

固体構造に対する混合型定式化に基づく分離型時間積分

山田 貴博
横浜国立大学
e-mail : tyamada@ynu.ac.jp

1 はじめに

固体構造の動的問題における時間方向の離散化において、陽解法は条件付き安定ではあるが非線形問題においても近似方程式は線形となり、基本的に Newton 法のような非線形反復計算が必要なく、ロバストな計算手法として用いられることが多い。一方、陰解法では無条件安定な手法が存在するが、非線形問題では近似方程式は非線形方程式となる。この非線形方程式に対しては、反復計算を用いるか、線形化した近似方程式を解き非線形性から生じる残差は次のステップで解消されるような手法が用いられる。このような陰解法は、問題により非線形性に起因して計算が停止することがある。精度に関しては、一般に同じ時間刻みを設定した場合、陽解法が陰解法より誤算が小さいことが知られている [1]。本研究では、高精度でロバストな陽解法を基本とした時間積分を考える。

固体構造の動的問題を波動現象と捉えと、ベクトル場に対する支配方程式として記述された問題であり、一般に複数の波動伝播速度が内在することとなる。また、時間積分の数値安定性は波動伝播速度に対するクーラン数により評価することができる。弾性体の問題においては、体積変形の伝播を表す P 波と等容変形の伝播を表す S 波に対して、それぞれ異なる波動伝播速度を有することが知られている [2]。特に微圧縮性材料においては、P 波速度は S 波速度より数倍以上大きくなる。このような問題に陽解法を適用すると、時間刻みは P 波速度を基準としては設定することとなるが、支配的な変形は等容変形であり、等容変形に対しては過度に小さい時間刻みを用いることとなる [3]。同様に、面外せん断変形を考慮した Mindlin 板の問題に陽解法を適用した場合、面外せん断変形に対応する波動伝播速度が数値安定性を支配し、主要な変形である曲げ変形に対しては過小な時間刻みを設定することとなる [4]。

このような問題に対して、筆者等は混合型有限要素法に基づく分離型時間積分法を提案した [3]。この手法では、混合型定式化として応力等を独立変数として導入し、拘束条件付き問題に対する時間積分法を拡張したアルゴリズムを構成する。伝播速度が速い変形成分について独立変数を導入すれば、伝播速度が速い変形成分については陰解法、それ以外に対しては陽解法として機能するものとなる。これにより、現象に対して適切な時間刻みを設定しつつ数値安定性を確保した手法が得られる。本研究では、この手法を様々な問題に適用可能な新しい時間積分の枠組みとして議論する。

2 分離型時間積分

動的問題の支配方程式を混合型定式化として記述する。一般化変位 \mathbf{u} と対応する一般化速度 \mathbf{v} および陰的に評価する変形モードに対応する一般化応力 \mathbf{S} を独立変数として、支配方程式を以下のよう表す。

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = D_e \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) + D_e \tilde{\mathbf{S}}, \quad \tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{M} は一般化速度から対応する運動量に変換する行列、 D_e はつり合いに関する微分作用素、 $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{u})$ と $\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{u})$ はそれぞれ陽的に評価される変形モードに対応する一般化応力の成分と陰的に評

価される一般化応力 \mathbf{S} に対応する成分を変位から求める関数である。このとき、 $\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{u})$ により一般化応力の全成分が与えられるものとする。

このように定式化された方程式に対して、Rattle 法 [5] を拡張して得られた分離型時間積分 [3] を適用すると、半離散化方程式として 2 ステージのアルゴリズムが次のように得られる。

[ステージ 1]

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}, \quad \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M} \left(\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}^n \right) = D_e \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{u}^n) + D_e \tilde{\mathbf{S}}_1 \\ \tilde{\mathbf{S}}_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{u}^n) + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{u}^{n+1}) \right\} - \frac{\Delta t}{2} \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{v}^n) \end{aligned} \quad (2)$$

[ステージ 2]

$$\frac{2}{\Delta t} \mathbf{M} \left(\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \right) = D_e \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{u}^{n+1}) + D_e \tilde{\mathbf{S}}_2, \quad \tilde{\mathbf{S}}_2 = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{u}^n) + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{u}^{n+1}) \right\} - \frac{\Delta t}{2} \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{v}^{n+1}) \quad (3)$$

ここで、上付き $n, n+1$ はそれぞれ時刻 t^n, t^{n+1} における近似値を表す。また、 $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ は時間刻み、 $\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}$ は n ステップと $n+1$ ステップの中間の時刻における一般化速度である。ステージ 1 では、 $n+1$ ステップにおける一般化変位を、ステージ 2 では $n+1$ ステップにおける一般化速度を決定している。また、この時間積分は、陰的に評価する変形モードに対しては無条件安定な陰解法、それ以外の成分については陽解法である Verlet 法として機能する [4]。

3 適用例

微圧縮弾性体の場合は、圧力を一般化応力として本手法を適用すると、体積変形に対して陰解法として機能し、数値安定な時間刻みは等容変形の波動伝播速度である S 波速度で決定されることとなる [3]。また、集中化質量行列を用いてステージ 1 において $\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}$ と \mathbf{u}^{n+1} を、ステージ 2 において \mathbf{v}^{n+1} を消去すると、圧力自由度のみの連立 1 次方程式が得られる。このときの係数行列は通常の有限要素法と類似な疎行列となる。

面外せん断変形を考慮する Mindlin 板の問題の場合では、面外せん断応力を一般化応力に選ぶことで、伝播速度の速い面外せん断変形に対して陰解法とする。このとき、提案手法における安定な時間刻みは、分散性を有する曲げ変形の伝播速度で決定される [4]。

参考文献

- [1] 山田貴博, 波動方程式に対するガラーキン法に基づく数値計算手法の特性評価, 応用力学論文集, 11 巻 (2008), pp.117–122.
- [2] Shearer, P. M., Introduction to seismology, 3rd ed., Cambridge University Press, 2019.
- [3] 山田貴博, 微圧縮弾性体の動的問題に対する分離型時間積分, 土木学会論文集 A2 (応用力学), 77 巻 (2021)2 号, pp.217–225.
- [4] 芳谷和哉, 山田貴博, Mindlin-Reissner 板の動的問題のための分離型時間積分, 計算工学講演会論文集, Vol. 29(2024).
- [5] Andersen, H.C.: Rattle: A “velocity” version of the shake algorithm for molecular dynamics calculations, J. Comput. Phys., 52(1983), pp.24–34.

確率微分方程式の弱近似のための再結合測度法のアルゴリズム

二宮祥一¹, 篠崎裕司²

¹ 東京工業大学理学院, ² 武蔵野大学工学部

e-mail: y-shino@musashino-u.ac.jp

1 問題と背景

確率微分方程式 (以下 SDE と記す)

$$X(t, x_0) = x_0 + \int_0^t V_0(X(s, x_0)) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t V_i(X(s, x_0)) \circ dB^i(s) \quad (1)$$

で定義される拡散過程 $X(t, x_0)$ と $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ に対し期待値 $E[f(X(t, x_0))]$ を数値的に求めることを SDE (1) の弱近似問題という。ここで $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $V_0, V_1, \dots, V_d \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ とし、 $(B^1(s), \dots, B^d(s))$ は d 次元標準ブラウン運動を、 $\circ dB^i(s)$ はストラトノビッチ積分を表す。

2 離散化と積分

弱近似計算に対する数値的手法は、確率論的手法と偏微分方程式による手法に大別される ([11] 参照)。本報告は前者に関するものである。確率論的手法とは、区間 $[0, T]$ の分割 $0 = t_0 < \dots < t_n = T$ を考え、 $\{X(t, x_0)\}_{0 \leq t \leq T}$ を分割上で近似する確率変数列 $\{\hat{X}^{(n)}(t_i, x_0)\}_{i=0,1,\dots,n}$ を構成 (離散化) し、 $E[f(X(t, x_0))]$ を $E[f(\hat{X}^{(n)}(t, x_0))]$ により近似するものである。ここで生じる近似誤差 $|E[f(X(t, x_0))] - E[f(\hat{X}^{(n)}(t, x_0))]|$ が、離散化誤差と呼ばれるものである。離散化誤差が n^{-p} のオーダーで抑えられるとき、この離散化を p 次の離散化と呼び、 $p \geq 2$ であるような離散化手法を高次離散化手法と呼ぶ。広く知られているオイラー・丸山法は 1 次の離散化手法である。楠岡 [1] は、多次元ブラウン運動で駆動される一般の SDE に有効な高次離散化の枠組みを示した。この枠組みはマリアバン解析と自由リー代数を基づくもので、楠岡近似、あるいはウィーナー空間上のキューバチャー法と呼ばれる。高次離散化手法を用いることで、誤差を一定に抑えるために必要な分割数 n を減らし、その許容誤差の下で $E[f(\hat{X}^{(n)}(t, x_0))]$ を計算するための計算量を減らすことができる [5, 8, 4, 6]。

一般に確率論的手法を実装する際、離散近似する確率変数列 $\{\hat{X}^{(n)}(t_i, x_0)\}_{i=0,1,\dots,n}$ を離散確率変数で構成するか連続確率変数で構成するかの 2 通りの方法が考えられる。離散確率変数で構成する場合には近似確率変数列 $\{\hat{X}^{(n)}(t_i, x_0)\}_{i=0,1,\dots,n}$ の台の数が時間分割数 n に関して指数増大することが問題となる。

3 再結合測度法

再結合測度法 [3] はこの高次離散化を与える離散確率測度を高次離散化の性質を保ったまま、より小さな台の離散確率測度に変換する手法である。チャカロフの定理 [10] によりこの様な変換の存在が保証される。[3] では、各時刻 t_i での近似確率変数 $\hat{X}^{(n)}(t_i, x_0)$ の台を、端布集合 (patch) と呼ばれる排他的な部分集合の和に分け、各端布集合の上に局所化された測度に対して再結合測度法を適用することによって、離散化の精度を保ったまま近似確率変数列の台の指数的増大を防ぐことが可能なことを示した。報告者は [7] において、2 次、3 次の楠岡近似アルゴリズム [8, 9] を離散確率変数を

用いて実装する場合に、再結合測度法が有効である場合があることを数値的に示した。またこの結果から、実装方法に応じて、近似誤差の挙動が変化することが観察された。

4 本報告の貢献

本報告では、[3] の理論をもとに理論を拡張し、実用可能な再結合測度法のアルゴリズムを提示し、その数値挙動を示す。とくに、 $V_0 \dots, V_d$ に UFG 条件と呼ばれる仮定のみをおいた場合にも、理論の仮定を満たす端布集合の構成アルゴリズムを示す。ここで、劣リーマン幾何学の結果が有用となる。

参考文献

- [1] Shigeo Kusuoka. Approximation of Expectation of Diffusion Process and Mathematical Finance. In T. Sunada, editor, *Advanced Studies in Pure Mathematics, Proceedings of Final Taniguchi Symposium, Nara 1998*, volume 31, pages 147–165, 2001.
- [2] Shigeo Kusuoka. Malliavin Calculus Revisited *Journal of Mathematical Sciences-University of Tokyo*, 261-278, 2003.
- [3] Christian Litterer and Terry Lyons. High order recombination and an application to cubature on wiener space. *Ann. Appl. Probab.*, 22(4):1301–1327, 08 2012.
- [4] Mariko Ninomiya and Syoiti Ninomiya. A new higher-order weak approximation scheme for stochastic differential equations and the Runge-Kutta method. *Finance and Stochastics*, 13:415–443, 2009. 10.1007/s00780-009-0101-4.
- [5] Syoiti Ninomiya. A new simulation scheme of diffusion processes: Application of the Kusuoka approximation to Finance Problems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 62/3-6:479–486, 2003.
- [6] Syoiti Ninomiya and Yuji Shinozaki. Higher-order Discretization Methods of Forward-backward SDEs Using KLVN-scheme and Their Applications to XVA Pricing. *Applied Mathematical Finance*, 26(3):257–292, 2019.
- [7] Syoiti Ninomiya and Yuji Shinozaki. On implementation of high-order recombination and its application to weak approximations of stochastic differential equations. In *Proceedings of the NFA 29th Annual Conference*, 2021.
- [8] Syoiti Ninomiya and Nicolas Victoir. Weak approximation of stochastic differential equations and application to derivative pricing. *Applied Mathematical Finance*, 15(2):107–121, 2008.
- [9] Yuji Shinozaki. Construction of a third-order K-Scheme and its application to financial models. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 8(1):901–932, 2017.
- [10] Vladimir Tchakaloff. Formules de cubatures mécaniques à coefficients non négatifs. *Bulletine des Sciences Mathématiques*, 81:123–134, 1957.
- [11] 二宮 祥一. 確率論的手法による確率微分方程式の高次弱近似法について. *応用数理*, 30(4):8–15, 2020.

連続時間確率制御に対する数値解法の ポートフォリオ最適化への応用

家田 雅志¹¹ 東京理科大学経営学部ビジネスエコンミクス学科

e-mail : ieda_at_rs.tus.ac.jp

1 はじめに

本研究は、運用開始時に設定した運用目標額を各時刻で下回るリスクを最小化するポートフォリオ戦略について、連続時間確率制御の枠組みを用いて定量的に解析することを目的とするものである。先行研究 [1] では資産価格モデルとして多資産 Black-Scholes モデルを採用し、空売り禁止およびレバレッジ制約を満たす最適ポートフォリオ戦略を数値解法により求めた。本講演では、上記をベースに金利モデルを固定利率モデルから確率モデルへ拡張した場合の数値解析結果について報告する。

2 市場モデル

フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ にて $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ を n 次元標準ブラウン運動、 $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ を W と独立な 1 次元標準ブラウン運動とする。また、 t は時刻を意味し、 $t \in [0, T]$ と設定する。無リスク金利を $r = \{r_t\}_{t \geq 0}$ と表記し、Hull-White モデルに従うものとする。

$$dr_t = (\theta(t) - \alpha r_t) dt + \eta(t) dB_t.$$

ここで、 $\alpha \in \mathbb{R}$ 、 $\theta, \eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ は確定的関数である。投資対象資産は無リスク資産 1 種と危険資産 n 種とし、それぞれの時刻 t における価格を S_t^0 と S_t^i , $i = 1, 2, \dots, n$ と表記し以下の確率微分方程式 (SDE) に従うものとする。

$$\begin{cases} \frac{dS_t^0}{S_t^0} = r_t dt, & \begin{cases} \frac{dS_t^i}{S_t^i} = b^i(t, r_t) dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t) dW_t^j + \nu_i(t) dB_t, & i = 1, \dots, n \\ S_0^0 = s_0^0 > 0, & S_0^i = s_0^i > 0 \end{cases} \end{cases}$$

ただし、 $b : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ は確定的関数である。

3 ポートフォリオ最適化問題

時刻 t における第 i 資産に対するポートフォリオ・ウェイトを π_t^i を表記し

$$\int_0^T (\pi_s^i)^2 ds < \infty, \quad \pi_t^i \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n \pi_t^j = \bar{\pi}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

を満たす確率過程として定義する。ここで、2 番目の条件は空売りの禁止、3 番目の条件はレバレッジに上限を課す制約条件である。このとき、時刻 t におけるポートフォリオの価値 X_t は以下の SDE に従う。

$$\frac{dX_t}{X_t} = \sum_{i=1}^n \pi_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} + \left(1 - \sum_{i=1}^n \pi_t^i\right) \frac{dS_t^0}{S_t^0}, \quad X_0 = x_0.$$

投資パフォーマンスは運用目標額 $f(t)$ と X_t の差を引数とする単調減少関数 Ψ により計測する。そして、パフォーマンス評価基準 J と価値関数 V_t を次のように定義する。

$$J_t^\pi(x) = \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} \Psi(f(T) - X_T) + \frac{1}{2T} \int_t^T \Psi(f(s) - X_s) ds \middle| X_t = x \right].$$

$$V_t(x) = \inf_{\pi} J_t^\pi(x),$$

このとき、 V_t は以下の Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程式を満たす [2]。

$$\partial_t V_t(x, r) + \min_{\pi} \{ \mathcal{L}_t^\pi V_t(x, r) \} = 0, \quad V_T(x, r) = \frac{1}{2} \Psi(f(T) - x) \quad (1)$$

ただし、 \mathcal{L}_t^π は確率過程 $(X, r)^\top$ の無限小生成作用素で $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^\pi \phi(x, r) = & \left(r + (b(t, r) - r\mathbf{1})^\top \pi \right) x \partial_x \phi(x, r) \\ & + \frac{1}{2} x^2 \pi^\top (\sigma(t) \sigma(t)^\top + \nu(t) \nu(t)^\top) \pi \partial_{xx} \phi(x, r) + (\theta(t) - \alpha r) \partial_r \phi(x, r) \\ & + \frac{1}{2} \eta(t)^2 \partial_{rr} \phi(x, r) + x \eta(t) \nu(t)^\top \pi_t \partial_{xr} \phi(x, r) + \frac{1}{2T} \Psi(f(t) - x) \end{aligned}$$

である。この HJB 方程式を解くことで価値関数および最適戦略（の候補）が得られる。

4 数値解法

HJB 方程式 (1) に含まれる π に関する最小化問題は二次計画問題とみなすことができる。しかし、課せられた制約条件により π を解析的に求めることは困難である。そこで、本研究ではカーネル選点法により数値的に価値関数と最適戦略を算出する。この方法では $t_k = kh$, $k = 0, \dots, N$, $h := T/N$, $\xi_i^k \in \mathbb{R}$, $x^{(j)} \in \mathbb{R}^2$ として、偏微分方程式の解 V をカーネル関数 Φ を用いて

$$V_{t_k}(x, r) \simeq \sum_{i=1}^M \xi_i^k \Phi(x, r; x^{(i)})$$

により近似する。計算方法の詳細は講演スライドおよび [1, 3] などを参照されたい。

講演スライドのオンライン共有

講演当日は <https://tus.box.com/v/IedaJsiam2024> にて講演スライドを共有します。

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP23K16843 の助成を受けたものです。

References

- [1] Masashi Ieda. “Continuous-time portfolio optimization for absolute return funds”. In: *Asia-Pacific financial markets* 29.4 (2022), pp. 675–696.
- [2] Huy  n Pham. *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [3] Yumiharu Nakano. “Convergence of meshfree collocation methods for fully nonlinear parabolic equations”. In: *Numerische Mathematik* 136.3 (2017), pp. 703–723.

順序分割ネットワークの動的なウィンドウサイズ調整に基づく位相的エントロピーの数値計算

福島 真太郎¹, 谷澤 俊弘¹

¹ トヨタ自動車株式会社

e-mail: s.fukushima@mail.toyota.co.jp toshihiro_tanizawa@mail.toyota.co.jp

1 概要

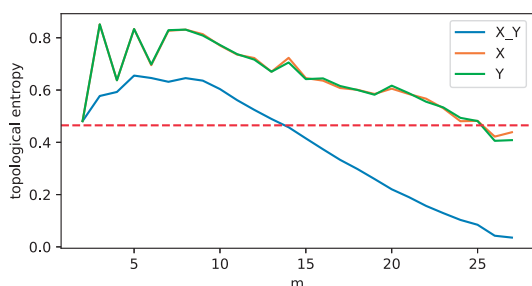
時系列データに対して力学系の複雑さを特徴づけるために、順序パターン (ordinal pattern)[1] を用いて位相的エントロピー [2] を推定する手法がいくつか提案されている [3, 4]. しかし、2 次元以上の力学系に適用する際に、位相的エントロピーの推定に必要な順序パターンの個数を適切に見積もることが難しいという課題がある. 本研究では、順序分割ネットワーク (ordinal partition network)[4] に着目し、このネットワークを構成する際に順序パターンの長さを動的に調整する手法を提案し、その有効性を数値実験により確かめる.

2 提案手法

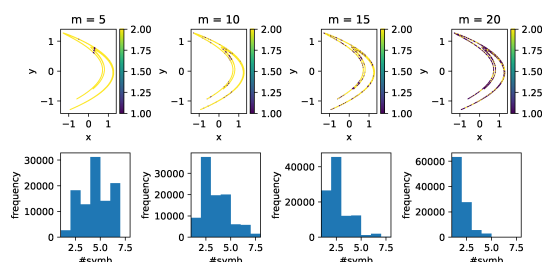
2.1 順序分割ネットワークを用いた手法の課題

本研究では、比較的次元の力学系に適用可能な数値計算法として、順序分割ネットワークを用いた手法 [4] に着目する. この手法は、ウィンドウサイズ m の順序パターン間の遷移行列を構成し、その最大固有値の対数を位相的エントロピーとして推定する. Hénon 写像 ($a = 1.4$, $b = 0.3$) に対して、ある 1 つの初期値から写像を $N = 10^5$ 回反復させて得られる軌道に対して m を変化させたところ、図 1a を得た. これを見ると、 x 軸と y 軸の両方を考慮した場合は $m \approx 14$, x 軸のみ、または y 軸のみの順序を考慮した場合は $m \approx 24$, 25 において先行研究 [5, 6] で得られた位相的エントロピーの推定値 $h = 0.465$ と比較的近い値をとるが、 m がこの値よりも小さい場合は過大に、逆に m が大きい場合は過小に推定していることがわかる.

以上の問題の原因を探るために、 $m = 5, 10, 15, 20$ について順序パターンと記号力学系の記号列 [5] との対応関係を調べた結果を図 1b に示す. 図 1b を見ると、 $m = 5, 10, 15$ では 2 個以上の記



(a) Hénon 写像に対する順序分割ネットワーク [4] を適用して推定された位相的エントロピー. X は x 軸に沿った順序, Y は y 軸に沿った順序, X_Y は x 軸と y 軸の両方の順序を考慮している. 赤波線は位相的エントロピーの推定値 $h = 0.465$.



(b) Hénon 写像に対する順序パターンと記号列の対応関係. (上パネル) 横軸: x , 縦軸: y , 点の色は、各点の順序パターンに対応する記号列の個数 (1 個または 2 個以上). (下パネル) 横軸: 順序パターンに対応する記号列の個数, 縦軸: 頻度.

号列が対応するケースが多く, $m = 20$ では 1 個の記号列が対応するケースが多いことがわかる.

2.2 順序パターンの再分割に基づく手法

以上の考察を踏まえて, 1 つの順序パターンに対して 2 個以上の記号列が存在する場合についても, 順序パターンの個数を適切に見積もるために順序パターンを再分割する手法を提案する. 順序分割ネットワーク $A = (a_{ij})$ ($a_{ij} \in \{0, 1\}$) が得られているとして, 新たな順序分割ネットワーク $A' = (a'_{ij})$ を以下で定義する:

$$A' = (a'_{ij}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (a_{ij} = 1), \\ 0 & (a_{ij} = 0). \end{cases} \quad (1)$$

式 (1) の $a_{ij} = 1$ の場合の 1 行 1 列の成分 1 は, スライド幅 τ で隣接する時系列の点間の接続を表し, それ以外の要素 0 は接続していないことを表す. こうして得られた A' に対して, 位相的エントロピーをその最大固有値の対数 $\log \lambda_{\max}(A')$ で推定する. Hénon 写像に対して $\tau = 1$ の場合に推定した結果を図 2 に示す. $m = 12$ から 15 までの推定値はおおよそ $h \approx 0.482$ と推定されており, 先行研究での推定値と比較的に近く推定できていることがわかる.

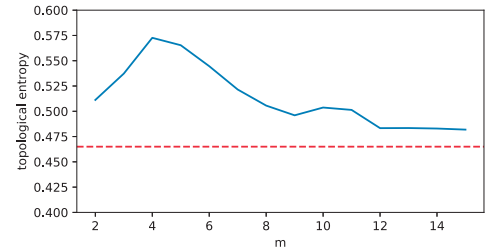


図 2: 提案手法による位相的エントロピーの推定値.

3 まとめ

本稿では, 順序パターンの再分割に基づき位相的エントロピーを推定する手法を提案し, その有効性を数値実験で確かめた. 今後の課題として, 収束性の改善, 計算時間の削減などが挙げられる.

参考文献

- [1] J. M. Amigó, Permutation complexity in dynamical systems, Springer, 2010.
- [2] R. L. Adler, A. G. Konheim and M. H. McAndrew, Topological entropy, Trans. Amer. Math. Soc., 114 (1965), 309.
- [3] J. M. Amigó and M. B. Kennel, Topological permutation entropy, Physica D, 231(2) (2007), 137–142.
- [4] K. Sakellariou, T. Stemler and M. Small, Estimating topological entropy using ordinal partition networks, Phys. Rev. E, 103 (2021), 022214.
- [5] Y. Hirata and A. I. Mees, Estimating a generating partition from observed time series: Symbolic shadowing, Phys. Rev. E, 67 (2003), 026205.
- [6] 福島真太郎, 村重淳, 写像により変換された曲線の折返し点を用いた位相的エントロピーの計算, 電子情報通信学会論文誌 A 90 (2007), 932–939.