り扱えるモデルとして、我々は各病院 h_j が定員下限 ℓ_j をも宣言できるモデルを提案した。ここでは各病院 h_j に ℓ_j 人以上 u_j 人以下が配属される安定マッチングを求めることが理想であるが、必ずしも存在しないことが簡単な考察から分かる。このような場合の代替案として、我々は 2 つのアプローチで研究を行ない、それぞれの場合について近似可能性や不可能性の結果を得た。1 つは全ての病院が定員上下限を満た

したうえでブロッキングペア数が最小となるマッチングを求めるものであり [6], 他方は安定性と定員上限を満たしたうえで下限の充足率が最大となるマッチングを求めるものである [7, 8].

5 地域上限付き安定マッチング問題

4 節で述べた研修医配属数の都市部への偏りを解決する別のモデルとして, 地域上限付き安定マッチング問題が提案されている [9]. このモデルでは幾つかの病院をまとめた「地域」を定義し, 地域における研修医配属数の上限を別途設定する. 例えば定員 3, 3, 4 の 3 つの病院をまとめた地域の定員上限を 7 と設定した場合, これらの病院の定員上限の総和は 10 であるが, 地域上限の制約により合わせて最大 7 名しか配属できないというものである. このモデルにおいて安定マッチングの存在判定を問う問題の NP 完全性が知られていたが [10], 我々は選好リストの長さ, 地域に入る病院の最大数, 地域に重なりを許すか否かという観点から, 問題が多項式時間で解ける場合と NP 完全になる場合の境界を明らかにした [11].

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP20K11677 の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] D. Gale and L. S. Shapley, “College admissions and the stability of marriage,” *Amer. Math. Monthly*, Vol. 69(1), pp. 9–15, 1962.
- [2] A. E. Roth, “On the allocation of residents to rural hospitals: a general property of two-sided matching markets,” *Econometrica*, Vol. 54(2), pp. 425–427, 1986.
- [3] K. Iwama, D. F. Manlove, S. Miyazaki, and Y. Morita, “Stable marriage with incomplete lists and ties,” *Proc. ICALP 99*, pp. 443–452, 1999.
- [4] K. Iwama, S. Miyazaki, N. Yamauchi, “A 1.875-approximation algorithm for the stable marriage problem,” *Proc. SODA 2007*, pp. 288–297, 2007.
- [5] K. Iwama, S. Miyazaki, and H. Yanagisawa, “A 25/17-approximation algorithm for the stable marriage problem with one-sided ties,” *Algorithmica*, Vol. 68(3), pp. 758–775, 2014.
- [6] K. Hamada, K. Iwama, and S. Miyazaki, “The hospitals/residents problem with lower quotas,” *Algorithmica*, Vol. 74(1), pp. 440–465, 2016.
- [7] H. Goko, K. Makino, S. Miyazaki, and Y. Yokoi, “Maximally satisfying lower quotas in the hospitals/residents problem with ties,” *Proc. STACS 2022*, pp. 31:1–31:20, 2022.
- [8] K. Makino, S. Miyazaki, and Y. Yokoi, “Incomplete list setting of the hospitals/residents problem with maximally satisfying lower quotas,” *Proc. SAGT 2022*, pp. 544–561, 2022.
- [9] Y. Kamada and F. Kojima, “Efficient matching under distributional constraints: theory and applications,” *American Economic Review*, Vol. 105(1), pp. 67–99, 2015.
- [10] H. Aziz, A. Baychkov, and P. Biró, “Summer internship matching with funding constraints,” *Proc. AAMAS 2020*, pp. 97–104, 2020.
- [11] K. Hamada and S. Miyazaki, “Refined computational complexities of hospitals/residents problem with regional caps,” *Theoretical Computer Science*. Vol. 989: 114389, 2024.

不都合な議員定数

谷本 明子¹, 王 立坤¹, 趙 亮¹

¹ 京都大学大学院総合生存学館

e-mail: liangzhao@acm.org

1 概要

国会は、国民を代表する議員から構成する、最も重要な国家機関の一つである。当然ながら、議員の定数は、国会の第一問題と言えよう。しかし、これまでの議員定数の決定は、決して容易なことではない。実際、アメリカ憲法の父と呼ばれる James Madison は、都合のよい議員定数の決定を最も敏感な政治問題とした (The Federalist, No. 55, 1788)。これに関して、国会議員の定数と人口の間に劣線形 (sublinear) な関係が成立することは、半世紀前から指摘されている ([1, 2])。それを支持する理論もいくつか複数の視点から提案されている ([3, 1, 4, 5] 等)。

本発表は、同様な劣線形関係が地方の議会においても見られることを報告する。これらの事実は、従来の法学・政治学の認識にとって不都合な発見と考えられる。まず、投票における一票の価値を計算する数式 (席数/人口) に問題あることを示す ([7])。また、選挙区の決定に関しては、線形関係なら問題ない現象として、選挙区を細かく割れば割るほど代表に無駄が生じることが考察される。

2 議員定数

国会議員の選挙は、埋めたい議席を各選挙区に割り当てて、それぞれの選挙区で行なわれている。選挙区の構成によって、3種類の選挙制度が存在する。

- 大選挙区制：選挙区の数が1、すなわち全国範囲で選挙を行う場合。
- 小選挙区制：選挙区の数が議席数に等しく、それぞれの選挙区では一人だけが選出される場合。
- 中選挙区制：それ以外 (複数の選挙区が存在し、複数の議員が選出される選挙区がある場合)。

ただし、小選挙区制のなかでも、中選挙区制のように議席を下位の行政区に割り当ててから、それぞれの行政区で小選挙区制を実施する場合が多い。本研究は、そのような制度を準中選挙区制と呼び、中選挙区制と同様、議席をどのように各行政区・選挙区に割り当てるかのことに注目する。

現行の制度は、議席を人口に比例して配分している。配分される議席数が整数とならない場合もあるので、整数となるような丸めアルゴリズムが様々な提案されている ([6])。しかし、人口に比例することは、暗黙的に (適切な) 議員数が人口に比例するという仮定を用いている ([7])。議員定数が人口の劣線形関係にあるなら、それに適した非線形な数式で一人の重みを評価しなければならない ([7, 6])。

上記の指摘を社会に実装するに当たって、議員定数と人口の関係を明らかにする必要がある。その関係が一般に次のモデルで表現できるとし、定数 γ の値を調査することとする。

$$\text{議員定数} \propto \text{人口}^{\gamma} \quad (1)$$

国会を対象に確認している先行研究では、半世紀前から今日まで、一貫して $\gamma \approx 0.4$ を示している ([1, 2, 4, 5])。一方、地方の議会に関する先行研究は少なく、最近の論文は見当たらない。そこで本研究は、諸国の地方議会の議員定数について調査する。表 1 では、2023 年 5 月の時点で集めた諸国都道府県レベルの地方議会の状況を報告する ([8])。この調査結果から、 γ が 0.4 の近くにある値をとっていることが分かる。実際、平均が 0.384、標準偏差が 0.095 になっている。

表 1. 諸国の地方議会の議員定数と人口の関係

国	豪	伯	加	仏	独	尼	伊	日	韓
γ	0.50	0.37	0.33	0.40	0.35	0.31	0.24	0.41	0.55
調整 R^2	0.95	0.79	0.98	0.69	0.70	0.86	0.40	0.96	0.67

3 従来の考え方にとっての不都合

議員定数が一般に人口の劣線形関係にあることを，データを用いて確認した．その結果は，人口が変動したらどのように議員定数を改定することに役立つであろう．しかし，従来の考え方にとって不都合な面も存在する．1 つは，一人当たりの重みを計算するために用いられる数式（席数/人口）は適切でないことになる．これについての考察は，[7, 6] 等に詳しく述べられている．

本発表は，さらにもう一つの不都合を示す．簡単のため人口を n ，議員定数を r ，適切な議員定数を r^* と書く．式 1 によると，ある定数 $a > 0$, $\gamma < 1$ が存在し， $r^* = an^\gamma$ ．従って，議席数を r^* にすれば適切となる．一方，選挙区を人口それぞれ n_1 と n_2 ($n_1 + n_2 = n$) の 2 つにしたら，それぞれの選挙区における適切な議員定数が $r_1^* = an_1^\gamma$ と $r_2^* = an_2^\gamma$ となり， $\gamma < 1$ より，全体の議員定数が $r = r_1^* + r_2^* = an_1^\gamma + an_2^\gamma > an^\gamma$ となってしまう．逆に，全体として r^* のままにすると，少なくとも一つの選挙区に割り当てる議席数が，当該選挙区の適切議員定数より少なくなってしまう．

4 まとめ

本発表は，国会と同様，諸国都道府県レベルの議会の議員定数も人口の劣線形関係にあることを示した．このことは，従来の一人の重みを計算する式や区割りのやり方に問題あることを示唆する．

謝辞 本研究は，JSPS 科研費 18K11182, 23K10997 の助成を受けたものである．

参考文献

- [1] R. Taagepera, The size of national assemblies, Soc. Sci. Res., 1(4) (1972), 385–401.
- [2] G.J. Stigler, The Sizes of Legislatures, J. Legal Studies, 5(1) (1976), 17–34.
- [3] L.S. Penrose, The elementary statistics of majority voting, J. Royal Statistical Society, 109(1) (1946), 53–57.
- [4] E. Auriol and R.J. Gary-Bobo, On the optimal number of representatives, Public Choice, 153(3-4) (2012), 419–445.
- [5] L. Zhao, T. Peng, An Allometric Scaling for the Number of Representative Nodes in Social Networks, in: Masuda N. et al. (eds) Proc. NetSci-X 2020, pp. 49–59, 2020.
- [6] W. Lyu and L. Zhao, Axioms and Divisor Methods for a Generalized Apportionment Problem with Relative Equality, Mathematics, 11(15) (2023), 3270.
- [7] L. Zhao, A. Tanimoto, W. Lyu, Standardizing Representation for Equality with a Population Seat Index, arXiv, <https://arxiv.org/abs/2212.14790>.
- [8] A. Tanimoto and L. Zhao, Subnational Legislatures, Harvard Dataverse, <https://doi.org/10.7910/DVN/A3QGGL>.

感度解析を利用した得票数と獲得議席数の関係分析

諸星 穂積

政策研究大学院大学

e-mail: morohosi@grips.ac.jp

1 概要

選挙での政党の得票数と獲得議席数の間の関係については、長い研究の歴史がある。本論では、感度解析 [1] の手法を利用して、過去の衆議院の小選挙区選挙のデータを分析してみた結果を紹介する。

小選挙区の集合を D 、政党の集合を P で表す。選挙区 $i \in D$ で、政党 $j \in P$ の候補者の得票数を v_{ij} とする。小選挙区制では、各選挙区の最大得票者が当選するから、選挙区 i での当選者の党は $j_w(i) = \operatorname{argmin}_{j \in P} v_{ij}$ となる。したがって、政党 j の獲得議席数は、

$$f^{(j)} = \sum_{i \in D} 1\{j_w(i) = j\}, \quad (1)$$

となる。ここで、 $1(A)$ は、 A が真のとき 1、偽のとき 0 をとる特性関数。

感度分析では、得票数 v_{ij} が確率的に変化するとし、議席数 $f^{(j)}$ がどのように変化するかを調べる。確率の与え方は様々であるが、本論では、政党 j の得票数合計が $1 \pm \alpha$ の範囲で一様に相対変化する、

$$V_{ij} = v_{ij}(1 + \epsilon_j), \quad \epsilon_j \sim U[-\alpha, \alpha], \text{ i.i.d.} \quad (2)$$

と仮定して計算を行った。政党 j の議席数 $f^{(j)}$ は、自党の得票数 V_{ij} , $i \in D$, (具体的には ϵ_j で決まる) ばかりでなく、他党 k の得票数 V_{ik} , $i \in D$, (ϵ_k で決まる) にも影響を受けるわけで、その効果を、過去の衆議院選挙のデータから調べてみた結果を報告する。

2 Sobol' 指数

1 次の Sobol' 指数は、一般的に変数 Y が変数 X_k の関数として

$$Y = f(X_1, \dots, X_p), \quad (3)$$

と計算されるとき、 X_k の Y への影響を、分散を使って評価するもので、以下のように定義される。

$$S_k = \operatorname{Var}[E[Y|X_k]]/\operatorname{Var}[Y]. \quad (4)$$

本論では、各政党の議席数 $f^{(j)}$ が Y にあたる (複数の Y がある状況)。また、得票数の変動は ϵ_k で与えるので、これが X_k にあたる。したがって、計算する Sobol' 指数は、

$$S_k^{(j)} = \frac{\operatorname{Var}[E[f^{(j)}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)|\epsilon_k]]}{\operatorname{Var}[f^{(j)}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)]} \quad (5)$$

となる。Sobol' 指数の具体的な計算法については、[1, 2] を参照してほしい。

3 データ分析

衆議院総選挙のデータ (2000, 2003, 2005, 2009, 2014, 2017, 2021) を使って、計算を行った (2012 のデータ未入手)。最初に使ったデータの概要を図 1, 2 に示す。この間、2009 の政権交代、2017 の希望の党の出現、2014 頃からの維新の出現などがある。

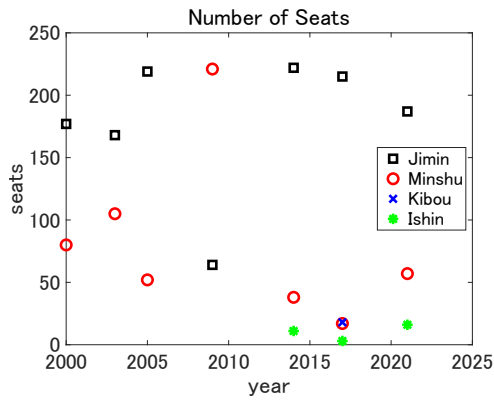


図 1. 各党の小選挙区獲得議席数.

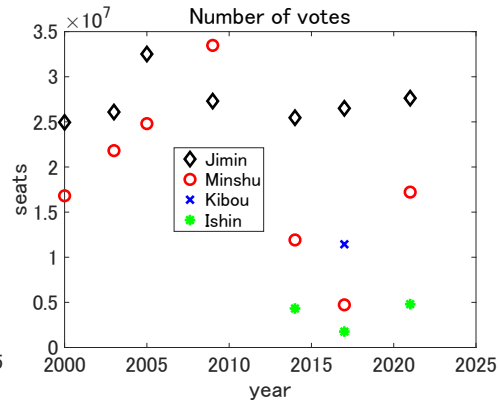


図 2. 各党の小選挙区得票数.

このデータから各政党の獲得議席数を出力と考え、得票数を入力として、な Sobol' 指数を計算した。得票数の変化の割合は $\alpha = 0.05$ とした。指数の値が大きくなったのは、1) 各党自身の得票数が自身の議席数に与える影響 (図 3), 2) 自民党の得票数が各党の議席数に与える影響 (図 4), 3) 自民党の議席数が各党の得票数からうける影響 (図 5), であった。

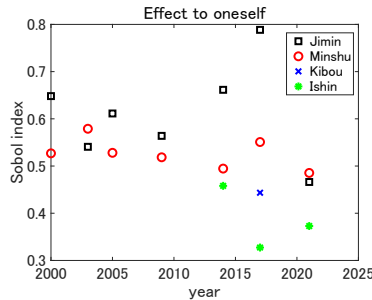


図 3. 各党の各党自身への影響.

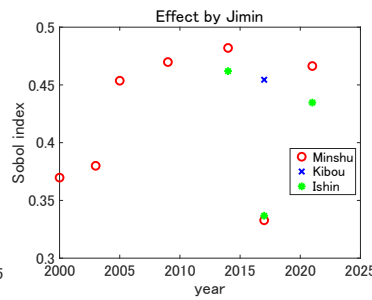


図 4. 自民党の各党への影響.

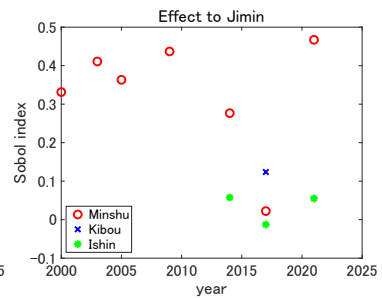


図 5. 各党の自民党への影響.

図で大きな変化が見られるのは、2017 に希望の党が出現して、民主党が議席を減らしたとき、自民党は自分自身の得票数からの影響が非常に大きくなっている、つまり他党からの影響が小さくなった (図 3)。一方で、他党が自民党に与える影響はいずれの党も小さくなっている (図 5)。自民党から受ける影響は、希望の党が大きく、他党は小さい (図 4)。

政権交代時の 2009 は、他の年と比べて大きな変化はない。自民党と民主党の互いへの影響という点では、他の年と似たような状況ということなのだろう。

4 まとめ

2000 年以降の衆議院小選挙区選では、自民党と民主党が互いに大きく影響しあっていることが、感度分析の計算により示されたと思う。

参考文献

- [1] A. Saltelli, K. Chan, and E. M. Scott, Sensitivity Analysis, Wiley, 2000.
- [2] S. Da Veiga, F. Gamboa, B. Iooss, and C. Prieur, Basics and Trends in Sensitivity Analysis, SIAM, 2021.