薄肉シェルの変形に現れる対称性

軸丸 芳揮 [1]
[1] 東洋大学情報連携学部
e-mail : jikumaru@toyo.jp

1　概要

シェル構造とは，適切な形状によって応力を伝達する構造であり，例えば建築における薄く軽量な構造設計への応用をもつ．本講演では，薄肉シェルの線型理論における変形において，可積分系理論で知られる対称性と呼ばれる概念が自然に現れることを紹介する．

2　可積分系理論における対称性

汎函数 $K = K(u)$ に対し，以下の形の発展方程式を考える：

$$u_t = K(u). \tag{1}$$

式 (1) が摂動 $u \to u + \varepsilon S$ の下で不変であるという条件を課し，**線型化方程式**を次式で定める：

$$S_t = K'(u)[S], \quad K'(u)[S] := \left.\frac{\partial}{\partial \varepsilon} K(u + \varepsilon S)\right|_{\varepsilon=0}. \tag{2}$$

線型化方程式の解 $S = S_u$ を**対称性**と呼び，保存量と密接な関わりをもつ．例えば $K(u) = (3u^2 + u_{xx})_x = 6uu_x + u_{xxx}$ とおくと，式 (1) は KdV 方程式

$$u_t = 6uu_x + u_{xxx}, \tag{3}$$

となり，線型化方程式は以下の形となる：

$$S_t = 6(uS)_x + S_{xxx}. \tag{4}$$

これらの解 S は再帰作用素を用いることで次々と生成できることが知られている [1]．KdV 方程式のように，無限個の対称性をもつ方程式 (1) は **exactly solvable** であるという．古典的なソリトン方程式の多くは，この意味で exactly solvable である．以下で示す結果では，曲面に対する Gauss 方程式が exactly solvable である場合に適用可能である．

3　主結果：薄肉シェルの変形に現れる対称性

シェル中央面を $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y)$ とみなし，(x, y) は曲率線座標であるとする．単位接ベクトル $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ を以下の式で定める：

$$\boldsymbol{r}_x = A_1 \boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{r}_y = A_2 \boldsymbol{Y}, \quad A_1^2 = \boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_x, \quad A_2^2 = \boldsymbol{r}_y \cdot \boldsymbol{r}_y. \tag{5}$$

単位法ベクトルを $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ とおく，主曲率を κ_1, κ_2 で表す．便宜上，以下の記号を導入する：

$$p = \frac{(A_1)_y}{A_2}, \quad q = \frac{(A_2)_x}{A_1}, \quad H_\circ = -\kappa_1 A_1, \quad K_\circ = -\kappa_2 A_2. \tag{6}$$

このとき曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y)$ に対する Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式は以下のように表される：

$$p_y + q_x + H_\circ K_\circ = 0, \quad (H_\circ)_y = pK_\circ, \quad (K_\circ)_x = qH_\circ. \tag{7}$$

シェル中央面の変位 $\Delta = u\boldsymbol{X} + v\boldsymbol{Y} + w\boldsymbol{N}$ に対し，各種ひずみ量を以下のように定める [2]：

$$\begin{aligned}&\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}(u_x + pv + H_\circ w), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2}(v_y + qu + K_\circ w),\\&\omega = \frac{1}{A_1}(v_x - pu) + \frac{1}{A_2}(u_y - qv), \quad \vartheta = \frac{1}{A_1}(-w_x + H_\circ u), \quad \psi = \frac{1}{A_2}(-w_y + K_\circ v),\\&k_1 = -\frac{\vartheta_\alpha + p\psi}{A_1}, \quad k_2 = -\frac{\psi_\beta + q\vartheta}{A_2}, \quad \tau = \frac{\psi_\alpha - p\vartheta}{A_1} + \frac{\omega_2}{R_1} = \frac{\vartheta_\beta - q\psi}{A_2} + \frac{\omega_1}{R_2},\end{aligned} \tag{8}$$

と定める．ここで $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は垂直ひずみ，ω はせん断ひずみと呼ばれ，k_1, k_2 は変形に伴う座標線の曲がり率，τ はねじれ率 (振率とは異なる) を表す量である．

注意 1　変位が法線方向のみ $(u = v = 0)$ のとき，せん断ひずみ $\omega_1 = \omega_2 = 0$ となり，ねじれ量 $\tau = 0$ となる条件は $w_{xy} = (\log A_1)_y w_x + (\log A_2)_x w_y$ と表され，これは共役網の条件に他ならない．

6 つのひずみ量は 3 つの変位成分から定まるため，ひずみ量は全く任意に定めることはできず，ある両立条件を満たす必要がある [3]．変形に伴うせん断ひずみ ω と座標線のねじれ τ が生じないとき，この両立条件は，曲面に対する Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式の ‘対称性’ とみなすことができる：

定理 2（[4]）　曲率線座標をもつシェル中央面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y)$ の第一基本形式の係数を A_1, A_2，主曲率を κ_1, κ_2 と表す．対称性 $S_{A_1}, S_{A_2}, S_{\kappa_1}, S_{\kappa_2}$ により定義されるひずみ量

$$\varepsilon_1 = \frac{S_{A_1}}{A_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{S_{A_2}}{A_1}, \quad k_1 = S_{\kappa_1} + \frac{S_{A_1}}{A_1}\kappa_1, \quad k_2 = S_{\kappa_2} + \frac{S_{A_2}}{A_2}\kappa_2, \tag{9}$$

は [3] における適合条件式を $\omega = \tau = 0$ でもって満たす．特に曲面 $\boldsymbol{r}$ の Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式が exactly solvable のとき，せん断ひずみと座標線のねじれを生じない変形が無限に存在する．

例 (極小曲面の場合)：等温曲率線座標において

$$A_1 = A_2 = e^u, \quad H_\circ = e^{-u}, \quad K_\circ = -e^{-u}, \tag{10}$$

となる函数 u がとれる．Gauss 方程式は Liouville 方程式 $u_{xx} + u_{yy} = e^{-2u}$ となり，線型化方程式は $S_{xx} + S_{yy} + 2e^{-2u}S = 0$ となる．線型化方程式の任意の解 (対称性) S に対し，ひずみ量

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = S, \quad k_1 = Se^{-2u}, \quad k_2 = -Se^{-2u}. \tag{11}$$

は $\omega = \tau = 0$ でもって Gol’denweizer の条件式を満たす．

謝辞　本研究は JST CREST JPMJCR1911 および JSPS KAKENHI Grant Number JP24K16924 の補助を受けた．

参考文献

[1] A. S. Fokas, P. M. Santini, Recursion operators and bi-Hamiltonian structures in multi-dimensions. I, *Comm. Math. Phys.* **115**(3): 375–419, 1988.

[2] V. V. Novozhilov, Thin shell theory, Groningen: P. Noordhoff Ltd., 1965.

[3] A. L. Gol’denweizer, The equation of the theory of shells, *Prinkl. Mat. Mekh.*, Akademiya Nauk. S.S.S.R., **4**(2), 1940.

[4] Y. Jikumaru, Symmetries in the linear theory of the deformation of thin shells, arXiv:2406.05997.

薄肉シェルの変形理論を用いた変分公式の導出

軸丸 芳揮 [1]
[1] 東洋大学情報連携学部
e-mail : jikumaru@toyo.jp

1 概要

シェルの変形理論における (無限小) ひずみ量を用いると，例えば座標線に沿う垂直ひずみの和が面積要素の第一変分に対応することが示される．一般に面積，体積および曲率の第一変分公式が，シェルの変形によるひずみ量によって記述できることを紹介する．

2 曲面に対する記号と "無限小" 変位ひずみ関係式

M を (向きづけ可能かつ滑らかな) 2 次元多様体，$\boldsymbol{r} : M \to \mathbb{R}^3$ をはめ込みとして $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y)$ を考える．ここで局所座標 (x, y) は曲率線座標とする．単位接ベクトル $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ を次式で定める:

$$\boldsymbol{r}_x = A_1\boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{r}_y = A_2\boldsymbol{Y}, \quad A_1^2 = \boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_x, \quad A_2^2 = \boldsymbol{r}_y \cdot \boldsymbol{r}_y. \tag{1}$$

単位法ベクトルを $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ とおく，主曲率を κ_1, κ_2 で表す．便宜上，以下の記号を導入する：

$$p = \frac{(A_1)_y}{A_2}, \quad q = \frac{(A_2)_x}{A_1}, \quad H_\circ = -\kappa_1 A_1, \quad K_\circ = -\kappa_2 A_2. \tag{2}$$

このとき，曲面に対する Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式は以下のように表される：

$$p_y + q_x + H_\circ K_\circ = 0, \quad (H_\circ)_y = pK_\circ, \quad (K_\circ)_x = qH_\circ. \tag{3}$$

変分ベクトル場を $\boldsymbol{V}$ とする曲面の変分を以下の記号で表す:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + t\boldsymbol{V}, \quad \boldsymbol{V} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_n\boldsymbol{N}, \quad |t| \ll 1, \tag{4}$$

便宜上，変分ベクトル場を接成分 $\boldsymbol{\eta}$ と法成分に分解する:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\eta} + v_n\boldsymbol{N}, \quad \boldsymbol{\eta} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2. \tag{5}$$

このとき，以下のような "無限小" 変位ひずみ関係式を定める:

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_1 &= \frac{1}{A_1}((v_1)_x + pv_2 + H_\circ v_n), \quad \bar{\varepsilon}_2 = \frac{1}{A_2}((v_2)_y + qv_1 + K_\circ v_n), \\
\overline{\omega}_1 &= \frac{1}{A_1}((v_2)_x - pv_1), \quad \overline{\omega}_2 = \frac{1}{A_2}((v_1)_y - qv_2), \\
\overline{\vartheta} &= \frac{1}{A_1}(-(v_n)_x + H_\circ v_1), \quad \overline{\psi} = \frac{1}{A_2}(-(v_n)_y + K_\circ v_2).
\end{aligned} \tag{6}$$

ここで $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2$ は垂直ひずみ，$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$ はせん断ひずみ, $\overline{\vartheta}, \overline{\psi}$ はたわみ角に対応する量である．

3 第一変分公式 [1]

局所座標における面積要素 $dA = \|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y\|\, dxdy$ の第一変分は以下のように計算される:

$$\delta dA = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \frac{dA_t - dA}{t} = (\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2)\, dA. \tag{7}$$

すなわち，面積要素の第一変分は，各座標線に沿う (無限小の) 垂直ひずみの和で表される．この帰結として，よく知られた第一変分公式

$$\delta dA = (\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2)\, dA = (\operatorname{div} \boldsymbol{\eta} - 2\mathcal{H} v_n)\, dA, \tag{8}$$

が得られる．ここで以下の記号を用いた ($\mathcal{H}$ は平均曲率である):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{A_1 A_2} \left((v_1 A_2)_x + (v_2 A_1)_y \right), \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2). \tag{9}$$

さらに，主曲率の第一変分は以下のように表されることがわかる:

$$\delta\kappa_1 = -\frac{\overline{\vartheta}_x + p\overline{\psi}}{A_1} - \bar{\varepsilon}_1 \kappa_1, \quad \delta\kappa_2 = -\frac{\overline{\psi}_y + q\overline{\vartheta}}{A_2} - \bar{\varepsilon}_2 \kappa_2. \tag{10}$$

これらを用いて，例えば平均曲率 $\mathcal{H}$ の第一変分を以下のように計算できる:

$$\delta\mathcal{H} = \frac{1}{2} \operatorname{div} \nabla v_n + \nabla\mathcal{H} \cdot \boldsymbol{\eta} + (2\mathcal{H}^2 - \mathcal{K}) v_n, \tag{11}$$

特に，シェルの膜理論において線型 Weingarten 曲面は重要なクラスであるが，汎函数

$$E = \int_M (a\mathcal{H} + b)\, dA + cV, \quad V = \frac{1}{3} \int_M \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{N}\, dA, \tag{12}$$

を設定すると (V は曲面が囲む体積)，∂M を M の境界として，第一変分は

$$\begin{aligned} \delta E = &-\int_M (a\mathcal{K} + 2b\mathcal{H} - c) v_n\, dA \\ &+ \int_{\partial M} \left[a \left(\frac{1}{2} \nabla v_n + \mathcal{H}\boldsymbol{\eta} \right) + b\boldsymbol{\eta} + \frac{c}{3} ((\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{N})\boldsymbol{\eta} - v_n \boldsymbol{R}) \right] \cdot \boldsymbol{t}\, ds. \end{aligned} \tag{13}$$

と計算される．したがって，境界固定の変分に対する停留条件は線型 Weingarten 曲面

$$a\mathcal{K} + 2b\mathcal{H} = c, \tag{14}$$

となる．これらは本質的に [2] などにおいて古典的に知られる結果の言い換えにすぎないが，ここに現れる境界項は，区分的離散平均曲率一定曲面の生成などにおいて役立つ [3].

謝辞　本研究は JST CREST JPMJCR1911 および JSPS KAKENHI Grant Number JP24K16924 の補助を受けた.

参考文献

[1] Y. Jikumaru, A derivation of first variation formulas from the strain-displacement relations in thin shell theory, arXiv:2401.07486.

[2] R. Reilly, Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms, *J. Diff. Geom.* **8**(3): 465-477 (1973).

[3] K. Hayashi, Y. Jikumaru, M. Ohsaki, T. Kagaya, Y. Yokosuka, Mean curvature flow for generating discrete surfaces with piecewise constant mean curvatures, *Comput. Aided Geom. Des.* **101**, 102169 (2023).

Non-uniqueness of closed hypersurfaces with constant anisotropic mean curvature

小磯 深幸 [1], 軸丸 芳揮 [2]
[1] 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, [2] 東洋大学情報連携学部
e-mail : koiso@imi.kyushu-u.ac.jp

1 概要

曲面の非等方的エネルギーは，曲面の向きに依存するエネルギー密度の曲面上での積分であり，結晶の表面張力の数理モデルを与える．同じ体積を囲む曲面の中での非等方的エネルギーの平衡曲面は，非等方的平均曲率が至る所一定の曲面 (以下では，constant anisotropic mean curvature を略して CAMC 曲面と書く) となる．CAMC 曲面の特別な場合である CMC 曲面 (平均曲率一定曲面の略称．シャボン玉の数理モデルを与える) については，自己交差を持たないなどの良い性質を持つ閉曲面は球面のみであることが知られている．本講演では，CAMC 閉曲面についてはこのような一意性が必ずしも成り立たないことを報告する．

2 問題と主結果

曲面の非等方的エネルギーは，小さい結晶の数理モデルを与えるために提案され ([1])，その定義は以下のとおりである．3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内の単位球面 $S^2 = \{\nu \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|\nu\| = 1\}$ 上の正値連続関数 $\gamma : S^2 \to \mathbf{R}_{>0}$ を考える．$\mathbf{R}^3$ 内にはめ込まれた区分的に C^2 級の曲面 X は，2 次元の向き付けられた連結でコンパクトな C^∞ 級多様体 M から $\mathbf{R}^3$ への区分的に C^2 級の写像 $X : M \to \mathbf{R}^3$ によりパラメータ表示される．X の特異点集合を $S(X)$ とすると，X の単位法ベクトル場 ν が $M \setminus S(X)$ 上で定義され，X の非等方的エネルギーが $\mathcal{F}_\gamma(X) := \int_{M\setminus S(X)} \gamma(\nu)\, dA$ により定義される．ここで，dA は X の面積要素である．

正数 $V > 0$ に対し，体積 V を囲む閉曲面の中で $\mathcal{F}_\gamma$ 最小のものが (平行移動を除き) 一意的に存在し，ウルフ図形 $W_\gamma := \partial\Big(\cap_{\nu\in S^2}\big\{X \in \mathbf{R}^3 \mid \langle X, \nu\rangle \le \gamma(\nu)\big\}\Big)$ に相似である ([2])．$\gamma \equiv 1$ のときは，$\mathcal{F}_\gamma(X)$ は X の面積，W_γ は単位球面である．γ が C^1 級ならば，Cahn-Hoffman 写像 $\xi_\gamma : S^2 \to \mathbf{R}^3$, $\xi_\gamma(\nu) = D\gamma|_\nu + \gamma(\nu)\nu$ が定義され，W_γ は像 $\xi_\gamma(S^2)$ の原点を内部に含む最小の凸閉曲面である．

より一般に，同じ体積を囲む閉曲面の中で，$\mathcal{F}_\gamma$ の極小値を与えるものは，小さい (重力が無視できる) 単結晶の数理モデルとなっているであろう．そこで，区分的に滑らかな閉曲面の中で，囲む体積を変えない変分に対する $\mathcal{F}_\gamma$ の臨界点を考える．曲面 X の平均曲率を H で表し，Cahn-Hoffman 場を $\tilde{\xi}_\gamma := \xi_\gamma \circ \nu$ により定義する．臨界点 X は，非等方的平均曲率 $\Lambda := -(1/2)(-\mathrm{div}_M D\gamma + 2H\gamma) = -(1/2)\mathrm{trace}_M d(\tilde{\xi}_\gamma)$ が $M \setminus S(X)$ 上一定値であり，$\tilde{\xi}_\gamma$ が「modulo $S(X)$ の接線」で連続的に M 全体に拡張されるという性質により特徴付けられる ([3])．このような X を CAMC 曲面と呼ぼう．

「良い性質を持つ CAMC 閉曲面はウルフ図形 W_γ と相似か?」と問うことは自然である．実際，γ が C^∞ 級で W_γ が滑らかな狭義凸曲面である場合 (即ち，γ の $\mathbf{R}^3$ への斉次拡張 $\tilde{\gamma}$ が凸関数である場合．このとき「γ が凸」と言うことにする) は，CAMC 閉曲面 $X : M \to \mathbf{R}^3$ が (I) 安定，(II) 自己交差を持たない，(III)$M = S^2$ のいずれかの条件を満たせば，$X(M)$ は W_γ と相似である ([4, 5, 6, 7])．

しかしながら，CAMC 曲面が結晶の数理モデルであることに鑑みれば，滑らかな曲面のみではなく，区分的に滑らかな曲面をも考えることが自然であろう．本講演では，γ が凸とは限らない場合は，

上述の (II),(III) を満たす CAMC 閉曲面で W_γ と相似ではないものが存在することを示す．即ち，

定理 1 ([8])**.** 凸でない C^∞ 関数 $\gamma : S^2 \to \mathbf{R}_{>0}$ で，種数 0 の自己交差を持たない CAMC 閉曲面でウルフ図形 W_γ と相似でないものが出現するものが存在する．

例を 1 つあげる ([8])．$\gamma_1 : S^2 \to \mathbf{R}_{>0}$ を $\gamma_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (\nu_1^2 + \nu_2^2)^3 + \nu_3^6$ により定義する．Cahn-Hoffman 写像 $\xi_{\gamma_1} : S^2 \to \mathbf{R}^3$ を計算すると，図 1 の画像が，左から順に ξ_{γ_1} の像，ウルフ図形 W_{γ_1}，W_{γ_1} と相似でない CAMC 閉曲面の例 2 つを表す．右 2 つの曲面は自己交差を持たない種数 0 の CAMC 閉曲面でウルフ図形 W_γ と相似ではなく，従って，定理 1 を示す例となっている．

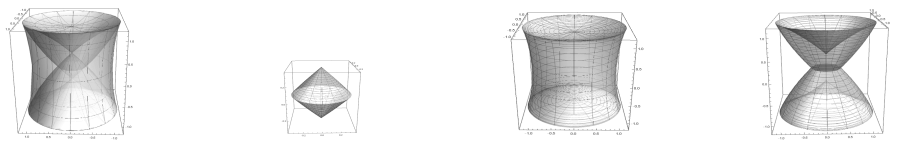

図 1. 左から順に，Cahn-Hoffman 写像 ξ_{γ_1} の像，ウルフ図形 W_{γ_1}，W_{γ_1} と相似でない CAMC 閉曲面 2 つ．

3　おわりに

凸ではない単結晶を作るのは難しいが，[9] では「お椀の表面状の単結晶」を組織的に作ることに成功している．その形状は，図 1 の右端の曲面の上半分とよく似ている．本研究が，このような凸ではない単結晶生成のメカニズムを数学的に解明することに寄与することが期待される．

謝辞　本研究は，JST CREST JP MJCR1911 並びに JSPS KAKENHI JP23K20212 の支援を受けたものである．

参考文献

[1] G. Wulff, Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachsthums und der Auflösung der Krystallflächen, Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie, 34 (1901), 449–530.

[2] J. E. Taylor, Crystalline variational problems, Bull. Amer. Math. Soc., 84 (1978), 568–588.

[3] M. Koiso, Uniqueness of stable closed non-smooth hypersurfaces with constant anisotropic mean curvature, preprint. arXiv:1903.03951 [math.DG]

[4] B. Palmer, Stability of the Wulff shape, Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998), 3661–3667.

[5] Y. He, H. Li, H. Ma and J. Ge, Compact embedded hypersurfaces with constant higher order anisotropic mean curvatures, Indiana Univ. Math. J., 58 (2009), 853–868.

[6] M. Koiso and B. Palmer, Anisotropic umbilic points and Hopf's theorem for surfaces with constant anisotropic mean curvature, Indiana Univ. Math. J., 59 (2010), 79–90.

[7] N. Ando, Hartman-Wintner's theorem and its applications, Calc. Var. Partial Differential Equations, 43 (2012), 389–402.

[8] Y. Jikumaru and M. Koiso, Non-uniqueness of closed embedded non-smooth hypersurfaces with constant anisotropic mean curvature, preprint. arXiv:1903.03958 [math.DG]

[9] O. Oki et al., Synchronous assembly of chiral skeletal single-crystalline microvessels, Science, 377 (2022), 673–678.

曲線の自己アフィン性と等積アフィン幾何

熊谷 駿 [1], 梶原 健司 [2]
[1 2] 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
e-mail：s-kumagai@imi.kyushu-u.ac.jp, kaji@imi.kyushu-u.ac.jp

本報告内容はプレプリント [1] に基づく．

1 曲線の自己アフィン性

原田ら [2] は実車の形状解析から抽出される曲線セグメント $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ の**曲率対数グラフ (LCG)**

$$\left\{ (X, Y) = \left(\log \rho(s), \log \left| \frac{\rho(s)}{\rho'(s)} \right| \right) \middle| s \in I \right\}$$

が直線に近くなる傾向が見られたことを指摘した．CAD システム上で視覚的に望ましい形状を設計するための「審美的な曲線」の要件の定式化として，次の自己アフィン性が提案された．

定義 1（原田ら [2]） 平面曲線 $\gamma(s) : I \to \mathbb{R}^2$ が**原田の自己アフィン性 (HSA)** をもつとは，任意の $I' \subset I$ に対し，ある径数変換 $t(s) : I \to I'$ とアフィン変換 $F \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ が次をみたすことをいう．

$$\gamma(t(s)) = F\gamma(s), \quad s \in I. \tag{1}$$

定理 2 平面曲線が HSA をもつことは，それが直線または放物線であることに同値である．

三浦 [3] は LCG が直線となる**対数型美的曲線 (LAC)** を構成し，次の自己アフィン性を定義した：

定義 3（三浦 [3]） 平面曲線 $\gamma(s) : I \to \mathbb{R}^2$ が**三浦の自己アフィン性 (MSA)** をもつとは，あるパラメータ変換 $t(s)$ と $\mu, \nu > 0$ があって任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して次をみたすことをいう．

$$\frac{ds}{dt}(t + \varepsilon) = \mu^{\varepsilon} \frac{ds}{dt}(t), \quad \rho(t + \varepsilon) = \nu^{\varepsilon} \rho(t). \tag{2}$$

定理 4 平面曲線が MSA をもつことは，それが LAC であることに同値である．

定義 5 曲線 $\gamma(s) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ がパラメータ変換 $t(s)$ とリー群 G について**延伸的自己アフィン性 (ESA)** をもつとは，ある可微分写像 $F : \mathbb{R} \to G$ が任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して次をみたすことをいう．

$$\gamma(t + \varepsilon) = F(\varepsilon)\gamma(t). \tag{3}$$

まず，平面曲線における HSA は $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ についての ESA である．また，MSA は $(s_t, \rho), (\mu^{\varepsilon} s_t, \nu^{\varepsilon} \rho)$ から決まる 2 曲線間の変換の群を G とし，これと LCG 座標 $X(s)$ についての ESA である．ESA を用いることにより，定理 2 は次のように拡張される．

定理 6 平面曲線が等積アフィン径数 ($\det(\gamma_u, \gamma_{uu}) = 1$ をみたすような径数 $u(s)$) とアフィン変換群 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ について ESA をもつことは，それが二次曲線であることに同値である．

2 証明の概要

(定理 2: HSA について.) $I = [a, b]$ とし，各 $\varepsilon \in I$ に対し半区間 $[a, \varepsilon], [\varepsilon, b]$ における HSA を実現するようなアフィン変換 $F_{\varepsilon}, F^{\varepsilon}$ を考える．式 (1) から $F_{\varepsilon}, F^{\varepsilon}$ の対称性を得て，傾斜 dy/dx についての関係式を取り出すことで次の補題を得る．

補題 7　HSA を持つ曲線 $\gamma(t):[a,b]\to\mathbb{R}^2$ に対し $\gamma_t(b)$ と $\gamma(b)-\gamma(a)$ が平行ならば微分方程式

$$\frac{dy}{dx}(\varepsilon)=\frac{y(\varepsilon)}{x(\varepsilon)+1},\quad \varepsilon\in I, \tag{4}$$

が成り立つ．さらに，そのような γ は直線に限る．

直線以外を考えるとき，アフィン変換によって $-\gamma(a)=\gamma(b)=(1,0)$, $\gamma_t(b)=\sqrt{-1}$ と正規化してよい．再び $F_\varepsilon, F^\varepsilon$ の対称性を用い，傾斜・曲率の関係式を取り出すことである関数 β に対し

$$\frac{|F^\varepsilon\gamma_t(b)|^3}{\det F^\varepsilon}=\frac{2|\beta(x(\varepsilon))|^3}{\beta(x(\varepsilon))(1-x(\varepsilon))}=1, \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dx}(\varepsilon)+\frac{y(\varepsilon)}{1-x(\varepsilon)}=\frac{2\beta(x(\varepsilon))}{1-x(\varepsilon)}\cdot\frac{dy}{dx}(a), \tag{6}$$

を得る．式 (5), (6) を解くことで放物線を得る．

(定理 4: MSA について.) 式 (2) の $\varepsilon=0$ における ε-微分を取ると s,ρ についての微分方程式

$$s_{tt}(t)=s_t(t)\log\mu,\quad \rho_t(t)=\rho(t)\log\nu, \tag{7}$$

が得られる．式 (7) を解くことで LAC を得る．

(定理 6: ESA について.) 等積アフィン幾何の曲線論 [4] を用いる．式 (3) の u, uu-微分をとると，**等積フレネ枠** $\Phi(u):=(\gamma_u,\gamma_{uu})$ が満たす式 $\Phi(u+\varepsilon)=F(\varepsilon)\Phi(u)$ を得る．さらに $\varepsilon=0$ における ε-微分を取ると

$$\Phi_u(u)=F'(0)\Phi(u)=:F\Phi(u), \tag{8}$$

を得る．ここで**等積フレネの公式** $\Phi_u=\Phi K$ を式 (8) と連立し，u-微分をとると

$$F\Phi_u=\Phi_u K+\Phi K_u, \tag{9}$$

$$F(\Phi K)=(F\Phi)K+\Phi K_u, \tag{10}$$

よって $K_u=0$，とくに**等積アフィン曲率** $-\gamma_{uuu}/\gamma_u$ が定数であることを解くと二次曲線を得る．

3　まとめ・備考

HSA は放物線，MSA は LAC をそれぞれ特徴づけ，両者は ESA として統合されることを示した．さらに，ESA は相似幾何・等積アフィン幾何の定曲率性を捉える自己アフィン性になっている [1].

謝辞　本研究は JST CREST JPMJCR1911 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] S. Kumagai, K. Kajiwara, “Self-affinities of planar curves: towards unified description of aesthetic curves”, preprint, arXiv: 2407.17008, 2024.

[2] 原田利宣, 森典彦, 杉山和雄, “曲線の物理的性質と自己アフィン性”，デザイン学研究, Vol.42, No.3, pp.33–40, 1995.

[3] 三浦憲二郎, “美しい曲線の一般式とその自己アフィン性”，精密工学会誌，72 (7) 857–861, 2006.

[4] 井ノ口順一, 曲線とソリトン，朝倉書店，2010.