

ハイブリッド力学系における新しい分岐：ヒトの歩行・走行モデルの一般化

森田 英俊¹, 青井 伸也², 土屋 和雄³, 國府 寛司³

¹ 四天王寺大学, ² 大阪大学, ³ 京都大学

e-mail: moritah@shitennoji.ac.jp

1 背景

ヒトはゆっくり進むときは歩き, 速く進むときは走り, そしてその中間の速さでは歩く場合と走る場合の両方があることが, 実験により示されている. これは, 力学系の観点からは, 歩行のアトラクターと走行のアトラクターとの共存を伴う分岐と捉えられるだろう. 著者らはこの分岐の構造を探るべく, 簡単なバネ・質点モデルを解析して新しい分岐を発見してきており, 以前の年会の OS でも発表を行った. 本研究は, そのモデルに依存しない性質を求めるべく, 一般化してベクトル場とその繋がり方のみを与えたハイブリッド力学系を解析する.

2 設定

本研究で考察する力学系は抽象的であるため, まずはこれまでの具体的なモデルを概括し, 次いでそれとの対応づけをしながら説明する. 下方に減衰バネ (脚に対応) の付いた質点 (胴体に対応) のニュートン力学による上下運動を考える. これは, バネが接地している状態と離地している状態とが, 垂直抗力が 0 になるときに質点の位置がバネの自然長になるときに切り替わる, ハイブリッド力学系である. 常に接地している運動 (歩行に相当) と接地・離地を繰り返す運動 (走行に対応) に加え, 離地状態から着地ができずに転倒に相当する振る舞いを示すことがある. 特に, 歩行と走行が共存し, さらにその間に転倒に相当する領域が介在している状況が出現することが, 新しい分岐である.

この具体例を含む, 今回考察する系の一般化した相空間の設定を述べる. 全体の相空間は I, II の 2 種類 2 次元のベクトル場からなり (I は接地状態, II は離地状態に対応), それらを二つの切り替え線 $L_{I \rightarrow II}$, $L_{II \rightarrow I}$ (垂直抗力が 0 になる条件, 質点の位置がバネの自然長になる条件にそれぞれ対応) が繋いでいる. 軌道が $L_{I \rightarrow II}$ と交わったときに I から II へ, $L_{II \rightarrow I}$ と交わったときに II から I へと切り替わる (図 1). 起こりうる長時間挙動には 3 種類あり, I 内のみを動く (歩行に対応), II 内のみを動く (転倒に対応), I と II を交互に切り替わる (走行に対応) である. これら 2 つのベクトル場の繋がり方が変わる (パラメータを変えることに相当) ことで, この 3 種類の挙動の 1 種類のみが

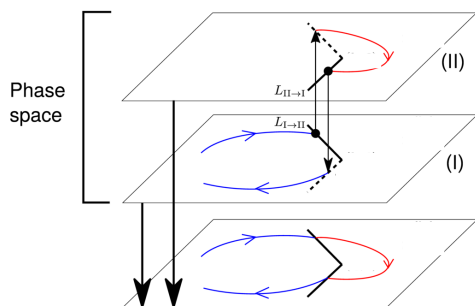


図 1. 相空間の模式図

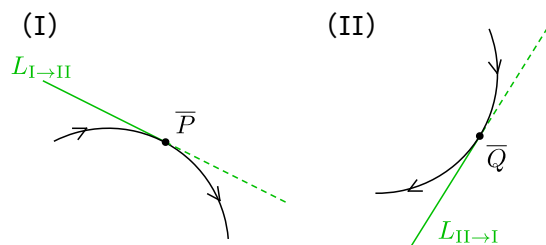


図 2. 切り替えに関して臨界的な軌道

受動歩行の脚質量に応じたフラクタルな吸引領域の変化

松尾 朝日¹, 岡本 耕太², 安部 祐一¹, 明石 望洋², 大林 一平³, 國府 寛司², 青井 伸也¹

¹ 大阪大学, ² 京都大学, ³ 岡山大学

e-mail : u223007c@ecs.osaka-u.ac.jp

1 はじめに

受動歩行は、制御なしに斜面を歩いて下る力学システムであり、ヒトの歩行の力学原理を理解し、エネルギー効率の良い二足ロボットを設計する上で重要な知見を与えてくれる [1]。この力学システムでは、アトラクタが例えばカオスアトラクタでなくても、吸引領域がフラクタルとなることが知られている。シンプルな数理モデルを用いた解析から、ポアンカレ写像の逆像が引き伸ばしと折り畳みの効果を持ち、この逆像がポアンカレ断面上の領域に無限回作用することで、フラクタルな吸引領域となることが、先行研究 [2] で明らかにされている。これまでは足の質量を無限小として解析されていたが、本研究では現実に則して足の質量を加味して、吸引領域に与える影響を調べた。

2 モデル

本研究では、図 1 に示すコンパス型のモデルを用いる。このモデルは、質量 M の質点からなる胴体と、足先に質量 m の質点を持つ長さ l の 2 本の脚を持ち、摩擦のない関節でつながられている。脚と胴体の質量比を $\beta = m/M$ とする。 θ_1 は地面に対する支持脚の角度、 θ_2 は支持脚に対する遊脚の角度である。制御なしに角度 γ の傾斜を歩き、 g を重力加速度とする。

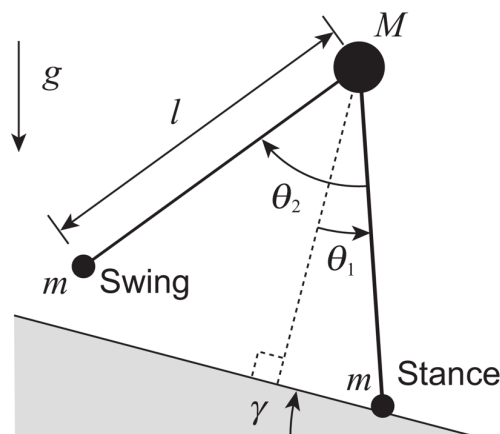


図 1. モデル

接地直前の状態をポアンカレ断面として、接地から次の接地までの写像をポアンカレ写像とする。ポアンカレ写像のアトラクタが安定な歩行を説明し、本研究ではこのアトラクタの吸引領域に着目する。ポアンカレ断面上の点を初期点として、少なくとも n ステップ歩くことのできる初期点の集合を D_n ($n = 1, 2, \dots$) とすると、 $n \rightarrow \infty$ により、 D_n は吸引領域に近似的に一致する。

3 脚質量に応じた吸引領域の変化

図 2A に、 $\beta = 0$ における $\gamma = 0.001$ と $\gamma = 0.012$ での吸引領域を示す。吸引領域 (青) は U 字型をしており、中央の大きなスリット (赤) の左側に多数のスリットが形成されていることがわかる。 γ が増加することでスリットの数が増え、 $\gamma = 0.012$ において吸引領域がフラクタルになっている。このとき、中央の大きなスリットを囲むスリットが U 字型の内縁と外縁に見られる。

図 2B に、 $\beta = 0.15$ における $\gamma = 0.001$ と $\gamma = 0.0025$ での吸引領域を示す。こちらも吸引領域 (青) は U 字型をしているが、 $\beta = 0$ とは異なり、中央の大きなスリット (赤) の右側に多数のスリットが形成されていることがわかる。ただしこちらも γ が増加することでスリットの数が増え、

$\gamma = 0.0025$ において吸引領域がフラクタルになっている．こちらも中央の大きなスリットを囲むスリットが U 字型の内縁と外縁に見られるが，外縁の構造が $\beta = 0$ の時と大きく異なっている様子が確認できる．

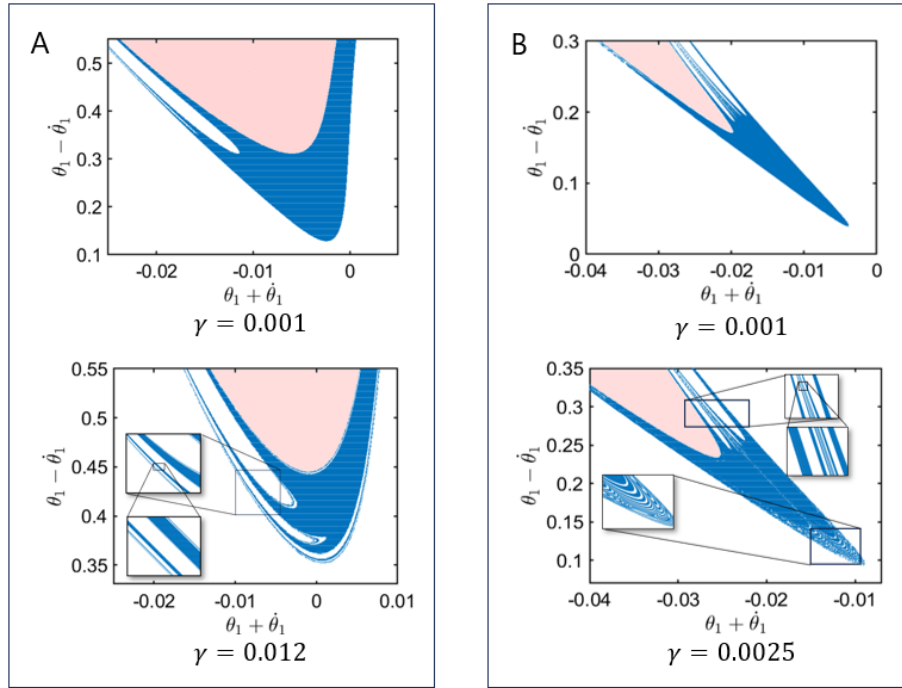


図 2. 脚質量に応じた吸引領域. A. $\beta = 0$, B. $\beta = 0.15$

4 吸引領域の形成メカニズム

なぜ脚質量に応じて吸引領域が変化するのかを，先行研究 [2] を参考に調査した． $\beta = 0$ では，ポアンカレ写像の逆像によって， D_n が引き伸ばされて折り畳まれた領域と， D_n が左右反転してから引き伸ばされた領域の 2 つの領域が結合することで， D_{n+1} が形成されることがわかっていた． $\beta = 0.15$ では， D_n が引き伸ばされた領域と， D_n が反転してから引き伸ばされて折り畳まれた領域の 2 つの領域が結合することで D_{n+1} が形成されており，この違いにより吸引領域の形状が変化することがわかった．

謝辞

本研究の一部は，JSPS 科研費 JP24H00297, JP20H00229 と JST 創発的研究支援事業 JP-MJFR2021 の補助を受けた．

参考文献

- [1] S. Collins, A. Ruina, R. Tedrake, M. Wisse, Efficient bipedal robots based on passive-dynamic walkers, *Science*, 307:1082–1085, 2005.
- [2] K. Okamoto, S. Aoi, I. Obayashi, H. Kokubu, K. Senda, K. Tsuchiya, Fractal mechanism of basin of attraction in passive dynamic walking, *Bioinspir. Biomim.*, 15:055002, 2020.

力学系のリザーバー計算：数値例とその理論

原 誠人¹, 國府 寛司¹¹ 京都大学理学研究科数学教室

e-mail : hara.masato.28s@st.kyoto-u.ac.jp

1 概要

リザーバー計算はそれ自身が力学系として定式化されるような機械学習手法であり、力学系から生成される時系列データの学習に長けている。本講演では hyperbolic toral automorphism (HTA: トーラス上の双曲型自己同型写像) に対するリザーバー計算の実例を示し、それを参照しながら、力学系のリザーバー計算が成功する場合の数学的機構について議論したい。

2 多様体上の力学系のリザーバー計算

M を \mathbb{R}^m に埋め込まれた d 次元閉多様体, $f: M \rightarrow M$ をその上の力学系 (ただし M はアトラクタとは限らない) とする。また, $Y := \mathbb{R}^N$ とする。本講演では, f が生成する時系列 $\{x_n\}_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{R}^m$ をリザーバーで「学習」する (以下, 単に「力学系 f をリザーバーで学習する」という) タスクを考える。その具体的なアルゴリズムは通常, 次のようにして与えられる:

学習時間 $T \in \mathbb{N}$ とリザーバー写像 $F_\Omega: \mathbb{R}^m \times Y \rightarrow Y$ ($\Omega \in M_{N,N}(\mathbb{R}) \times M_{N,m}(\mathbb{R})$ はパラメータ。本稿では表立っては現れない), リザーバーの初期状態 $r_0 \in Y$ が与えられたとき,

Step 1 (学習段階) $r_{n+1} = F_\Omega(x_n, r_n)$ でリザーバーの状態列 $\{r_n\}_{n=1}^T \subseteq Y$ を生成する

Step 2 (最適化 = 「学習」) 誤差 $\sum_{n \leq T-1} \|Wr_n - x_n\|_2^2$ を最小化する $W \in M_{m,N}(\mathbb{R})$ を線型回帰で計算する

Step 3 (予測段階) $\tilde{F}_{\Omega,W}(r) := F_\Omega(Wr, r)$ によって写像 $\tilde{F}_{\Omega,W}: Y \rightarrow Y$ を定義する (学習済みリザーバー)。その状態列 $\{r_n\}_{n \geq T+1}$ を生成し, 出力 $\{y_n := Wr_n\}_{n \geq T+1}$ を得る

このタスクの目標は $\{x_n\}_{n \geq T}$ と $\{y_n\}_{n \geq T}$ がダイナミクスとして類似することである。たとえば [1] においてはロジスティック写像 $f(x) = \alpha x(1-x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ はパラメータ) に対して上のアルゴリズムを用いて数値実験を行い, タスクが達成されることを確認した。 f がロジスティック写像の場合には, M はたとえば f のアトラクタを含むような \mathbb{R} の閉区間だと思えることができる。

リザーバー計算の理論を構築したり検証したりする上では, より様々な力学系に対して数値実験が行えることが望ましい。しかし実は, 上のアルゴリズムは $M = S^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ のときの 2 倍写像 $f(x) = 2x$ や $M = \mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1$ のときの HTA (後述) のように, M を \mathbb{R}^m に埋め込んだ際にその外側における f の定義が自明でない場合にはうまく機能しないことがわかっている。そこで, 上のアルゴリズムを次のように修正する:

M の \mathbb{R}^m への埋め込み $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ を一つ固定する。埋め込みの前後の区別を明確にするために, $\tilde{M} := \phi(M)$ と書き, また, $x_n \in M$ に対し $\xi_n := \phi(x_n) \in \tilde{M}$ と書く。 $\tilde{M} \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^m$ を \tilde{M} のある近傍とし, $\pi: U \rightarrow \tilde{M}$ を一つ固定する。このとき,

Step 1 (学習段階) $r_{n+1} = F_\Omega(\xi_n, r_n)$ でリザーバーの状態列 $\{r_n\}_{n=1}^T \subseteq Y$ を生成する

Step 2 (最適化 = 「学習」) 誤差 $\sum_{n \leq T-1} \|Wr_n - \xi_n\|_2^2$ を最小化する $W \in M_{m,N}(\mathbb{R})$ を線型回帰で計算する

Step 3 (予測段階) $\tilde{F}_{\Omega, \pi W}(r) := F|_{\tilde{M} \times Y}(\pi(Wr), r)$ によって写像 $\tilde{F}_{\Omega, \pi W}: Y \rightarrow Y$ を定義する。その状態列 $\{r_n\}_{n \geq T+1}$ を生成し、出力 $\{\eta_n := \pi(Wr_n)\}_{n \geq T+1}$ を得る

これは通常のアルゴリズムで x_n としていた個所を ξ_n で、 $\tilde{F}_{\Omega, W}$ を $\tilde{F}_{\Omega, \pi W}$ で、 Wr_n を $\pi(Wr_n)$ で置き換えたものであるが、要するに「Step3 の出力を毎時刻 \tilde{M} 上に押し付ける（射影する）」という発想に基づいている。

3 数値例：HTA の場合

$A \in M_{d,d}(\mathbb{Z})$ を、 $\det(A) = 1$ かつ、どの固有値も絶対値が 1 でないような整数行列とする。このとき hyperbolic toral automorphism (HTA: トーラス上の双曲型自己同型写像) f_A とは、 A が定める線型写像 $L_A: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ が \mathbb{T}^d 上に自然に誘導するような力学系のことをいう。HTA は微分同相であり、構造安定であり、Lebesgue 測度でエルゴード的であるなど、極めて性質のよい力学系として知られている。(HTA に関する詳細は、たとえば [2] §8.5 などを参照のこと。)

本講演では $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の場合について、 f_A を修正アルゴリズムを用いて学習した例を示す。この場合 $M = \mathbb{T}^2$ であり、埋め込み $\phi: \mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ と射影 $\pi: (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}) \rightarrow \phi(S^1 \times S^1)$ はそれぞれ $\phi(x_1; x_2) := (\cos x_1, \sin x_1; \cos x_2, \sin x_2)$ および $\pi(\eta_1; \eta_2) := (\frac{\eta_1}{\|\eta_1\|}; \frac{\eta_2}{\|\eta_2\|})$ を用いた。

その結果、適切に設計されたリザーバーにおいては

- 出力時系列 $\{\eta_n\}$ について $\eta_{n+1} \approx \phi \circ f_A \circ \phi^{-1}(\eta_n)$ である、つまり学習は成功する
- 学習済みリザーバー $\tilde{F}_{\Omega, \pi W}$ は、トーラスに類似した「アトラクタ」をもつ
- リザーバーの第 1, 第 2 Lyapunov 指数は f_A の Lyapunov 指数とほぼ一致する

など、リザーバーが f_A のダイナミクスをよく模倣していることを示す数値的諸結果が得られた。

4 リザーバー計算の数学的機構

リザーバー計算の学習が成功する、つまり入力時系列と出力時系列がダイナミクスとして類似するということは、「学習対象 f と学習済みリザーバー $\tilde{F}_{\Omega, W}$ が（半）共役になる」ということに基づいていると予想される。実は現在までに、 f が「微分同相かつエルゴード的かつ擬軌道追跡的かつ分離的 (expansive)」という強い仮定の下であればこの予想の半共役版が（いくらかの条件付きで）正しいことの証明がほぼ完成している（論文準備中）。HTA はこれらの仮定をすべて満たす例であり、前節で述べた数値実験結果は上の理論的洞察を支持するものであると考えられる。

謝辞 本研究の一部は JSPS 科研費 (課題番号: 23H01083) および JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 (体系的番号: JPMJFS2123) の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] Hara, M. and Kokubu, H., Learning Dynamics by Reservoir Computing, J Dyn Diff Equat, Vol. 36 (2024), 515–540. <https://doi.org/10.1007/s10884-022-10159-w>
- [2] Robinson, C., Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos, CRC Press LLC, 1999.

細胞周期ネットワークのトポロジーにより実現される、複数チェックポイントの独立制御

山内悠平¹, 杉山博紀², 後藤祐平³, 青木一洋³, 望月敦史¹

¹ 京大・医生物学研究所, ² 東大・工学系研究科, ³ 京大・生命科学研究科

e-mail: yamauchi.yuhei.8c@kyoto-u.ac.jp

1 概要

分裂酵母の細胞周期は厳密に制御されており, G1-S, G2-M それぞれのチェックポイントにおいて異なる 2 種のサイクリン-CDK 複合体 (それぞれ G1-S 複合体と G2-M 複合体) の濃度上昇が必要である. これら 2 つの複合体濃度が細胞周期の異なる時期に特異的に上昇することで, それぞれのチェックポイントを通過できる. 一方で 2 種の複合体は共通の CDK を含んでおり, これら 2 種の複合体がどのようにして時期特異的に制御されているかは不明である. CRN において, 各パラメータが変化することで, 定常状態における各物質の濃度がどのように変化するか, ネットワーク構造のみから決定する理論 (構造感度解析) を, 私達のグループは確立してきた [1]. ネットワークの部分構造が, あるトポロジカルな条件を満たすとき (緩衝構造), 反応の活性変化の影響はその部分構造内に限局する [2, 3]. 今回我々はこれらの手法を用いて, 細胞周期システムにおいて, 2 つのチェックポイントが独立に制御される仕組みを見出した.

2 構造感度解析 [1]

M 個の物質 (X_1, \dots, X_M) と, N 個の反応 $(1, \dots, N)$ から成る CRN を考える. n 番目の反応が, $y_{1,n}X_1 + \dots + y_{M,n}X_M \rightarrow y'_{1,n}X_1 + \dots + y'_{M,n}X_M$ であるとする ($n = 1, \dots, N$). 各物質の濃度 x_1, \dots, x_M を並べたベクトルを $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)^T$, 各反応の反応速度関数 r_1, \dots, r_N を並べたベクトルを $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)^T$ とすると, CRN のダイナミクスは $\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{\nu}\mathbf{r}$ という微分方程式に従う. ただし, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ であり, $\nu_{m,n} := y'_{m,n} - y_{m,n}$ である. 反応 j の反応速度関数 r_j は, 反応 j の基質濃度のみ依存すると仮定するが, 特定の関数形を仮定することなく議論を進める. システムが定常状態 \mathbf{x} を持つと仮定して, その時の反応速度 \mathbf{r} は, $\boldsymbol{\nu}\mathbf{r} = \mathbf{0}$ つまり, $\mathbf{r} \in \ker \boldsymbol{\nu}$ を満たすので, $\ker \boldsymbol{\nu}$ の基底を $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_K$ とすると, $\mathbf{r} = \mu_1\mathbf{c}_1 + \dots + \mu_K\mathbf{c}_K$ と書ける ($\mu_1, \dots, \mu_K \in \mathbb{R}$). $k_n \rightarrow k_n + \delta k_n$ の摂動により, 各反応速度が $r_j \rightarrow r_j + \delta r_j$ となるとして, $\delta r_j = \delta k_n \sum_{p=1}^K \frac{\partial \mu_p}{\partial k_n} c_{p,j}$ が成り立

つ. 一方で, r_j の全微分は Kronecker delta $\delta_{n,j}$ を用いて $\delta r_j = \delta k_n \left\{ \delta_{n,j} \frac{\partial r_j}{\partial k_n} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial r_j}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial k_n} \right\}$ となる. これらの式をもとに以下の式が導かれる.

$$\mathbf{S} := \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial k_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial k_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_M}{\partial k_1} & \dots & \frac{\partial x_M}{\partial k_N} \\ -\frac{\partial \mu_1}{\partial k_1} & \dots & -\frac{\partial \mu_1}{\partial k_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mu_K}{\partial k_1} & \dots & \frac{\partial \mu_K}{\partial k_N} \end{bmatrix} \propto -\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A} := \left[\begin{array}{c|ccc} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} & -\mathbf{c}_1 & \dots & -\mathbf{c}_K \end{array} \right] \quad (1)$$

ただし, ここでは $M + K = N$ (つまり, 系が保存量を持たない) と仮定しており, \mathbf{A} と \mathbf{S} は正方

行列である. S は各パラメータ摂動に対する各物質濃度と反応速度の応答を表す. A の左部分 $\frac{\partial r}{\partial x}$ が 0 か否かについては, CRN 構造のみから決定できることに注意する. これから摂動応答 $S = -A^{-1}$ の 0 要素の分布についても, 反応関数を具体的な形によらず決定できる.

3 緩衝構造 [2, 3]

(1) から, 以下の限局則が導出できる. これは摂動の応答範囲が有限範囲に限られ, その範囲がネットワーク構造から決まることを示すものである.

限局則 部分ネットワーク $\Gamma = (m, \tau)$ (m, τ はそれぞれ物質, 反応の部分集合) が, 以下の 2 条件を満たす時, Γ は緩衝構造であるという.

1. τ 以外の反応で, m 内部の物質を基質とする反応は存在しない.
2. $-|m| + |\tau| - N(\tau) = 0$.

この時, Γ 内部の反応パラメータに摂動は, m 以外の物質の平衡値の濃度は変化しない.

ただし, $N(\tau)$ は Γ 内部のサイクル数である. 例えば, 図 1 のネットワークにおいては, $\Gamma = \{2, P\}$ が緩衝構造であり, 反応 2 への摂動は P のみに限局する. なお上記の結果は保存量を持つ CRN にも拡張できる [3].

4 細胞周期システムの解析

細胞周期システムに対し構造感度解析を行ったところ, G1-S 複合体と G2-M 複合体の定常濃度は, 互いに disjoint な反応パラメータによって制御されており, 2 つの複合体は独立に制御されることが予測された. これは, 2 つの複合体が異なる緩衝構造に含まれることに起因する (図 2). 実験検証の結果, 理論が予測した独立制御は実際の生命システムにおいて少なくとも部分的に成立していた. さらに, 予測がネットワーク構造のみに依存するという本解析の利点を活かし, 実験結果から逆に, 欠けているネットワークの情報を推定することもできた.

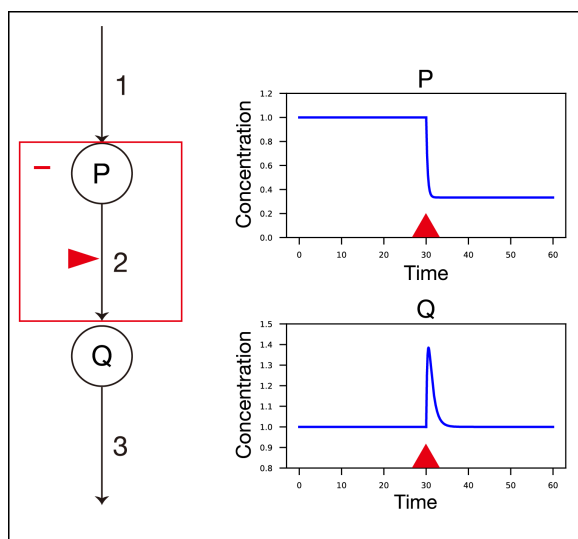


図 1.

参考文献

- [1] Atsushi Mochizuki and Bernold Fiedler, Journal of Theoretical Biology 367 (2015).
- [2] Takashi Okada and Atsushi Mochizuki, Phys. Rev. Lett. 117 (2016).
- [3] Takashi Okada and Atsushi Mochizuki, Phys. Rev. E 96, (2017)

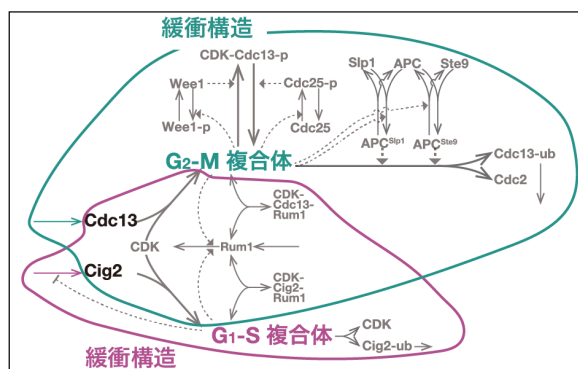


図 2.