

制御入力付き学習モデルにおける力学構造の越分岐予測について

山口 明宏¹, 田所 智², 行木 孝夫^{2,3}, 津田 一郎⁴

¹ 福岡工業大学 情報システム工学科, ² 北海道大学 数理・データサイエンス教育研究センター,

³ 北海道大学大学院 理学研究院数学部門, ⁴ 札幌市立大学 AIT センター

e-mail : aki@fit.ac.jp

1 概要

近年, 制御入力付きリザーバー計算 (RCMC) を用いた力学系の予測モデルにおいて, 周期軌道の領域での学習で, 未学習の分岐構造やカオス領域での力学構造を予測できることが報告されている [1]. 我々は, 制御入力付きエクストリームラーニング (ELMC) を提案し同様の予測ができることを示している [2]. 本研究では, このような周期領域や準周期領域での学習で分岐構造やカオス領域での挙動を予測することを「越分岐予測」と呼び, その学習メカニズムを解析する. 本発表では, 一般化した制御入力付き学習モデルを定義し, 多次元の制御入力に対してモデルの出力が学習したパラメータ点の出力の線形補間で表されることを理論的に示し, 数値実験によって検証した結果を報告する.

2 制御入力付き学習モデル

RCMC や ELMC を包括的に表現するために一般化した学習モデルを定義する. モデルは N 個のニューロンから構成され, N 次元のリカレント入力 r , M 次元の外部入力 x , K 次元の制御入力 c に対して, M 次元の出力 y を次式で定義する.

$$y_i(r, x, c) = \sum_{j=1}^N W_{i,j} u_j(r, x, c) \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (1)$$

$$u_j(r, x, c) = \phi_j(r, x) + g_j \left(\psi_j(r, x) + \sum_{k=1}^K C_{j,k} c_k \right) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

ここで, W は, $M \times N$ 行列, u_j, g_j は, j 番目のニューロンの出力と活性化関数, ϕ, ψ は, それぞれ N 次元出力の関数, C は, $N \times K$ 行列である. 学習対象は W とし, 他のパラメータは予め乱数などを用いて設定されているとする. W の学習では, 出力 y とその教師信号との平均二乗誤差を最小化する W を求める.

この学習モデルは, A を $N \times N$ 行列, B を $N \times M$ 行列, d を N 次元ベクトルとし, $\phi(r, x) = 0$, $\psi(r, x) = Ar + Bx + d$, $r(t+1) = u(r(t), x(t), c)$ とすると, RCMC に対応する. このとき $\phi(r, x) = -r$, $\dot{r}(t)/\gamma = u(r(t), x(t), c)$ とすると, 文献 [1] で微分方程式の学習に用いられた RCMC に対応する. また, $\phi(r, x) = 0$, $\psi(r, x) = Bx + d$ とすると ELMC にも対応する.

3 線形補間による越分岐予測

関数 $u(r, x, c)$ について, 制御入力 c に関する制御入力の空間での線形補間を示すことで, RCMC や ELMC の出力に関する線形補間を導出することができる. 対象とする力学系の S 次元 ($1 \leq S \leq K$) のパラメータ空間を $P \subseteq R^S$ とし, K 次元の制御入力の空間の $S+1$ 点, $c^{(0)}, c^{(1)}, \dots, c^{(S)}$ において, P 上の $S+1$ 点, $\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(S)} \in P$ での関数 u を学習できている. ベクトル $v^{(j)} = c^{(j)} - c^{(0)}$ ($j = 1, 2, \dots, S$) は, 互いに独立であるとする. このとき制御入力の空間の点 $c' = c^{(0)} + \sum_{j=1}^S \xi_j v^{(j)}$ でのモデルの出力 y は, S 次元の係数ベクトル $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_S)$ に関する

る線形近似で

$$y_i(r, x, c') \simeq y_i(r, x, c^{(0)}) + \sum_{j=1}^S \xi_j \left(y_i(r, x, c^{(j)}) - y_i(r, x, c^{(0)}) \right) \quad (3)$$

と表すことができる．つまり，線形近似が成り立つ範囲において，モデルの出力は，学習済みの $c^{(0)}, c^{(1)}, \dots, c^{(S)}$ 点の出力の線形補間となる．学習対象の力学系のパラメータの次数が 1 次の場合は， $\mu(c') \simeq \mu^{(0)} + \sum_{j=1}^S \xi_j (\mu^{(j)} - \mu^{(0)})$ と表せ， ξ_j の外挿により越分岐予測を行うことができる．

4 数値実験

多次元の制御入力による越分岐予測の例として，サークルマップ $\theta_{n+1} = \theta_n + \mu_1 - \frac{\mu_2}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n)$ の 2 次元のパラメータ空間に越分岐予測を適用して回転数を算出した．学習モデルは ELMC を用い， $N = 200, M = 1, K = S = 2$ ，活性化関数 g_j を \tanh とし，係数行列 C は， $|C_{i,j}| < \beta$ の範囲でランダムに設定した．図 1(a) は，元の力学系の回転数であり，青，緑，赤のマーカーの 3 点が学習点である． $\beta = 10^{-6}$ の場合の予測結果を，図 1(b)(制御入力の空間)，図 1(c)(パラメータ空間に座標変換して表示) に示す．マーカーは学習点に対応する制御入力を示している． $\beta = 10^{-3}$ の場合は，学習点ではより高い精度で学習できたが，パラメータ空間の構造は再現できなかった．結果として， $\beta = 10^{-6}$ の場合にパラメータ空間の構造をよく再現できた．

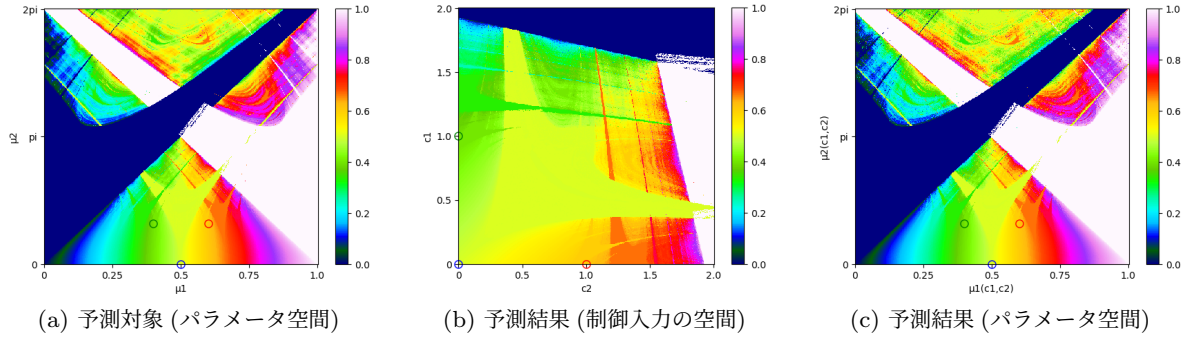


図 1. サークルマップのパラメータ空間での越分岐予測の例 ($\beta = 10^{-6}$)

5 まとめ

本研究では，越分岐予測の概念を提示し，制御入力付き学習モデルの一般式においてモデルの出力が既学習点の線形補間で表されることを導出した．数値実験においては，サークルマップの越分岐予測の例を示した．線形補間が成り立つ係数の範囲や誤差の解析は次の課題の一つである．

謝辞 本研究は，JSPS 科研費 JP22K12197, JST CREST JPMJCR17A4 の援助を受けた．

参考文献

- [1] J. Z. Kim, Z. Lu, E. Nozari, G. J. Pappas, and D. S. Bassett, “Teaching recurrent neural networks to infer global temporal structure from local examples,” Nat. Mach. Intell. 3 (2021), 316–323.
- [2] S. Tadokoro, A. Yamaguchi, T. Namiki, and I. Tsuda, “Trans-bifurcation prediction of dynamics in extreme learning machines with control inputs,” (in preparation).

化学反応ネットワークにおける構造分岐解析の一般化

黄 雍晋^{1,2}, 岡田 崇^{1,3}, 望月 敦史¹

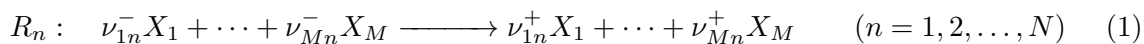
¹ 京都大学大学院理学研究科, ² 京都大学医生物学研究所, ³ 理化学研究所数理創造プログラム
e-mail: yongjin.huang.83r@st.kyoto-u.ac.jp

1 概要

細胞内の化学反応はネットワークを形成し、物質の濃度変動を引き起こす。この力学系における分岐現象は、細胞分化などの定性的変化に繋がっている。化学反応ネットワークにおける分岐現象を理解するために、ネットワークの構造から分岐の発生条件と振る舞いを決定する「構造分岐解析」という理論が構築されたが、保存量を持つシステムへの適用は未解決だった。本研究では、構造分岐解析とヤコビ行列の関係を解明し、適用条件を一般化した。

2 構造分岐解析 (Structural Bifurcation Analysis)

まず、構造分岐解析について説明する。 M 種の分子種 $\{X_m\}_{m=1}^M$ と N 個の反応



から成る化学反応ネットワーク (CRN) を考える。各物質の濃度を並べたベクトルの $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M$ を状態変数とし、反応速度関数を $\mathbf{r} \in C^2(\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ とすると、系が従う微分方程式は次のように与えられる。

$$\dot{\mathbf{x}} = \nu \mathbf{r}(\mathbf{x}; \mathbf{k}) =: \mathbf{f}(\mathbf{x}; \mathbf{k}) \quad (2)$$

ただし、 $\nu \in \mathbb{R}^{M \times N}$ であり、 $\nu_{mn} := \nu_{mn}^+ - \nu_{mn}^-$ であると定義する。各反応 R_n の速度関数はパラメータ k_n に依存するが、特定の関数形は仮定しないものとする。

$\ker \nu$ の基底 $\{\mathbf{c}_k\}_{k=1}^K$ を並べた行列を C 、 $\ker \nu^\top$ の基底 $\{\mathbf{d}_l\}_{l=1}^L$ を並べた行列を D とする。正方行列 \mathbf{A} を次のように定義する。

$$\mathbf{A} := \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} & C \\ \hline D^\top & O \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(N+L) \times (M+K)} \quad (3)$$

左上の $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}}$ が正か負かゼロかについては CRN 構造のみから決定できる。 C と D についても ν のみから決まるため、 \mathbf{A} は CRN のトポロジーのみで決められる。

定理 1 (Okada, Tsai, et al. (2018) and Okada, Mochizuki, et al. (2021)) When ν is full-ranked,

$$\det J_f \propto \det \mathbf{A}$$

in which J_f denotes the Jacobian matrix. Moreover, for a subnetwork $\Gamma = (X_\Gamma, R_\Gamma)$, when there exist permutation matrices P_r and P_c such that

$$P_r \mathbf{A} P_c = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_\Gamma & * \\ \hline O & \mathbf{A}_{\Gamma^c} \end{array} \right)$$

with \mathbf{A}_Γ being a square block, then $\det \mathbf{A}_\Gamma = 0 \neq \det \mathbf{A}_{\Gamma^c}$ implies that only chemicals in Γ (e.g., x_i such that $X_i \in X_\Gamma$) would exhibit the bifurcation behaviors.

定理 1 により、分岐の発生条件 ($\det \mathbf{A} = 0$) と分岐挙動を示す分子種が CRN 構造だけで決定できる [1, 2]。しかし、この理論を一般化するには、幾つかの未解決問題が残っている。

- 1) ν の充足階数を持たない (つまり、保存量を持つ) CRN についても同様の結論が得られるのか。
- 2) \mathbf{A} とヤコビ行列の間に、(行列式の比例関係を超えた) より厳密な関係式が存在するか。

3 主結果

本研究では、次の定理により上述の 2 つの未解決問題を解決した。

定理 2 (Main theorem) There always exists an invertible matrix T such that

$$T^{-1} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \nu & D^\top \\ \hline C & O \end{array} \right)}_{=: \Lambda} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} & D \\ \hline C^\top & O \end{array} \right)}_{\mathbf{A}} T = \left(\begin{array}{c|c|c} J_g & * & O \\ \hline O & D^\top D & \\ \hline * & & C^\top C \end{array} \right),$$

where J_g is a modified Jacobian without trivial eigenvalues associated with conserved quantities. Moreover, when there exists permutation matrices P_r and P_c such that

$$P_r \mathbf{A} P_c = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_\Gamma & * \\ \hline O & \mathbf{A}_{\Gamma^c} \end{array} \right)$$

with \mathbf{A}_Γ being a square block, then $\det \mathbf{A}_\Gamma = 0 \neq \det \mathbf{A}_{\Gamma^c}$ implies that only chemicals in Γ would exhibit the bifurcation behaviors.

つまり、保存量を持つ CRN にも構造分岐解析を適用できる。また、 \mathbf{A} とヤコビ行列を直接関係づける式を得たことで、次の系によりシステムの安定性も判断できる。

系 3 For any $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, $\text{sign}(\det \Lambda \det \mathbf{A}) \neq (-1)^{M-L} \implies \mathbf{x}$ is not a stable equilibrium point.

4 応用例

マクロファージは白血球の一種であり、炎症促進性 (M1) または抗炎症性 (M2) のいずれかに極性化している。これらの 2 つのサブタイプは 2 つの定常状態に対応しており、微小環境の変化に伴い分岐が生じることで、状態間の遷移が起これと考えられる。この現象を理解するために、一般化された構造分岐解析を用いて、マクロファージの極性化の動態に関与するシグナル伝達経路を解析した。その結果、野生型ではすべてのシグナル分子が分岐挙動を示すのに対して、SOCS3 遺伝子が欠損すると STAT3 を含む部分経路が分岐挙動を示さなくなり、さらに KLF4 が欠損すると NF κ B シグナル伝達分岐挙動を示さなくなるという理論的予測を得た。

参考文献

- [1] Okada Takashi, Je-Chiang Tsai, and Atsushi Mochizuki, Structural bifurcation analysis in chemical reaction networks, Phys. Rev. E 98.1 (2018) 012417.
- [2] Okada Takashi, Atsushi Mochizuki, Mikio Furuta, and Je-Chiang Tsai, Flux-augmented bifurcation analysis in chemical reaction network systems, Phys. Rev. E 103.6 (2021) 062212.

順列エントロピーによるてんかん発作の特徴づけ

行木 孝夫¹, 田所 智¹, 岸本 勇太², 梶川 駿介³, 松橋 眞生⁴, 池田 昭夫⁴, 津田 一郎⁵

¹ 北海道大学大学院理学研究院数学部門/MDS センター, ² 北海道大学大学院理学院数学専攻, ³ 京都大学大学院医学研究科臨床神経学, ⁴ 京都大学大学院医学研究科てんかん・運動異常生理学講座, ⁵ 札幌市立大学 AIT センター

e-mail: nami@math.sci.hokudai.ac.jp

1 概要

時系列データに対する順列エントロピー解析をてんかんの硬膜下留置電極による記録脳波に適用し、てんかん発作時と非発作時の順列エントロピーの挙動に相違が生じること、順列エントロピーの電極間の相関係数が発作時にはてんかん焦点間で上昇し、クラスター形成することを主要な結果として報告する。この結果はてんかん発作およびてんかん焦点を順列エントロピーによって特徴づけていることを示している。本講演では複数の難治性てんかんの記録脳波に対して解析した結果を報告する。

2 はじめに

非線形時系列解析における目的の1つは、時系列に潜在する力学系を発見し、時系列の従う決定論的過程を求めることである。これが可能であれば時系列を生成するダイナミクスを力学系によって数理モデル化できる。一方、非線形時系列解析における一つの欠点は、ランダム性の強い場合に時系列の特徴を抽出し難い点にある。決定論的過程と確率論的過程を同時に扱う手法として時系列の記号化による順列エントロピーを利用する。時系列を単純化するために、時系列を記号化することで記号の出現分布に対するシャノンのエントロピーとして順列エントロピーを定義することができる [1]。順列エントロピーは時系列のランダム性を反映する量であり、力学系がカオス的な場合には力学系のエントロピーが正であることに着目すれば、記号化した時系列から有限グラフを構成し、有限グラフが定める定常マルコフ連鎖のエントロピーから時系列を特徴付けることができる。この手法は、ランダムな時系列から決定論的な力学系に従う時系列までを統一的に記述することができる。

3 順列エントロピー

埋め込み次元 m , 遅延時間 d を定め、遅延座標系 $(x_{t-(m-1)d}, \dots, x_{t-d}, x_t)$ を構成する。時刻 $s = (s_0, s_1, \dots, s_{m-1}) = (t - (m-1)d, \dots, t-d, t)$ に対し置換 σ を $(s_{\sigma(0)}, s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(m-1)})$ が $x_{s_{\sigma(0)}} \leq x_{s_{\sigma(1)}} \leq \dots \leq x_{s_{\sigma(m-1)}}$ を満たすように定義する。この定義により、時刻 t における遅延座標 $(x_{t-(m-1)d}, \dots, x_{t-d}, x_t)$ に対して置換 σ を対応させることができる。置換 σ は時系列の値によらず定義できる。また、埋め込み次元 m を与えれば置換 σ の総数は $m!$ と定まる。以上から、時系列 $\{x_t\}$ を記号数 $m!$ の記号列 $\{\sigma_t\}$ と見なすことができる。時系列を置換によって表現すると、時系列に含まれる高周波成分あるいはノイズを効果的に記号として表現することができる。記号列 σ_t について時刻 t と時間幅 N を決める。時刻 t における有限グラフ G_t の構造行列 $M = (m_{ij})$ を、 $t \leq u \leq t+N$ なる時刻 u について $\sigma_u = i$ かつ $\sigma_{u+1} = j$ であれば $m_{ij} = 1$ と定義する。この G_t と最大エントロピー測度によるエントロピーから順列エントロピーを与えることができる。

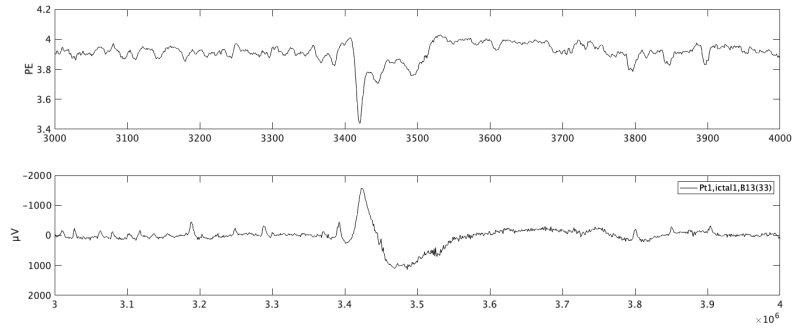


図 1. 上段：順列エントロピー，下段：てんかん焦点における発作前後の脳波波形．横軸が時間．発作直前 ($t = 3,420,000$ 付近) から発作終了 ($t = 3,520,000$ 付近) まで順列エントロピーが減少する．

4 順列エントロピーとてんかん焦点の特徴付け

演者らは [2] において難治性てんかん患者の頭蓋内留置電極による広域周波数帯域記録脳波に関して発作時にはてんかん焦点に低次元力学系が出現することを報告した．これに対応し，順列エントロピーが大きく減少する現象を確認した (図 1)．さらに，電極間の順列エントロピーの相関をとり，相関係数が閾値以上の値をとる成分を辺としてネットワークを形成した．これにより，てんかん焦点を中心とし，発作時に高周波振動等が伝播する電極のクラスターを抽出することができた (図 2) これらによっててんかん焦点を構成する領域を限定することが可能であると考えられる．今後は順列エントロピーを用いたてんかん発作の特徴付けを中心に応用を進める．

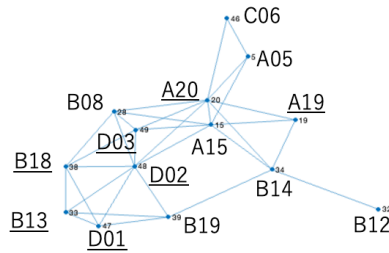


図 2. 順列エントロピーの相関によって抽出したてんかん焦点を中心とする発作時のネットワーク．電極を頂点として，相関係数が 0.7 を超える電極の組に辺を与えることで得られた．

謝辞 本研究は JSPS 科研費 23K2578503 の支援を受けた．

参考文献

- [1] R. Yan, Y. Liu, R. X. Gao, “Permutation entropy: A nonlinear statistical measure for status characterization of rotary machines”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 29(2012), 474-484
- [2] Takao NAMIKI, Ichiro TSUDA, Masao MATSUHASHI, Akio IKEDA, et. al., “Mathematical Structures for Epilepsy: High-Frequency Oscillation and Interictal Epileptic Slow (Red Slow)”, *Neuroscience Research*, 156(2020), 178-187

楕円の場合の一对一の追跡と逃避

吉原 爽太¹

¹ 名古屋大学多元数理科学研究科博士後期課程 1 年
e-mail : sota.yoshihara.e6@math.nagoya-u.ac.jp

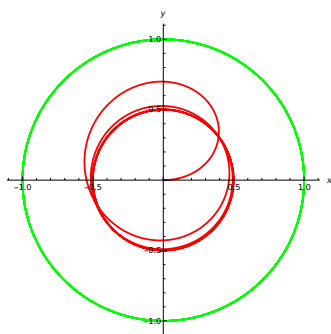
1 この講演で扱う問題の概要説明

一对一の追跡と逃避に関する多くの研究は動的ゲーム理論の観点から、追跡者と逃避者の戦略を調べている。一方、本講演では逃避者の軌跡はあらかじめ決定しており、追跡者の速度ベクトルは常に逃避者の位置に向いていて、追跡者の速さは常に逃避者の速さの n 倍であると仮定する。追跡者の軌跡 (追跡曲線) を求めることが目標である。2000 年に Barton と Eliezer がこの問題を、与えられた逃避者の軌跡 $(X(t), Y(t))$ から追跡曲線 $(x(t), y(t))$ と両者の距離を追跡者の速さで割った $\lambda(t)$ を求める連立微分方程式の問題に定式化した [1]。

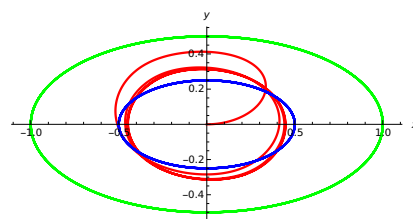
逃避者が円を周回する、すなわち $X(t) = a \cos t, Y(t) = a \sin t$ の場合は 1920 年に Hathaway がこの問題を American Mathematical Monthly で紹介して以降注目されるようになった [2]。翌年 1921 年に Hathaway が追跡に関して 3 つの大域的な性質を発見した [3]。まず $n > 1$ で追跡者と逃避者の距離は有限時間で 0 に収束して追跡に成功すること。次に $n = 1$ の場合には追跡者が逃避者と同じ円を回り近づき続けるが有限の時間で距離が 0 に収束しないこと。最後に $n < 1$ では追跡曲線が逃避者が周回する円を n 倍に縮小した円に収束することである (図 1(a))。同じく 1921 年には Morley が追跡者が原点を出発する場合に関して、追跡曲線を作図した [4]。その後 Nahin が 2007 年に追跡曲線をコンピュータで数値計算した [5]。こちらは原点以外の場合も計算されている。

2 楕円の追跡と逃避

講演者は逃避者が楕円を周回する、すなわち $X(t) = a \cos t, Y(t) = b \sin t, a \neq b$ の場合の追跡曲線を、Nahin の手法を用いて計算した [6, 7]。計算結果を説明する。まず $n > 1$ で追跡者と逃避者の距離は有限時間で 0 に収束して追跡に成功した。次に $n = 1$ の場合には追跡者が逃避者と同じ楕円を回り近づき続けるが有限の時間で距離が 0 に収束しない。これらは円の追跡と逃避と同じ結果である。最後に $n < 1$ の場合には追跡曲線は閉軌道に収束する。しかしこの閉軌道は円のように逃避者が周回する楕円を n 倍に縮小した楕円ではなく、さらに一致する二次曲線が存在しなかった (図 1b)。



(a) 逃避者が半径 1 の円を周回する場合。



(b) 逃避者が長半径 1, 短半径 0.5 の横向きの楕円を周回する場合。青は逃避者の周回する楕円を n 倍に縮小した楕円。

図 1: 追跡曲線に関する円と楕円の違い。赤 : 追跡者, 緑 : 逃避者, 速さの比 n は 0.5. ([7, Figure 1])

講演者は $n < 1$ での閉軌道が円と楕円で異なる原因は、速さと角速度が変化することにあるという仮定を立てた。理由は追跡者は逃避者との速さの比を一定に保つため、逃避者の速さが変動すると追跡者の速さも変化するからだ。そこで楕円 $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1$ に対して、 $X(t) = a \cos t, Y(t) = b \sin t$ ではない速さが一定のパラメータと、角速度が一定のパラメータを導出した。逃避者がこれらのパラメータで動く場合の追跡曲線の形は図 1 から全く変化しなかった [7, Section 4.]. この結果を踏まえて Barton-Eliezer が導いた連立微分方程式の性質を調べることで次の定理を示した。

定理 1 逃避者の平面曲線 $(X_1(t), Y_1(t))$ に対して追跡曲線 $(x_1(t), y_1(t))$ が求められたと仮定する。逃避者の平面曲線のパラメータを t から u に取り替えたとき、 $(X_1(u), Y_1(u))$ に対する追跡曲線は $(x_1(u), y_1(u))$ である。 ([7, Theorem 1.])

この定理から追跡曲線の形が知りたい場合は逃避者の速さが 1 と仮定してよいことがわかる。この仮定の下で $\rho(t)$ を追跡者から逃避者の距離、 $\theta(t)$ と $\varphi(t)$ をそれぞれ追跡者と逃避者の速度ベクトルの偏角とすると、 $\rho(t), \zeta(t) := \varphi(t) - \theta(t)$ に対して以下の連立微分方程式が成り立つ。

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \cos \zeta - n, \\ \rho \dot{\zeta} = -\sin \zeta + \rho \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (1)$$

逃避者が $(a, 0)$ から反時計回りに周回すると仮定する。円の場合 $\varphi(t) = \frac{t}{a} + \frac{\pi}{2}$ ゆえ $\dot{\varphi} = \frac{1}{a}$ であるから (1) は自励系である。楕円の場合には $\varphi(t)$ を t の式で表すことが難しいが $\dot{\varphi}$ は計算可能で、

$$\dot{\varphi} = \frac{(a^2 \sin^2 \varphi(t) + b^2 \cos^2 \varphi(t))^{3/2}}{a^2 b^2} \quad (2)$$

となる。 ([7, (17)]) つまり (1) は非自励系になる。本講演ではこの力学系 (1) の性質を説明する。

謝辞 指導教員である名古屋大学多元数理科学研究科大平徹教授と大平ゼミのメンバーに感謝申し上げます。本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2125 の財政支援を受けたものです。この場を借りて「東海国立大学機構メイク・ニュー・スタンダード次世代研究事業」にも御礼申し上げます。

参考文献

- [1] Barton, J. C. and Eliezer, C. J., On pursuit curves, Journal of the Australian Mathematical Society Series B, Vol.41 (2000), 358–371
- [2] Hathaway, A. S., 2801, American Mathematical Monthly, Vol. 27, No. 1 (1920), 31
- [3] Hathaway, A. S., Archibald, R. C. and Manning, H. P., 2801, The American Mathematical Monthly, Vol. 28, No. 2(1921), 91–97
- [4] Morley, F. V., A Curve of Pursuit, The American Mathematical Monthly, Vol. 28, No. 2(1921), 54–61
- [5] Nahin, P. J., Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion, Princeton : Princeton University Press, 2007
- [6] Yoshihara, S. and Ohira, T., Pursuit and Evasion: from singles to groups, in: Proc. of XXXII IUPAP Conference on Computational Physics, Vol. 2207 012014, 1–6, 2022
- [7] Yoshihara, S., Elliptical Pursuit and Evasion, arXiv preprint, arXiv: 2401.06338, 2023