

# 乗法的ノイズを持つ確率波動方程式の数値解と、地震時断層挙動との類似性

平野 史朗<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 弘前大学 理工学部 地球環境防災学科

e-mail : hirano@hirosaki-u.ac.jp

## 1 はじめに

地震時の断層滑りは、マグニチュード 5 程度の地震で約 1 秒間、マグニチュード 7 程度の地震で約 10 秒間持続し、その間に破壊がおよそ秒速 3km で拡大した後、滑り共々停止する。この滑りが始まってから終わるまでがどのような挙動であったかが、震源物理学の関心事のひとつである。地殻を連続体とし、その内部の位置  $\mathbf{X}$ 、時刻  $t$  における変位ベクトルを  $\mathbf{u}$  とする。また、地殻内部の断層面を  $\Gamma$ 、その単位法線ベクトルを  $\boldsymbol{\nu}$  とし、断層面上の位置  $\mathbf{x}$  における滑り分布  $D$  を

$$D(\mathbf{x}, t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)]_{\mathbf{X}=\mathbf{x}-\varepsilon\boldsymbol{\nu}}^{\mathbf{X}=\mathbf{x}+\varepsilon\boldsymbol{\nu}},$$

および滑り速度分布  $V$  を

$$V(\mathbf{x}, t) := \partial_t D(\mathbf{x}, t)$$

とする。ただし (悪くない第ゼロ近似として)  $\Gamma$  は平面、 $D$  は  $\Gamma$  上で一様な方向を持つとして、その大きさのみを考えることとし、以下では  $D, V$  をスカラー関数として扱う。

十分に遠方から観測すれば、 $\Gamma$  は非常に小さく、向きを持った点のように見える。このことから、 $\Gamma$  上の不均質を考慮せず “震源時間関数” と呼ばれる時系列

$$S(t) := \int_{\Gamma} V(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (1)$$

を考えることが多い。多くの地震について、遠方の地表付近で観測された地震波形を境界データとする逆問題を解くことで、震源時間関数  $S$  についての性質が調べられている。Hirano[1] は Bessel 過程と呼ばれる確率変数の振る舞いを記述する確率微分方程式

$$dX_t = \frac{\delta - 1}{2} \frac{dt}{X_t} + dB_t \quad (2)$$

を考え、上式が生成するサンプルパス 2 つの畳み込み積分が、モーメントの確率密度や Fourier スペクトルの包絡線など、震源時間関数について統計的に知られる多数の経験則を同時に満足することを示した。

ある程度大きな地震については、上記のような点震源近似では不十分で、 $D, V$  の空間分布を調べる必要がある。そのために、先行モデルを足がかりに、本研究では空間的な広がりを考慮した確率偏微分方程式を考える。

## 2 モデル方程式

経験上、動的破壊が揺らぎつつも波のように拡がることから、これをモデル化するには双曲型の確率偏微分方程式が適切と考えられる。その中で最も単純な確率波動方程式とは、 $\dot{W}$  を時空間白色ノイズとして

$$\partial_t^2 u = \Delta u + \dot{W}$$

と書かれるものである。しかしこの方程式は、解  $u$  がゼロであるような時空間領域においてもノイズを生じ、それによって至るところから常に波が出続ける [2] ため、破壊と滑りの未達領域からは波が出ないという地震学的経験則に反する。そこで、経験則を満たすことを期待し、式 (2) から出発して、解がゼロである位置と時刻においてはノイズ項もゼロであるような方程式を考える。まずは式 (2) の解の 2 乗を滑り速度と仮定する、すなわち  $V = X_t^2$  とし、伊藤の公式を適用すると、平方 Bessel 過程と呼ばれる確率変数が満たす式

$$dV = \delta dt + 2\sqrt{V} dB_t \quad (3)$$

を得る。この式は乗法的 (=係数が確率変数に依存する) ノイズを持つため、先述の懸念が払拭されている。更に式 (3) を双曲型偏微分方程式へと拡張し、ここでは

$$\begin{aligned} \partial_t D &= V, \\ \partial_t V &= \Delta D + \delta + 2\sqrt{V} \dot{W} \end{aligned} \quad (4)$$

という、乗法的ノイズを伴う確率波動方程式を提案する。

### 3 数値解と観測との類似性

空間 1 次元の場合について、初期時刻に原点にのみ  $V > 0$  の値を与え、有限差分法で式 (4) の数値解を求めたところ、波の伝播速度よりもわずかに遅い破壊伝播速度や、破壊進展の自発的停止など、複数の観測的経験則を満たすことが判明した。ただし震源時間関数 (1) の Fourier スペクトルの包絡線は、周波数の  $-1$  乗に比例することも分かった。地震学的な経験則によれば、この包絡線は  $-2$  乗に比例することが多い。この不一致は空間次元が 1 であったことによるものである可能性がある。

### 4 数学的問題点

方程式 (4) が本質的に波動方程式であることから、先に求めた数値解は超関数解の数値的近似であると考えられる。しかしノイズ項の非線形性から、超関数解の意味は定かでなく、そもそも非適切な方程式である可能性もある。波動ではないが、確率熱方程式では、ノイズが自己相関を持つ場合を考えることで、この非適切性を回避できる場合がある [3]。本モデルにおけるノイズが自己相関を持つとすれば、それがどのような意味を持つか考察する。

**謝辞** 本研究は JSPS 科研費 22K03782 の助成による。

### 参考文献

- [1] Hirano, S., Source time functions of earthquakes based on a stochastic differential equation, *Sci. Rep.*, (2022) **12**:3936, <https://doi.org/10.1038/s41598-022-07873-2>
- [2] Martin, A., Hyperbolic stochastic partial differential equations: Small balls and simulation; propagation of singularities. PhD thesis, Aachen: Shaker Verlag. Neuherberg: Institut f. Biomathematik u. Biometrie, GSF - Forschungszentrum f. Umwelt u. Gesundheit (2002).
- [3] 舟木直久・乙部厳己・謝賓, 確率偏微分方程式, 岩波数学叢書, 岩波書店 (2019)

## 地震断層の簡単なモデルにおける周期倍分岐

波多野恭弘、馬芳

大阪大学宇宙地球科学専攻

e-mail : hatano.sci@osaka-u.ac.jp

### 1 背景

近年、地震波をほとんど出さない、あるいは全く出さない新たな種類の地震が世界各地で発見されている。これらは主に沈み込み帯において通常の地震が発生する領域のすぐ近くで発生するが、断層のすべりとその伝播は通常の地震よりもだいぶ遅いので「スロー地震」と呼ばれている。すべりの継続時間も通常の地震よりだいぶ長く、数分から数ヶ月、あるいは数年続くこともある。スロー地震はその規模（あるいは継続時間）に応じて分類されており、継続時間が短いものから順に、低周波地震、微動、超低周波地震、スロースリップイベント (Slow Slip Event, SSE) と名前がついている [1]。

スロースリップイベントは決まった場所で周期的（数ヶ月から数年ごと）に発生することが多いが、その際しばしば弱い地震波を出すスロー地震（低周波地震と微動）が同時に発生する。その再来周期は場所によってまちまちであるが、同じ場所においても周期が時間と共に変化し、しかもその周期変化が離散的なことがある。例えばカリフォルニア州のパークフィールド断層においては、2003年から2005年にかけての微動発生が3日周期と6日周期を交互に繰り返したことが観測されている [2]。興味深いことに、2005年に近くで通常の地震が発生した後にはほぼ3日の単周期の発生間隔に変化した。時間の経過と共に6日周期が復活し、再び3日周期と6日周期を交互に繰り返す挙動が観測された。類似の挙動は他の地域でも報告され始めている。

このように離散的な周期変動を引き起こす物理的機構は全く分かっていない。2005年のパークフィールド地震に伴う周期変化は、断層近傍の応力変化と断層内部の間隙水圧の変化によって引き起こされたのではないかと議論されているが、定性的な推測の域を出ていない。

### 2 流体の影響とそのモデル化

プレート境界などにおける地震波速度構造の調査によれば、スロー地震の発生する領域には流体が多く存在しているため、断層に含まれる流体がスロー地震の発生を促進していることが強く示唆されている。断層に存在する流体の圧力が変化すると、固体間の接触にかかる実効的法線応力も変化し、従って摩擦応力も変化する。このように、流体圧力は摩擦応力を通じて断層のすべりダイナミクスに直接的な影響を与える [3]。

他方、流体圧力は様々な理由からすべり速度に依存して変化しうる。例えば、すべり速度が大きくなると断層近傍の空隙率が増加し排水が促進されると考えられるが、その場合、流体圧はすべり速度の減少関数になる。このようにして、すべり速度は流体圧に影響を与え、流体圧は摩擦力を通じてすべり速度に影響を与える。つまり双方向のフィードバックがある。

本研究では、空間に広がったすべり面（断層）において流体圧が高い特定の領域に注目し、弾性論については準静的近似をすることで、空間自由度を落とした簡単なすべりモデル（常微分方程式系）を提案する。

### 3 結果

ここで提案されるモデルは、ある条件下で定常状態（すべり速度一定の状態）が Hopf 分岐を起こして不安定化する。分岐後は単周期のリミットサイクルが実現するが、分岐パラメタをさらに変化させると周期倍分岐を起こしてカオス的な振動を示すことを発見した。

ただし、観測されているような周期そのものの変化はこのモデルでは直接説明できていない。講演ではモデルの不満足な点を説明し、空間自由度を考えることでこの点を改善する試みについても簡単に述べる。

### 参考文献

- [1] スロー地震に関する最近の総合的なレビューとして以下を挙げる。S. Takemura, Hamada, Y., Okuda, H. et al. A review of shallow slow earthquakes along the Nankai Trough. *Earth Planets Space* 75 (2023) 164.
- [2] D. R. Shelly, Periodic, Chaotic, and Doubled Earthquake Recurrence Intervals on the Deep San Andreas Fault, *Science* 328 (2010) 1385–1388.
- [3] T. Yamashita and A. Tsusumi, *Involvement of Fluids in Earthquake Ruptures*, Springer, 2017.

## 2 次元アーチにおけるき裂進展シミュレーション

佐藤 惣一郎<sup>1</sup>, 高石 武史<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 武蔵野大学大学院工学研究科数理工学専攻修士課程, <sup>2</sup> 武蔵野大学工学部数理工学科  
e-mail : g2386002@stu.musashino-u.ac.jp

### 1 アーチ形状とき裂進展

アーチ形状は、上方からの等分布荷重と自重の下向きの荷重が圧縮応力となり両端の支点到に伝えられるため本来丈夫な形で、橋や門などの構造物に用いられる。ところが、全体の荷重には強い一方で、点での荷重にはあまり強くないことが知られている。本研究では、接触によるアーチ形状の変形とそこから発生するき裂形状を、線形弾性エネルギーとフェーズフィールドによるき裂面作成のエネルギーから導出した勾配流型き裂進展モデルで調べた。このモデルはき裂の有無や損傷の度合いをフェーズフィールドと呼ばれる秩序変数で表すことによって、数値計算を容易にし、複雑なき裂進展現象を再現可能としている。ここでは、非貫入条件を付与したき裂進展モデルを用い、2次元断面の数値シミュレーションで調べた。その結果、足元の固定されたアーチ断面の上面に平面状の物体が接触しながら下がってくる場合において、アーチの厚さが変わると破断に至るまでの接触領域が変化し、その結果破断の形状が変化することが分かった。

### 2 非貫入条件を含んだき裂進展モデル

2次元の等方弾性体を考える。き裂を含む弾性体からなる有界領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  において、その変位を  $u \in \mathbb{R}^2$ 、き裂面を表すフェーズフィールドを  $z \in [0, 1]$  とする。非貫入条件 (unilateral contact condition) を含んだ勾配流型き裂進展方程式 [1] は、次のようになる。

$$\begin{cases} \operatorname{div}((1-z)^2\sigma_+[u] + \sigma_-[u]) = f(x, t) & x \in \Omega, t > 0 \\ \alpha \frac{\partial z}{\partial t} = \left( \epsilon \operatorname{div}(\gamma(x)\nabla z) - \frac{\gamma(x)}{\epsilon} z + 2(1-z)w_+[u] \right)_+ & x \in \Omega, t > 0 \end{cases}$$

$$\sigma_+[u] := \tilde{\lambda}(\operatorname{div}u)_+ I + 2\mu e_D[u], \quad \sigma_-[u] := -\tilde{\lambda}(\operatorname{div}u)_- I, \quad w_+[u] := \frac{1}{2}\tilde{\lambda}(\operatorname{div}u)_+^2 + \mu|e_D[u]|^2$$

ここで、ひずみテンソル  $e[u]$ 、応力テンソル  $\sigma[u]$  として、 $(a)_+ = \max(a, 0)$ ,  $\tilde{\lambda} := \lambda + \frac{2\mu}{d}$ ,  $e_D[u] := e[u] - \frac{1}{d}(\operatorname{div}u)I$ ,  $(\operatorname{div}u)_- = (-\operatorname{div}u)_+$  である。また、 $f$  は物体に働く外力、 $\gamma(x)$  は臨界エネルギー解放率、 $\epsilon$  は正則化パラメータである。

### 3 数値実験結果

2次元アーチ型の等方弾性体で、上部を接触境界条件で変形する。また、不等式拘束条件、き裂面に非貫入条件を設定し、有限要素法にて数値シミュレーションを行った。

ここでは自重は考えず ( $f = 0$ )、外周と内周の半径がそれぞれ  $r_1 (= 1)$ ,  $r_2$  のアーチ形状に対して上方から平面が速度  $v = 10^{-2}$  で下がってくるものとして接触境界条件を不等式で与えた (図1)。材料パラメータとしてはコンクリート材料 ( $E = 35\text{GPa}$ ,  $\sigma = 1/6$ ,  $\gamma = 1.6 \times 10^{-7}\text{GPam}$ ) を設定し、 $\epsilon = 10^{-2}$ ,  $\alpha = 10^{-2}$ ,  $\Delta t = 10^{-3}$  とした。また、アダプティブメッシュを用いてき裂部分の近傍で自

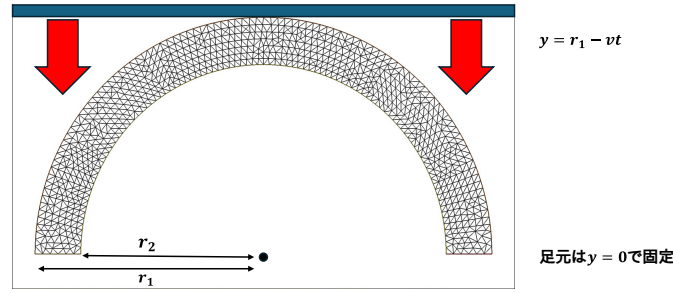
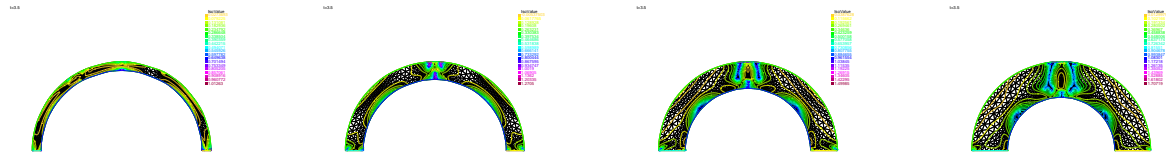


図 1. 数値シミュレーションに用いたアーチ形状と上方から下降する平面

動的にメッシュが細くなるようにして計算した。



(a)  $r_2 = 0.1$  (b)  $r_2 = 0.2$  (c)  $r_2 = 0.3$  (d)  $r_2 = 0.4$

図 2. 内周半径  $r_2 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  の場合におけるフェーズフィールドの分布 ( $t = 3.5$ )

内周半径を  $r_2 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  とした場合におけるフェーズフィールドの分布を図 2 に示した。薄いアーチ形状 (図 2(a)) では内周中央からき裂が生じ進展するが、厚いアーチ形状 (図 2(b),(c)) では外周の接触面から 2 本のき裂が対称に生じていることがわかる。上方から下がってくる平面に対して薄いアーチ形状では変形しやすく、接触面が増えることから外周部での応力上昇は抑えられ、内周部では引張応力が生じ、き裂の発生と進展を促していることが考えられる。一方、厚いアーチ形状では変形が小さく、接触面の両端に応力が集中してき裂が生じていることが考えられる。

#### 4 まとめ

本研究では、非貫入条件を付加したき裂進展モデルを用い、2 次元アーチ形状の数値シミュレーションを行った。その結果、アーチの厚さによって破断形状が異なることが分かり、原因は破断に至るまでの材料の変形と接触領域の変化と関係していることが推察された。また、き裂が生じたあとにき裂面を圧縮する応力が発生していることから、これらのシミュレーションにおいて非貫入条件のモデル化は有効であることがわかった。

今後は、コンクリート材料の破壊実験と数値シミュレーション結果を比較し、このモデルの有効性を検証したい。また、3 次元アーチ構造及び 3 次元球殻構造においてき裂がどのように生じて進展していくかについても、き裂進展シミュレーションと破壊実験を比較しながら調べていきたい。

#### 参考文献

- [1] Kimura, Takaishi, Alfat, Nakano, Tanaka: Irreversible phase field models for crack growth in industrial applications: thermal stress, viscoelasticity, hydrogen embrittlement, SN Applied Sciences 3(9) 2021.



## 袖の“かたち”が制御する熱の伝播

清水 雄貴<sup>1</sup>, 矢崎 成俊<sup>2</sup><sup>1</sup> 富山大学学術研究部理理学系, <sup>2</sup> 明治大学理工学部

e-mail: shimizu@sci.u-toyama.ac.jp

### 1 概要

火災は、家屋火災、山火事などさまざまに知られているが、その中に着衣着火という形態がある。消防庁によると、年間約 100 人が着衣着火により死亡しており、死傷者の 8 割以上が 65 歳以上の高齢者で占められる。よって、一度着衣着火の被害を被ると、皮膚の再生能力が低下した高齢者は細菌感染を引き起こすという 2 次被害を受けることになる。また、出火原因の約 8 割は衣服の袖にコンロの火が引火することによる。着火してしまったら速やかに消火するのが一番ではあるが、迅速な行動が困難な場合も多い。したがって、そもそも着衣着火後になるべく延焼しづらい衣服の形状を開発することは、防災の重要な視点の一つである。

このような防災に資する研究の第一歩として、袖に模した曲面上を進行する燃焼前線の様子を調べることにする。一般に、ガス燃焼の基礎方程式として、温度と物質についての移流項を持つ非線形反応拡散方程式系が知られている [1]。ここで非線形項はアレニウス則由来の項である。これらの方程式系を、円筒状の曲面上における固体燃焼における燐焼現象 (炎がほとんどでない燃焼) に適用し、特異摂動法により、平面上の Kuramoto-Sivashinsky 方程式の係数を曲面の曲がり方の関数に一般化した方程式も知られている [2]。本研究では、さらに単純化して、温度について単独の移流項付き非線形反応拡散方程式を用いて、燃焼前線が進行する解を見つけることを第一の目標とする。結果、袖に模した曲面上での燃焼現象に資するいくつかの非線形項に対して、燃焼進行波の厳密解を構成することができたので報告したい。

### 2 袖の幾何学

$M$  を円環とする：

$$M = [-L, L] \times \mathbb{S}^1$$

ただし、 $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  であり、 $L$  は円環の Modulus と呼ばれる。

各  $\kappa \in \mathbb{R}$  に対して、以下のように  $\lambda_\kappa : M \rightarrow (0, \infty)$  と Riemann 計量  $g_\kappa$  を定義する。

$$\lambda_\kappa(x, y) = \begin{cases} \operatorname{sech}(\sqrt{|\kappa|}x), & \text{if } \kappa > 0, \\ 1, & \text{if } \kappa = 0, \\ \sec(\sqrt{|\kappa|}x), & \text{if } \kappa < 0, \end{cases}$$

$$g_\kappa = \lambda_\kappa^2(dx^2 + dy^2)$$

このとき、曲面  $(M, g_\kappa)$  は一定の Gauss 曲率  $\kappa$  を持つ円環であり、これを  $\kappa$ -袖曲面と呼ぶ。

袖曲面上では、計量  $g_\kappa$  に対する Laplace-Beltrami 作用素は次のように書き表される。

$$\Delta_g = \lambda_\kappa^{-2} \Delta = \begin{cases} \cosh^2(\sqrt{|\kappa|}x) \Delta, & \text{if } \kappa > 0, \\ \Delta, & \text{if } \kappa = 0, \\ \cos^2(\sqrt{|\kappa|}x) \Delta, & \text{if } \kappa < 0, \end{cases}$$

ただし,  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ .

特に, 二点  $(0, y), (x, y) \in M$  間の距離  $d$  は

$$d = \begin{cases} 2|\kappa|^{-1/2} \tan^{-1}(\tanh(\sqrt{|\kappa}|x/2)), & \text{if } \kappa > 0, \\ x, & \text{if } \kappa = 0, \\ 2|\kappa|^{-1/2} \tanh^{-1}(\tanh(\sqrt{|\kappa}|x/2)), & \text{if } \kappa < 0 \end{cases}$$

で与えられる.

### 3 区分線形着火項付き移流拡散系

曲面上の移流拡散方程式は以下のように定式化される. 関数  $u$  に対する拡散効果は計量  $g$  に対する Laplace-Beltrami 作用素  $\Delta_g$  と拡散係数  $D_{\text{th}}$  を用いて,  $D_{\text{th}}\Delta_g u$  で定まる. また, 移流効果については, 移流ベクトル場  $v$  の関数  $u$  への作用は  $\nabla_v u = v(u)$  で与えられる. 特に, 局所座標  $(x^i)$  による表示  $v = \sum_i v^i \partial_i$  を用いて,

$$\nabla_v u = v(u) = v^1 \frac{\partial u}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial u}{\partial x^2}$$

と表される. そのため, 拡散項は計量の取り方に依存して定まるが, 関数に作用する移流項は計量の取り方によらずに定まる.

$\kappa$ -軸曲面上の移流ベクトル場  $v$  は関数  $V_0 : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  を用いて,

$$v = V_0(x) \frac{\partial}{\partial x}$$

と仮定する. さらに, 反応項として, アレニウス型ポテンシャルの近似として, 区分線形関数  $f(u) = A\chi_{[0, u_c]}(u)u + U_0$  を考えると, 以下の  $\kappa$ -軸曲面上の区分線形着火項付き移流拡散系が得られる:

$$u_t + V_0 u_x = D_{\text{th}} \lambda_\kappa^{-2} (u_{xx} + u_{yy}) + A\chi_{[0, u_c]} u + U_0 \quad (1)$$

これに対し, 回転対称な初期値を持ち,  $u > u_c$  となる場合の厳密解は以下で与えられる.

**定理 1.**  $(M, g)$  を  $\kappa$ -軸曲面とする ( $\kappa \neq 0$ ).  $\xi \in C^2([-L, L])$  と  $c \in \mathbb{R}$  をとる.  $u : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $u = u(\xi(x) - ct)$  とする.  $u$  は回転対称な初期値を持つ, 線形着火項付き移流拡散系 (1) の解であると仮定する. このとき, 定数  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\{c_n\}_{n=1}^3 \subset \mathbb{R}$  が存在し, 以下を満たす:

$$\begin{aligned} \xi'' + \gamma \xi'^2 &= -\frac{\lambda_\kappa^2}{D_{\text{th}}} (c - V_0 \xi'), \\ u(x, t) &= \begin{cases} c_1(\xi(x) - ct)e^{At} + c_2 + c_3 e^{At}, & \gamma = 0, \\ c_1 \exp \gamma (\xi(x) - (c - A)t) + c_2 + c_3 e^{At}, & \gamma \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

### 参考文献

- [1] 桑名一徳, 矢崎成俊, 火炎伝播のモデル方程式, 伝熱 (日本伝熱学会), 58 (2019), 42–52.
- [2] S. Kobayashi and S. Yazaki, Derivation of a curvature-dependent Kuramoto-Sivashinsky equation, Proceedings of ALGORITHM 2024 (to appear).