内部観測による線形弾性波動方程式のラメ係数同定問題に対する数値解法

代田 健二 [1]
[1] 愛知県立大学情報科学部
e-mail : shirota@ist.aichi-pu.ac.jp

1　はじめに

本研究では, 線形弾性波動方程式のラメ係数同定問題に対する数値解法について考察する．$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ を線形かつ等方的な線形弾性体としであるとし，さらに有界なリプシッツ領域とする．$\boldsymbol{u}$ を変位ベクトル，$\varepsilon(\boldsymbol{u})$，$\sigma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{u})$ をそれぞれひずみテンソル，応力テンソルとする．このとき，次の関係式が成り立つものとする.

$$\varepsilon(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}), \quad \sigma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{u}) = 2\mu\varepsilon(\boldsymbol{u}) + \lambda \mathrm{tr}\, \varepsilon(\boldsymbol{u}) I_n\,.$$

ここで，λ, μ はラメの弾性係数であり，tr は行列のトレース，I_n は n 次単位行列である．支配方程式は，次の弾性波動方程式が成り立つとする:

$$\rho \partial_t^2 \boldsymbol{u} = \nabla^{\mathrm{T}} \sigma_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{f} \quad \text{in } \Omega \times (0, T)\,. \tag{1}$$

∂_t は $\partial/\partial t$ を意味し，$\rho \in C(\overline{\Omega})$ は密度，$T > 0$ は観測時間の長さ，$\boldsymbol{f} \in L^2((0,T);\, L^2(\Omega;\, \mathbb{R}^n))$ は与えられえた関数とする．係数 $\lambda, \mu \in L^\infty(\Omega)$ は場所にのみ依存し，さらに

$$0 < C_\lambda^{(1)} \le \lambda(\boldsymbol{x}) \le C_\lambda^{(2)},\ 0 < C_\mu^{(1)} \le \mu(\boldsymbol{x}) \le C_\mu^{(2)} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}$$

を満たすものとする．ただし，$C_\lambda^{(\ell)}, C_\mu^{(\ell)}$ $(\ell = 1, 2)$ は与えられた正定数である．また，初期変位および速度 $\boldsymbol{u}(\cdot, 0)|_\Omega = \overline{\boldsymbol{u}}_0 \in H^1(\Omega;\, \mathbb{R}^n)$，$\partial_t \boldsymbol{u}(\cdot, 0)|_\Omega = \overline{\boldsymbol{v}}_0 \in H^1(\Omega;\, \mathbb{R}^n)$，および表面変位 $\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega \times (0,T)} = \boldsymbol{g} \in C([0, T];\ H^{1/2}(\partial\Omega))$ が与えられているものとする．すべての係数関数が既知であり，一定の条件を満たせば，順問題は適切である.

$\omega \subseteq \Omega$ を与えられた部分領域とし，内部観測 $\overline{\boldsymbol{u}} \in C([0, T]; H^1(\omega; \mathbb{R}^n))$ が，関数値だけではなく $\nabla \boldsymbol{u}$ も含めて与えられているとする．このとき，本研究では次の係数同定問題を考察する.

ラメ係数同定問題

内部観測 $\overline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}|_{\omega \times (0,\,T)}$，$\nabla \overline{\boldsymbol{u}} = \nabla \boldsymbol{u}|_{\omega \times (0,\,T)}$ よりラメ弾性係数関数 $\lambda(\boldsymbol{x}), \mu(\boldsymbol{x})$ を同定せよ.

本研究の目的は，密度型位相最適化問題に対して提案された手法 [1] を応用することで，数値的に安定かつ一定精度で同定可能なラメ係数同定問題に対する数値解法の開発である.

2　密度型位相最適化を応用したラメ係数同定

本研究で用いる密度型位相最適化は，完備な内積空間，すなわちヒルベルト空間上での勾配法を基礎としていることが多い．そのため，係数関数はヒルベルト空間に属することを仮定する必要がある．そこで本研究において係数関数は，L^∞ 空間ではなく L^∞ 空間に連続的に埋め込まれる $H^2(\Omega)$ に属することを仮定し，$H^2(\Omega)$ 内で同定することを考える.

密度型位相最適化問題に対して開発された手法を適用するため，密度型ラメ係数関数を導入する．$\phi_\lambda, \phi_\mu \in C_B^2(\mathbb{R})$ を $0 \le \phi_\lambda(y) \le 1$，$0 \le \phi_\mu(y) \le 1$，$\forall y \in \mathbb{R}$ を満たす関数とする．$\theta, \zeta \in H^2(\Omega)$ を

用いて，密度型ラメ係数関数を次のとおりに定義する．

$$\widetilde{\lambda}(\theta) = (C_\lambda^{(2)} - C_\lambda^{(1)})\phi_\lambda(\theta(\boldsymbol{x})) + C_\lambda^{(1)}, \quad \widetilde{\mu}(\zeta) = (C_\mu^{(2)} - C_\mu^{(1)})\phi_\mu(\zeta(\boldsymbol{x})) + C_\mu^{(1)}$$

導入された密度型ラメ係数は，$\widetilde{\lambda},\, \widetilde{\mu} \in H^2(\Omega)$ であり，係数関数に対する制約条件を満たす．密度型係数関数を用いて，元の係数同定問題を次のとおりに密度型へと変換する．

密度型ラメ係数同定問題

内部観測 $\overline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}|_{\omega\times(0,\,T)}$，$\nabla\overline{\boldsymbol{u}} = \nabla\boldsymbol{u}|_{\omega\times(0,\,T)}$ より，$\theta,\, \zeta \in H^2(\Omega)$ を同定せよ．

この問題は，元の問題と違い，属する関数空間以外に制約条件が課されていない．

密度型逆問題を解くため，次の汎関数を導入する．

$$J(\theta,\, \zeta) = \tilde{J}(\widetilde{\lambda}(\theta), \widetilde{\mu}(\zeta)) := \int_0^T \|\boldsymbol{u}[\widetilde{\lambda}(\theta),\, \widetilde{\mu}(\zeta)] - \overline{\boldsymbol{u}}\|^2_{H^1(\Omega;\, \mathbb{R}^n)}\, \mathrm{d}t\,.$$

$u[\widetilde{\lambda}(\theta),\, \widetilde{\mu}(\zeta)]$ は，ラメ係数関数 $\widetilde{\lambda}(\theta),\, \widetilde{\mu}(\zeta)$ が与えられたときの (1) の解である．汎関数 J の最小化関数により，設計変数 θ，ζ を同定する．最小化関数を同定する方法として，抽象勾配法を用いる．そのために必要な汎導関数は，次のとおりに求めることができる．

$$\frac{\partial J}{\partial\theta} = (C_\lambda^{(2)} - C_\lambda^{(1)})\frac{\mathrm{d}\phi_\lambda}{\mathrm{d}\theta}(\theta)\frac{\partial\widetilde{J}}{\partial\lambda}, \quad \frac{\partial J}{\partial\zeta} = (C_\mu^{(2)} - C_\mu^{(1)})\frac{\mathrm{d}\phi_\mu}{\mathrm{d}\zeta}(\zeta)\frac{\partial\widetilde{J}}{\partial\mu}.$$

ただし，

$$\left\langle \frac{\partial\widetilde{J}}{\partial\lambda}(\widetilde{\lambda},\, \widetilde{\mu}), \varphi \right\rangle = \int_0^T (\boldsymbol{u}'[\varphi, 0], 2(\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}))_{H^1}\, \mathrm{d}t,\ \left\langle \frac{\partial\widetilde{J}}{\partial\mu}(\widetilde{\lambda},\, \widetilde{\mu}), \psi \right\rangle = \int_0^T (\boldsymbol{u}'[0, \psi], 2(\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}))_{H^1}\, \mathrm{d}t.$$

ここで，$\boldsymbol{u}'[\varphi, \psi]$ は次の方程式の解である．

$$\rho\partial_t^2\boldsymbol{u}' = \nabla^{\mathrm{T}}\sigma_{\lambda,\,\mu}(\boldsymbol{u}') - \nabla^{\mathrm{T}}\sigma_{\varphi,\psi}(\boldsymbol{u}[\widetilde{\lambda}(\theta), \widetilde{\mu}(\zeta)]) \quad \text{in } \Omega\times(0,\, T)\,.$$

ただし $\boldsymbol{u}'(\cdot,\, 0)|_\Omega = \partial_t\boldsymbol{u}'(\cdot, 0)|_\Omega = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{u}'|_{\partial\Omega\times(0,T)} = \boldsymbol{0}$ である．未知の設計変数関数を，次の反復プロセスにより同定する．

$$\theta_{\ell+1} = \theta_\ell + \epsilon_\ell s_\theta^\ell, \quad \zeta_{\ell+1} = \zeta_\ell + \epsilon_\ell s_\zeta^\ell \quad (\ell = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\ldots).$$

ここで $s_\theta^\ell,\, s_\zeta^\ell$ は探索方向，$\epsilon_\ell > 0$ は適切に与えられた探索の幅である．探索方向は，次の方程式を解くことで得る．

$$a_\theta(s_\theta,\, \varphi) = -\left\langle \frac{\partial J}{\partial\theta},\, \varphi \right\rangle, \quad \forall\varphi \in H^2(\Omega), \quad a_\zeta(s_\zeta,\, \psi) = -\left\langle \frac{\partial J}{\partial\zeta},\, \psi \right\rangle, \quad \forall\psi \in H^2(\Omega).$$

$a_\theta(\cdot,\, \cdot),\, a_\zeta(\cdot,\, \cdot)$ は，H^2 内積を基礎として定める．これら双一次形式による方程式を解くことで各ステップで探索方向を定め，更新することで設計変数を同定し，それにより未知のラメ係数関数を求める．数値実験結果については，講演時に示す．

謝辞　本研究は JSPS 科研費 23K03236 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] 代田健二, H1 型勾配法を用いた弾性波動方程式の係数同定問題に対する数値再構成手法, 第 29 回計算工学講演会講演論文集, F-01-04（PDF）, 2024.

周期構造による散乱透過率のトポロジー感度解析について

飯盛 浩司 [1]
[1] 慶應義塾大学理工学部
e-mail : isakari@sd.keio.ac.jp

$\Omega^c \subset U := (-L/2, L/2) \times \mathbb{R}$ を用いて $\Omega := U \setminus \overline{\Omega^c}$ で定義される単位構造が x_1 軸方向に周期 L で並んだ周期領域に対し、入射角 θ、波数 k のスカラー平面波 $u^{\mathrm{in}} := \exp(\mathrm{i}k(x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta))$ を入射したときの散乱波を u^{sc} と書く。このとき、全場 $u := u^{\mathrm{in}} + u^{\mathrm{sc}}$ の Ω への制限として以下の境界値問題の解を仮定する。

$$\nabla^2 u(x) + k^2 u(x) = 0 \quad x \in \Omega \tag{1}$$

$$q(x) := \nabla u(x) \cdot n(x) = 0 \quad x \in \Gamma := \partial\Omega^c \tag{2}$$

$$u(x + Le_1) = u(x)e^{\mathrm{i}\beta} \quad x \in \Gamma_L := \{x \mid x_1 = -L/2\} \tag{3}$$

$$q(x + Le_1) = -q(x)e^{\mathrm{i}\beta} \quad x \in \Gamma_L \tag{4}$$

$$u^{\mathrm{sc}}(x) \to \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} C_m^{\pm} \exp(\mathrm{i}d_n^{\pm} \cdot x) \quad x_2 \to \pm\infty \tag{5}$$

ここに $e_1 := (1, 0)^t$、$\beta := kL\cos\theta$、n は Ω^c の内向き単位法線、$n_{\min} := -\lfloor (kL + \beta)/2\pi \rfloor$、$n_{\max} := -\lfloor (kL - \beta)/2\pi \rfloor$、$\lfloor \cdot \rfloor$ は床関数である。また、遠方における散乱場 (5) を構成する平面波の振幅 $d_n^{\pm}$ は既知であり、その振幅 $C_n^{\pm}$ は $u|_{\Gamma}$ を用いて以下のように表される。

$$C_n^{\pm} := \mp \frac{1}{2Ld_{n2}^{\pm}} \int_{\Gamma} (d_n^{\pm} \cdot n(x)) u(x) \exp(-\mathrm{i}kd_m^{\pm} \cdot x) \, \mathrm{d}\Gamma \tag{6}$$

さらに、エネルギー透過率 T は次式で評価できる [1]。

$$T = \frac{1}{\sin\theta} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} |C_m^{+} + \delta_{m0}|^2 d_{m2}^{+} \tag{7}$$

ここに δ_{m0} は Kronecker のデルタである。

本研究の目的は、与えられた周波数帯 $[f_1, f_2]$ における透過率の平均

$$J = \frac{1}{f_2 - f_1} \int_{f_1}^{f_2} T \, \mathrm{d}f \tag{8}$$

を最小化するような周期構造を求めるためのトポロジー最適化を構築することにある。はじめに、(8) に現れる積分を一般的な数値積分法で求めることは現実的ではないことに注意する。というのも、周期構造のエネルギー透過率 T はいわゆるアノマリに対応して、周波数の僅かな変動に対して急峻に変化することがあり、したがって積分点を適切に配置することが難しいためである。そこで、[1] において T の周波数応答を Padé 近似して得られた有理多項式を解析的に積分する方法を提案した。なお、Padé 近似において必要となる C_n^{+} などの高階周波数微分は境界要素法とフォーワードモードの自動微分を組み合わせた手法により高速に求めることができる [2]。さて、本講演の主題は、このようにして評価した (8) のトポロジー導関数 $\mathcal{D}_{\mathrm{T}}J$ を求めることにある。T の Padé 近似として、分子、分母がそれぞれ M、N 次の多項式を用いる場合を考える。この時、J は遠方場係数 C_n^{+} の高々

$M+N$ 階周波数微分で表される。したがって J のトポロジー導関数は C_n^+ の $i=0,\cdots,M+N$ 階周波数微分のトポロジー導関数 $\mathcal{D}_\mathrm{T}(C_n^+)^{(i)}$ を用いて以下のように書ける。

$$D_\mathrm{T}J=\Re\left[\sum_{n=n_\mathrm{min}}^{n_\mathrm{max}}\sum_{i=0}^{M+N}\frac{\partial J}{\partial(C_n^+)^{(i)}}\mathcal{D}_\mathrm{T}(C_n^+)^{(i)}\right] \tag{9}$$

随伴変数法を用いて (9) を評価すると次式を得る。

$$D_\mathrm{T}J=\Re\left[(2\nabla u\cdot\nabla\tilde{u}-k^2u\tilde{u})^{(M+N)}\right] \tag{10}$$

ここに、$\tilde{u}$ は随伴変数であり、以下の境界値問題の解である。

$$\nabla^2\tilde{u}(x)+k^2\tilde{u}(x)=0\quad x\in\Omega \tag{11}$$

$$\tilde{q}(x):=\nabla\tilde{u}(x)\cdot n(x)=0\quad x\in\Gamma \tag{12}$$

$$\tilde{u}(x+Le_1)=\tilde{u}(x)e^{-\mathrm{i}\beta}\quad x\in\Gamma_L \tag{13}$$

$$\tilde{q}(x+Le_1)=-\tilde{q}(x)e^{-\mathrm{i}\beta}\quad x\in\Gamma_L \tag{14}$$

$$\tilde{u}(x)-\tilde{u}^\mathrm{in}(x)\to\sum_{n=-n_\mathrm{max}}^{-n_\mathrm{min}}\tilde{C}_m^\pm\exp(\mathrm{i}\tilde{d}_n^\pm\cdot x)\quad x_2\to\pm\infty \tag{15}$$

ここに、$\tilde{u}^\mathrm{in}$ はで定義される。

$$\tilde{u}^\mathrm{in}(x)=\sum_{n=n_\mathrm{min}}^{n_\mathrm{max}}\frac{\mathrm{i}v_m}{2kLd_{m2}}\exp(-\mathrm{i}kd_m\cdot x) \tag{16}$$

$$v_m^{(i)}:=\frac{1}{\binom{M+N}{i}}\frac{\partial J}{\partial(C_m^+)^{(M+N-i)}}\quad(i=0,\cdots,M+N) \tag{17}$$

本研究の主結果である (8) の証明とこれを用いたトポロジー最適化の結果は講演会当日に示す。

謝辞　本研究は JSPS 科研費 23K28103 の助成を受けたものです。

参考文献

[1] Y. Honshuku and H. Isakari, BEM-based fast frequency sweep for acoustic scattering by periodic slab, Journal of Computational Physics, Vol. 509 (2024), 113046.

[2] J. Qin, H. Isakari, T. Takahashi, and T. Matsumoto, A robust topology optimization for enlarging working bandwidth of acoustic devices, nternational Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 122, No. 11 (2021), 2694–2711.

境界積分方程式に対する随伴変数法と形状導関数の正則性

松島 慶 [1], 山田 崇恭 [1]
[1] 東京大学大学院工学系研究科
e-mail : matsushima@mid.t.u-tokyo.ac.jp

1　緒言

形状導関数は形状 (有界領域の境界) から実数値への対応を与える汎関数の導関数であり、形状・トポロジー最適化などの構造最適化や逆問題に関連する数値計算に用いられる。例えば典型的な形状最適化問題では、最適化の対象となる領域上で定義される偏微分方程式の解を引数とする汎関数を考え、その汎関数を (局所) 最小とする形状を探索する。形状導関数はこのような最適化問題に対する勾配法を構築する際に必要となる。偏微分方程式に関連する形状最適化問題に対する形状導関数に関して既に多くの事実が知られており、またそれらを応用した数値計算に関しても数多くの結果が報告されている [1]。

本研究は偏微分方程式に関連する形状導関数に関して知られる事柄の一部が境界積分方程式に対しても成り立つことを確認する。具体的には、境界積分方程式の解に陰に依存する形状汎関数の形状導関数が随伴変数法と呼ばれる手法を用いて評価できることを示し、また得られる導関数 (の関数による表現) の正則性について議論する。

2　境界積分方程式と形状導関数

本稿では C^k 級の 2π 周期実関数全体の Banach 空間を $C^k_{2\pi}$ と表記する。$\gamma_0 > 0$ を定数として $C^k_{2\pi}$ の閉部分集合 U_{ad} を $U_{\mathrm{ad}} := \{\varphi \in C^k_{2\pi} : \varphi(t) \geq \gamma_0 \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}$ で定義する。与えられた $\gamma \in U_{\mathrm{ad}}$ に対して $\mathbb{R}^2$ 上の有界領域 Ω_γ を以下で定める。

$$\partial\Omega_\gamma = \{(\gamma(t)\cos t, \gamma(t)\sin t)^T : 0 \leq t \leq 2\pi\} \tag{1}$$

ここで、次の第 2 種 Fredholm 型の境界積分方程式について考える。

$$\varphi(x) + \int_{\partial\Omega_\gamma} K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}s(y) = f|_{\partial\Omega_\gamma}(x) \quad \text{for all } x \in \partial\Omega_\gamma \tag{2}$$

ここに、$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続関数、積分核 $K : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ もまた連続とする。この境界積分方程式は変数変換により次の $[0, 2\pi]$ 上の積分方程式と等価となる。

$$\psi(t) + \int_0^{2\pi} K(\gamma(t), \gamma(\tau))|\gamma'(\tau)|\psi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(\gamma(t)) \quad \text{for all } t \in [0, 2\pi] \tag{3}$$

$$\psi(t) = \varphi(x(t)) \tag{4}$$

連続関数 $\psi \in C_{2\pi}$ を連続関数

$$t \mapsto \int_0^{2\pi} K(\gamma(t), \gamma(\tau))|\gamma'(\tau)|\psi(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5}$$

に写す線形作用素を $A_\gamma : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ とする。この作用素 A_γ はコンパクトであり、また K の連続性から $\gamma \mapsto A_\gamma \in \mathcal{L}(C_{2\pi})$ は Fréchet 微分可能であることが分かる [2]。ここに、$\mathcal{L}(C_{2\pi})$ は $C_{2\pi}$ からそれ自身への有界線形作用素全体の集合であり、作用素ノルムを備えた Banach 空間である。

形状を表す関数 γ の許容集合 U_{ad} のある開部分集合を X として、積分方程式 $(I+K_\gamma)\psi = f\circ\gamma$ が任意の $\gamma \in X$ で一意可解であるとする。その解 $\psi_\gamma \in C_{2\pi}$ を用いて形状汎関数 $j : X \to \mathbb{R}$ を $j(\gamma) := J(\gamma, \psi_\gamma)$ で定める。ここに $J : X \times C_{2\pi} \to \mathbb{R}$ は Fréchet 微分可能な汎関数である。このとき、連鎖律から汎関数 j は Fréchet 微分可能であることが分かる。講演では、その微分係数の表現を随伴変数法を用いて導出し、またその正則性について考察する。

参考文献

[1] 畔上 秀幸, 形状最適化問題, 森北出版, 2016.

[2] R. Kress, Linear Integral Equations, Springer, 2014.

過剰決定系における解の構造とその逆問題への応用

滝口 孝志 [1]
[1] 防衛大学校数学教育室
e-mail : takashi@nda.ac.jp

1 概要

本講演では, 以下のような過剰決定系の解 (及び最小 2 乗解) について議論する.

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots \\ F_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ここで, F_j 達は (必ずしも多項式で無い) 連続関数で, $m > n$ とする. この議論の動機付けとなったのは, 実用で対象となる機会の多い, 過剰決定系,

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r_1^2 \\ \cdots \\ (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2 = r_m^2 \end{cases} \tag{2}$$

である. ここで, $m > 3$ である. (2) は観測点 (x_i, y_i, z_i) から対象物 (x, y, z) への距離を求める際に得られる系であるが, 実用上はその右辺達に誤差が含まれており, 対象物 (x, y, z) は近似的にしか復元できない. 本講演では, このような過剰決定系の一般論を実用への還元が可能な形でまとめることを目的とする.

2 半同値系

定義 1 (1) において, 以下の操作を半同値変形と呼ぶ.

(i) ある式において, 連続な項の移項を行う.

(ii) (i 式) と (j 式) の (0 でない) 左辺同士と右辺同士を掛け合わせる. または, ある式の両辺に 0 でない定数を掛ける.

(iii) (i 式) と (j 式) の左辺同士と右辺同士を足し合わせる.

(1) の全ての式を用いた半同値変形によって得られた系を (1) の半同値系とよぶ.

命題 2 系 (1) とその半同値系 (D) について, 以下が成立する.

$$\{\text{Solutions to (1)}\} \subset \{\text{Solutions to (D)}\} \tag{3}$$

本講演では, 以下を仮定する.

仮定 3 系 (1) は解を持ち, その半同値系として線形過剰決定系

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{s} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - s_1 & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - s_2 & = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n - s_k & = 0 \end{cases} \tag{4}$$

が得られ, その係数行列 A の階数は n である.

この仮定は実用上, 自然なものである. 実際, 系 (2) において, 復元すべき対象物 (x, y, z) は必ず存在しており, 適切且つ十分な測定値 m を得れば, $\mathrm{rank}A = n$ となる. .

3　主定理

本節では, 実用上の応用を視野にいれ, 誤差を含んだデータを用いた近似解法について議論する. これまでは, 系 (1) について議論してきたが, 誤差などの影響により, 実際に得られるのは, 次の形の系

$$\left\{\begin{array}{c} F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \epsilon_1 \\ \cdots \\ F_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \epsilon_m \end{array}\right. \tag{5}$$

で, その半同値過剰決定線形系は,

$$A\boldsymbol{x} = \widetilde{\boldsymbol{s}} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - s_1 & = \varepsilon_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - s_2 & = \varepsilon_2, \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n - s_k & = \varepsilon_k \end{cases} \tag{6}$$

となる. ここで, 右辺の $\epsilon_i, \varepsilon_j$ 達は誤差の影響を表す非常に小さな数である.

定理 4　系 (6) (または系 (4)) において $\mathrm{rank}A = n$ ならば, 系 (1) の解は一意であり, その近似解のひとつは, 系 (6) の最小 2 乗解として得られる.

この定理により, 誤差などの影響によって, 実際は入手不可能な系 (1) の解の一意性が, 入手可能な系 (6) の係数行列の階数から判別でき, 系 (1) の近似解も構成可能なことがいえる. その近似解は

$$\boldsymbol{x} = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\widetilde{\boldsymbol{s}} \tag{7}$$

として得られる事が知られている [1]. ここで, $\widetilde{\boldsymbol{s}}$ は $\widetilde{s}_i = s_i + \varepsilon_i$ を第 i 成分とする m 次元ベクトルである. また, (7) の右辺に現れる行列 $({}^tAA)^{-1}\,{}^tA$ は行列 A の Moore-Penrose 逆行列出ある事もいえる [1].

半同値系の一般論及び定理 4 の証明については [1] を, 定理 4 の応用例については [2, 3, 4] を, それぞれ参照されたい.

参考文献

[1] Hashizume, K., Maruya, M., Takabatake, T., Ochi, T. and Takiguchi, T. : *Structure of the least square solutions to overdetermined systems and its applications to practical inverse problems,* Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, **41** (2024) pp. 945-960

[2] Takiguchi, T. : *A theoretical study of the algorithm to practicalize CT by G. N. Hounsfield and its applications,* Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, **37** (2020) pp. 115-130.

[3] Takabatake, T., Hashizume, K., Ochi, T. and Takiguchi, T. : *Investigation of reinforcing bars in reinforced concrete structures by ultrasonic measurements,* Practical inverse problems and their prospects, Mathematics for Industry **37** (2023) Springer, pp. 97-110.

[4] Maruya, M and Takiguchi, T. : *Visual 3D reconstruction of a rotating object in space envirnment with a least-squares framework,* Practical inverse problems and their prospects, Mathematics for Industry **37** (2023) Springer, pp. 127-144.