

# Analysis on the congestion in the optimal velocity model by self-induced nonlinearity

池田 幸太<sup>1</sup>, 宮路 智行<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 明大総合数理, <sup>2</sup> 京大理

e-mail: ikeda@meiji.ac.jp

## 1 導入

交通流に現れる渋滞は自己組織的に形成される波の伝播によって特徴付けられる. この現象は, 最適速度 (OV) モデル

$$x_n'' = a(V(\Delta x_n) - x_n'), \quad n = 1, \dots, N \quad (1)$$

を区間長  $L$  のサーキットで考えた場合に現れる [1]. ここで  $x_n = x_n(t)$  はサーキットにおける  $n$  番目の車の座標で,  $a > 0$  は運転者の感受性を表すパラメータである.  $\Delta x_n = \Delta x_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$  は  $n$  番目の車と, その前方にある  $n+1$  番目の車の車間距離であり,  $\Delta x_N = x_1 - x_N$  とする. 多くの場合, OV 関数  $V$  にはシグモイド型の関数が使われ, 例えば  $V_0, \beta > 0, M \in \mathbb{R}$  に対して

$$V(x) = \frac{V_0}{2}(\tanh[\beta(x-l)] + M) \quad (2)$$

で与えられる. [2], [3] では渋滞相と対応した解が構成されているが, 強い制約が課されており, 解析的なアプローチによる研究結果が十分に得られているとは言い難いのが現状である.

本研究では,  $\Delta x_n(t)$  が周期関数となる (1) の解に焦点を絞り, 周期 1 の関数  $X = X(\tau)$  と  $c > 0$  に対して  $\Delta x_n(t) = X(ct + (n-1)/N)$  と表されると仮定する. すると  $X$  は

$$c^2 X'' - a(V(\sigma_{1/N} X) - V(X)) + acX' = 0 \quad (3)$$

を満たさなければならない. ここで  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して決まる  $\sigma_\alpha$  はシフト作用素であり, 関数  $\varphi$  に対し,  $[\sigma_\alpha \varphi](\tau) \equiv \varphi(\tau + \alpha)$  で定義される.

(2) を仮定し (3) に対する数値計算を行うと

図 1 が得られる. ここで  $N$  を大きくすると,  $X$  の定義域はある定数  $X_1, X_2$  に近い状態を取る領域と, それらを結ぶ遷移層を持つ領域  $I_1, I_2$  に分けられる. また,  $X$  は  $I_1$  では単調減少,  $I_2$  では単調増加である. さらに,  $N \rightarrow \infty$  で  $I_1, I_2$  の幅は 0 に近づき,  $cN$  はある定数に漸近する. 以上の考察の下,  $c, X_1, X_2$  を決定し, 遷移層に対応した (3) の解を構成する. これにより, (1) における渋滞相を数理的に特徴付けることが目標である.

$I_2$  における遷移層を念頭に置き, 適当な  $\tau_0$  に対して  $X(\tau) = X_2 - u(N(\tau - \tau_0))$  とすることで, 関数  $u = u(s)$  を導入する. また,  $cN \rightarrow c$  と置き換えることで, (3) から

$$c^2 u'' + a(V(X_2 - \sigma_1 u) - V(X_2 - u)) + acu' = 0 \quad (4)$$

が得られる. (4) では, 単調減少な解だけを考えれば十分である. しかし, 一般にシフト作用素を含む系の解析は難しい. そこで (4) を異なる視点から捉える. 求めるべき解  $u$  は単調減少であるので逆関

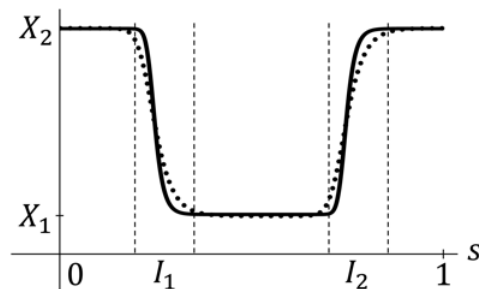


図 1.  $N = 20$  (点線),  $N = 40$  (実線) に対する (3) の周期解. OV 関数には (2) を用い, パラメータは  $V_0 = 0.0336$ ,  $\beta = 89.7$ ,  $l = 0.025$ ,  $M = 0.913$ ,  $a = 1.6$  とした.

数を持つ. すると,  $[\sigma_1 u](s)$  は  $u$  の関数とみなせる. この考え方によれば,

$$g(u(s)) = a(V(X_2 - [\sigma_1 u](s)) - V(X_2 - u(s))) \quad (5)$$

によって関数  $g = g(u)$  を導入することが可能である. このように導入される  $g$  のことを, 「自己誘導型非線形項」と呼ぶこととする. 以上により, (4) の解  $(u, c)$  を求めることは, (5) と

$$c^2 u'' + g(u) + acu' = 0. \quad (6)$$

を同時に満たす  $(u, c, g)$  を求めることに等しい.

パラメータ  $\eta > 0$  に対して, (5), (6) を

$$u(-1) = \eta, \quad u(0) = \frac{\eta}{2}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} u(s)e^{as/c} > 0 \quad (7)$$

の下で考える. 実は (2) で  $\beta \rightarrow \infty$  とすることで得られる階段関数を OV 関数として用いれば, (5)–(7) を満たす解  $(u_*, c_*)$  を具体的に構成できる. ここで  $2\zeta = -\log(1 - \zeta)$  の一意解  $\zeta > 0$  に対して  $\bar{\eta} = 2V_0\zeta/a$  で与えるとき,  $\eta > \bar{\eta}$  であれば  $u'_*(-1) < 0$ ,  $\eta = \bar{\eta}$  であれば  $u'_*(-1) = 0$  が成り立つ.  $\eta = \bar{\eta}$  に対する  $(u_*, c_*)$  は, [2] で構成された解と本質的に一致することに注意する.

本講演では,  $V \in C^1(\mathbb{R})$  に以下を仮定し, 与えられた  $\eta > \bar{\eta}$  に対して定理 1 を証明する.

- (A1)  $V$  はパラメータ  $\beta$  に依存し, ある  $l, V_0 > 0, V_1 \in \mathbb{R}$  に対して, 各点  $x \in \mathbb{R}$  で  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} V(x) = V_0 H(x-l) + V_1$  を満たす. ここで  $H$  は  $H(x) = 0$  if  $x < 0$  and  $H(x) = 1$  if  $u > 0$  で与えられる階段関数である. さらに, 任意の  $\delta_0 > 0$  に対して,  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sup_{|x-l| \geq \delta_0} |V'(x)| = 0$  が成り立つ.
- (A2)  $x \in \mathbb{R}$  に関して  $V'(x)$  は有界で, かつ  $V'(x) > 0$  とする. また,  $\beta$  に依存しないある定数  $m_1, m_2$  が存在して,  $m_1 \leq V(x) \leq m_2$  が成り立つ.
- (A3) ある  $V_2 \in \mathbb{R}$  が存在して,  $V(x+l) + V(-x+l) = 2V_2$  を全ての  $x \in \mathbb{R}$  に対して満たす.

**定理 1**  $V \in C^1(\mathbb{R})$  が (A1)–(A3) を満たすとする. 任意に  $\eta > \bar{\eta}$  を与え,  $X_2 = l + \eta/2$  とする. このとき, もし  $\beta$  が十分大きければ, (7) と,  $s > -1$  で (5) と (6) を満たす解  $(u, c, g)$  が存在する.

**謝辞** 本研究は科研費 (課題番号: JP20K03757, JP23K25786) の助成を受けたものである.

## 参考文献

- [1] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama, *Structure stability of congestion in traffic dynamics*, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol.11 (1994), 203–223.
- [2] Y. Sugiyama, and H. Yamada, *Simple and exactly solvable model for queue dynamics*, Physical Review E, Vol.55, No.6 (1997), 7749.
- [3] K. Hasebe, A. Nakayama, and Y. Sugiyama, *Soliton solutions of exactly solvable dissipative systems*, Computer physics communications, Vol.142, No.1-3 (2001), 259–262.

## 時間遅れを伴う動的フロアフィールドモデル

大澤 智興<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 九州工業大学 情報工学部 物理情報工学科

e-mail : chikoo@phys.kyutech.ac.jp

### 1 序論

動的フロアフィールド (Dynamic Floor Field, DFF) モデルは、静的フロアフィールドモデルと同時に用いられ、人流、避難流のモデルとして用いられてきている [1, 2]。特に DFF モデルは、エージェントである人と人との間に、正の走化性を導入し、エージェント間の追従 (引力) 効果を実現している。著者は、DFF モデル中のパラメタを反転することで、負の走化性を実現し [3, 4, 5, 6, 7]、エージェント間に斥力効果を生じさせることを示した。また、単独のエージェントでは、水面に浮かべた樟脳粒 [8, 9] のように、自己駆動粒子として振る舞うことを示した。DFF モデルは、エージェントの移動が、その時点におけるフロアの状態に依存して確率的に決定される。今回は、過去のフロア状態にも依存するモデルに拡張した。

### 2 モデル

走化性エージェントは、時間ステップごとに、数直線上の左右いずれか 1 に方向に移動可能である。その移動原因となる足跡物質 (フェロモン) の強度 ( $I_x$ ) は、式 (1) で表現され、フロアの状態を示し、時空間的に変化する。

$$I_x(t+1) = I_x(t)(1-\alpha)(1-\delta) + \frac{\alpha(1-\delta)}{2}[I_{x+1}(t) + I_{x-1}(t)] + (1-\delta)f_p\Delta(x-x_a) \quad (1)$$

ただし、

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \text{ の場合} \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases} \quad (2)$$

である。ここで、 $\alpha, \delta$  は、それぞれ足跡物質の拡散および分解または昇華の程度を意味し、 $f_p$  は、エージェントからの足跡物質の放出量、座標 ( $x_a$ ) は、エージェント位置を示す。数直線上のある  $x$  から 2 近傍のいずれか  $x'$  への移動確率は、ソフトマックス関数を用いて、

$$p_{x'}(t) \propto \exp[k \cdot I_{x'}(t)] \quad (3)$$

となる。 $k$  は、エージェントのフロア状態  $I_x$  に対する選好性を示し、正で引力、負では斥力の効果となる。このままでも、 $\delta < 1$  では、 $I_x(t)$  は、残存し移動確率に影響え、非マルコフ的な運動の原因となる。さらに、これを、過去のフロアの状態依存する、時間遅れを項を含むように、陽に表現すると、 $t-1$  までならば、

$$p_{x'}(t, t-1) \propto \exp[k_t \cdot I_{x'}(t)] \exp[k_{t-1} \cdot I_{x'}(t-1)] \quad (4)$$

より一般的には、

$$p_{x'}(t-0, t-1, \dots, t-i) \propto \prod_{i=0}^n \exp[k_{t-i} \cdot I_{x'}(t-i)] \propto \exp\left[\sum_{i=0}^n (k_{t-i} \cdot I_{x'}(t-i))\right] \quad (5)$$

と表現することができる。このような場合でも、 $\delta = 1$  や、 $k_i = 0$  の場合には、 $I_x(t) = 0$ , または、移動確率が  $I_x(t)$  に依存しないので、エージェントはランダムウォーク (RW) を示す。また、 $\delta < 1$  であっても、式 (5) 最右辺の括弧の中身が 0 となれば、RW となる。 $k_{t-i}$  を大小や正負に変化させると、現在や過去の  $I_x$  に対する選好性の強弱、正負を変更することも可能である。

## 参考文献

- [1] C. Burstedde, K. Klauck, A. Schadschneider, J. Zittartz, “Simulation of pedestrian dynamics using a 2-dimensional cellular automaton” *Physica A*, Vol.295, pp. 507-525, (2001)  
[https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(01\)00141-8](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00141-8)
- [2] A. Kirchner, K. Nishinari, A. Schadschneider, *Phys. Rev. E* 67,056122(2003)  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.67.056122>
- [3] C. Oosawa, “A model of camphor-type self-driven particle,” *Proceedings of the 26th Symposium on Traffic Flow and Self-driven Particles*, pp.55-58, 2020.  
<http://traffic.phys.cs.is.nagoya-u.ac.jp/~mstf/pdf/mstf2020.pdf>
- [4] C. Oosawa, “Group Chase and Escape with Chemotaxis,” *J. Robot. Mechatron.*, Vol.35 No.4, pp. 918-921, 2023.  
<https://doi.org/10.20965/jrm.2023.p0918>
- [5] C. Oosawa, “Motility and stability of chemotactic agents that chained linearly,” *Papers of the 29th Symposium on Traffic Flow and Self-driven Particles*, pp.17-20, 2023.  
<http://traffic.phys.cs.is.nagoya-u.ac.jp/~mstf/programs/prog2023/>  
<http://traffic.phys.cs.is.nagoya-u.ac.jp/~mstf/pdf/mstf2023.pdf>
- [6] C. Oosawa, “Dependence of Péclet Number on agent-based chemotactic predator-prey system,” *Proceedings of The Twenty-Ninth International Symposium on Artificial Life and Robotics 2024 (AROB 29th 2024)* pp.857-861, 2024, extended version of the invited manuscript has been submitted.
- [7] C. Oosawa, “Tunable social hierarchies in self-organizing model with chemotactic agents” *,Journal of Robotics and Mechatronics*, accepted and to be published.
- [8] Y.Matsuda, K.Ikeda, Y.Ikura, H.Nishimori, N.J.Suematsu, “Dynamical Quorum Sensing in Non-Living Active Matter”, *J. Phys. Soc. Jpn.* 88,093002(2019)  
<https://doi.org/10.7566/JPSJ.88.093002>
- [9] K. Ikeda, H. Kitahata, Y. Koyano, “Existence and stability of a quasi-periodic two-dimensional motion of a self-propelled particle”, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 41, 2  
<https://doi.org/10.1007/s13160-024-00661-7>

# 遅延を含む Fisher-KPP 方程式の semi-wave について —数値計算の視点から—

出原 浩史<sup>1</sup>, 物部 治徳<sup>2</sup>, Yong-Jie Syu<sup>3</sup>, Chang-Hong Wu<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 宮崎大学工学教育研究部, <sup>2</sup> 大阪公立大学大学院理学研究科, <sup>3</sup> National Yang Ming Chiao

Tung University, Taiwan

e-mail : izuhara@cc.miyazaki-u.ac.jp

## 1 はじめに

Fisher-KPP 方程式は, ロジスティック成長項と拡散項をもつ方程式であり, 生物の個体群の拡がりなどを記述する方程式として数理生物分野において広く研究されてきた. このモデルは

$$u_t = du_{xx} + \gamma u(1 - u), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

として表され,  $u(x, t)$  は場所  $x$ , 時間  $t$  でのある生物種の個体群密度を表し,  $d > 0$  は拡散係数を,  $\gamma > 0$  は内的自然増殖率を表している. 生物の個体群の空間的な拡がりを表す解としてしばしば考えられるものとして進行波解が挙げられる. 進行波解は一定波形, 一定速度をもつ解であり,  $c$  を進行波解の速度としたとき  $u(x, t) = U(x + ct)$  をみだす. Fisher-KPP 方程式の場合, 境界条件は  $U(-\infty) = 0$ ,  $U(+\infty) = 1$  であり, 速度が  $c \geq c^* := 2\sqrt{d\gamma}$  に対して進行波解が存在することが知られている ([1]).

## 2 遅延を含む Fisher-KPP 方程式

Fisher-KPP 方程式に対して, 遅延を含むタイプのものが研究されている.

$$u_t = du_{xx} + \gamma u(1 - u(t - \tau)), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

拡散項がない場合の方程式

$$u' = \gamma u(1 - u(t - \tau)), \quad t > 0$$

は Hutchinson 方程式とも呼ばれ, 遅延  $\tau$  によって振動状態が観察されることがよく知られている. つまり, 平衡点  $u = 1$  は,  $\tau < \pi/(2\gamma)$  のとき漸近安定,  $\tau > \pi/(2\gamma)$  のとき不安定であり, 周期解が現れる. したがって, 遅延を含む Fisher-KPP 方程式の進行波解を考えたとき,  $\tau$  の大きさによって  $u = 1$  の近くで振動するような進行波解が示唆される. 遅延を含む Fisher-KPP 方程式の進行波解の理論的な結果として [2, 3] などがあり, 進行波解が速度  $c \geq c^*$  に対して存在することが部分的に示されている.

本研究では, 上記のような  $\mathbb{R}$  全体で定義される進行波解とは異なるタイプの進行波解を考える. つまり, semi-wave 解と呼ばれる次の形の解

$$u(x, t) = U(\xi), \quad U(\xi) = 0 \text{ for } \xi \leq 0, \quad U(\xi) > 0 \text{ for } \xi > 0, \quad U(+\infty) = 1$$

を考える. ここで  $\xi := x + ct$  である. semi-wave 解が存在するならば速度は  $c < 2\sqrt{d\gamma}$  であることが分かっている. このような semi-wave 解を考えたとき, 次の 3 つの場合があることが予想される:

- (i) 単調な semi-wave 解, つまり  $U' > 0$  かつ  $U(+\infty) = 1$ .

- (ii)  $\xi$  が無限大で減衰振動をもつ非単調な semi-wave 解, つまり  $U'$  の符号は変化し, かつ  $U(+\infty) = 1$ .
- (iii)  $\xi$  が無限大で減衰しない振動をもつ非単調な semi-wave 解, つまり  $U'$  の符号は変化し, かつ  $U(+\infty)$  は存在しない.

これらの 3 つの semi-wave 解がどのようなときに現れるのかを数値計算を用いて調べる.

### 3 数値計算結果

図 1 は  $d = \gamma = 1$  のときの計算結果である. 横軸が  $c$ , 縦軸が  $\tau$  を表している.  $\times$  や  $\square$  は数値計

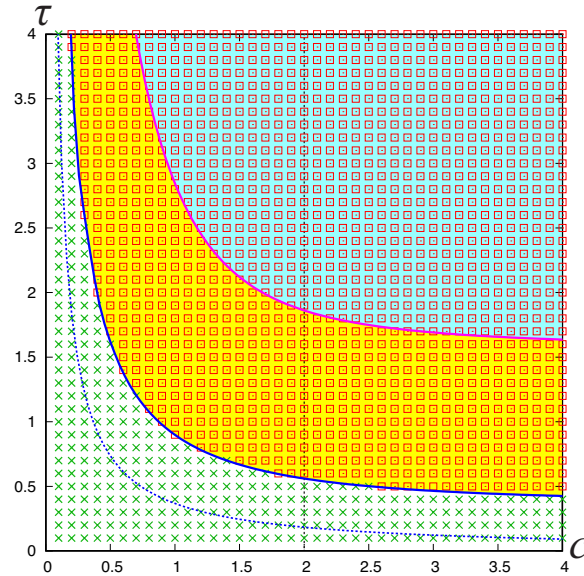


図 1. 3 つの semi-wave 解の存在領域. 緑の  $\times$  は単調な semi-wave 解が現れた領域, 赤い  $\square$  は非単調な semi-wave 解が現れた領域.

算を行い, 単調な semi-wave 解 (上記の (i)) か非単調な semi-wave 解 (上記の (ii) または (iii)) かを判定した結果である. さらに理論的な考察も加えると, 非単調な semi-wave 解の領域 (図 1 の赤い  $\square$ ) を黄色の領域 ((ii) に対応) と水色の領域 ((iii) に対応) に分類することができることが示唆された.

講演では, この数値計算結果の詳細を報告する. また, 可能ならば得られている進行波解の存在に関する理論的な結果についても報告したい.

### 参考文献

- [1] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovsky and N. S. Piskunov, Study of the diffusion equation with growth of the quantity of matter and its application to a biological problem, Bull. Univ. Etat. Moscow Ser. Internat. Math. Mec. Sect. A, **1** (1937), 1–29.
- [2] J. Wu, X. Zou, Traveling wave fronts of reaction diffusion systems with delay, J. Dynam. Differential Equations, **13** (2001) 651–687.
- [3] P. Ashwin, M. Bartuccelli, T. Bridges and S. Gourley, Traveling fronts for the KPP equation with spatio-temporal delay, Z. Angew. Math. Phys., **53** (2002), 103–122.

## 線形遅延微分方程式とデータ駆動型手法について

宮崎 倫子

静岡大学 工学部

e-mail : miyazaki.rinko@shizuoka.ac.jp

## 1 概要

データ駆動型手法の一つとして知られているアーノルディアルゴリズムや動的モード分解は、高次元時系列データから固有値などの特徴量を算出する方法として知られている [1, 2, 3]. 一方、遅延微分方程式は線形であっても一般に無限次元であり、その固有値や安定性解析は容易ではない. 本研究では、遅延微分方程式に対してデータ駆動型手法を適用することの有効性を明らかにすることを目的としている. 本講演では、特にアーノルディアルゴリズムに的を絞って、その検証結果について報告する.

## 2 アーノルディアルゴリズム

一定間隔の観測により得られた有限時間の  $d$  次元観測時系列データが与えられたとする.

$$\{y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+1}\}, \quad (y_j \in \mathbb{R}^d, \quad j = 1, \dots, m+1) \quad (1)$$

ここで、 $m+1$  は有限の時間サンプル数である. 時系列データが  $d \times d$  行列  $A$  に対して以下の線形差分方程式に従うとする.

$$y_{n+1} = Ay_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

時系列データ (1) を列とする  $d \times m$  行列

$$K = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]$$

を考える. 一方、 $y_{m+1}$  が  $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  の一次結合で表されると仮定する:

$$y_{m+1} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m \quad (c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R})$$

このとき、

$$AK = KC, \quad C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & c_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_m \end{bmatrix}$$

が成り立つ.

**命題 1.**  $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  が一次独立であるとする. このとき、 $\lambda$  が行列  $C$  の固有値ならば  $\lambda$  は  $A$  の固有値である.

行列  $C$  の  $m$  個の固有値  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_m$  を用いて次のファンデルモンド行列  $T$  を定義する.

$$T := \begin{bmatrix} 1 & \tilde{\lambda}_1 & \tilde{\lambda}_1^2 & \dots & \tilde{\lambda}_1^{m-1} \\ 1 & \tilde{\lambda}_2 & \tilde{\lambda}_2^2 & \dots & \tilde{\lambda}_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \tilde{\lambda}_m & \tilde{\lambda}_m^2 & \dots & \tilde{\lambda}_m^{m-1} \end{bmatrix}$$

命題 2.  $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  が一次独立であり,  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_m$  が全て異なるものとする. このとき, 行列  $KT^{-1}$  の第  $j$  列を  $\tilde{v}_j$  とすると,  $\tilde{v}_j$  は行列  $A$  の  $\lambda_j$  に属する固有ベクトルとなり, 時系列データ (1) に対する以下の分解が得られる.

$$\begin{cases} y_j = \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^{(j-1)} \tilde{v}_i, & j = 1, \dots, m \\ y_{m+1} = \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^m \tilde{v}_i \end{cases} \quad (3)$$

### 3 線形遅延微分方程式への適用例

スカラーの線形遅延微分方程式を考えよう.

$$\dot{x}(t) = -ax(t - \tau), \quad (t > 0), \quad x(s) = 1 \quad (s \in [-\tau, 0]) \quad (4)$$

方程式 (4) は  $a\tau = \pi/2$  のとき, 実部が最大となる固有値は  $\pm i\pi/2$  を持ち, 漸近周期解が得られることが分かっている. 本研究では, この方程式の数値解から時系列データを作成し, アーノルディアルゴリズムを適用してみた. 具体的には,  $h > 0$  そして  $t_0 > 0$  に対して,

$$t_j = (j-1)h, \quad x_j = x(t_0 + t_j), \quad (j = 1, 2, \dots)$$

としたが, 前節の命題を適用するには, これらが一次独立でなければならない. しかしながら, これらはスカラーなので, 一次独立になりえない. そこで,

$$y_j = (x_{m+j-1}, x_{m+j-2}, \dots, x_j)^T, \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

として,  $y \in \mathbb{R}^m$  の時系列データを作成した. ここでは, 2 つの極端なケースの結果について, *Mathematica* を用いて得られた結果として, 実部が最大の固有値を紹介する.

- (I)  $a = \pi/2, \tau = 1, 160 \leq t \leq 200, h = 0.05, m = 400$  のとき,  $9.60668 \times 10^{-9} \pm 1.5708i$ .  
 (II)  $a = \pi/2, \tau = 1, 8 \leq t \leq 10, h = 0.5, m = 2$  のとき,  $-6.22271 \times 10^{-10} \pm 1.5708i$ .

(II) の場合は, 遅延微分方程式 (4) の  $t$  は初期時刻に近くある程度過渡的な影響があると考えられる. さらに, 用いたデータ数も  $m+1 = 3$  も極端に少ない. しかし, 得られた固有値は真の値  $\pm i\pi/2 \approx \pm 1.5708i$  に近いものであった. 漸近的挙動を決定する実部が最大の固有値が 2 つしか出てこないような方程式に対しては, 当然の結果であると考えられるが, 実際の誤差も込めた解析が必要である.

### 参考文献

- [1] 薄 良彦, 電力システムの動的解析技術 - データから非線形ダイナミクスを理解する, シミュレーション, **32**, 29–36, 2013.
- [2] 薄 良彦, クープマン作用素による非線形ダイナミクスの解析と電力・エネルギーシステムへの応用, *RIMS 講究録*, **2057**, 15–28, 2017.
- [3] 神谷 俊輔, 大泉 匡史, 動的モード分解の概要と活用法—神経システムの制御問題への応用を目指して—, 日本神経回路学会誌, **30**, 73–83, 2023.