

磁壁に閉じ込められたスキルミオン格子

甘利 悠貴¹, 新田 宗土^{1,2}

¹ 慶應義塾大学自然科学研究教育センター, ² 広島大学 WPI-SKCM²

e-mail: amari.yuki.ph@gmail.com

磁性体中におけるトポロジカルソリトンである磁気スキルミオンが, 2009 年に実験的に観測されたのを契機にして, 実験と理論の両面から精力的に研究されている [1]. 磁気スキルミオンは, 学術的な興味のみならず, 次世代磁気メモリなどへの工業的応用も期待されている.

方向の異なる磁気モーメントを持つ二つの強磁性領域を隔てる磁気構造を磁壁と呼ぶ. 磁壁もさまざまな工業的応用が提案され, 盛んに研究されてきた. 磁壁に吸収され, 閉じ込められた磁気スキルミオンは, 磁壁スキルミオンと呼ばれる [2–5]. 磁壁スキルミオンは, 磁気スキルミオンの工業的応用に向けた大きな問題であった運動の制御性に関して優れた性質を持つ. そのため, 通常磁気スキルミオンに代わる次世代磁気メモリの情報担体の有力な候補と考えられている. 実験的にも, 磁壁上にスキルミオンが周期的にトラップされた, 磁壁スキルミオン格子が観測されている [6].

本研究では, 反転対称性が破れた磁性体であるカイラル磁性体における磁壁スキルミオンの性質を理論的に調べた. その結果, 面内容易軸異方性と呼ばれる相互作用が存在する場合, 模型のあるパラメータ領域において, 特定の境界条件のもとでは磁気スキルミオンが磁壁に沿って周期的に閉じ込められた配位, すなわち磁壁スキルミオン結晶が基底状態として現れることがわかった. 本講演では, 得られた磁壁スキルミオン結晶の性質や相図について報告する.

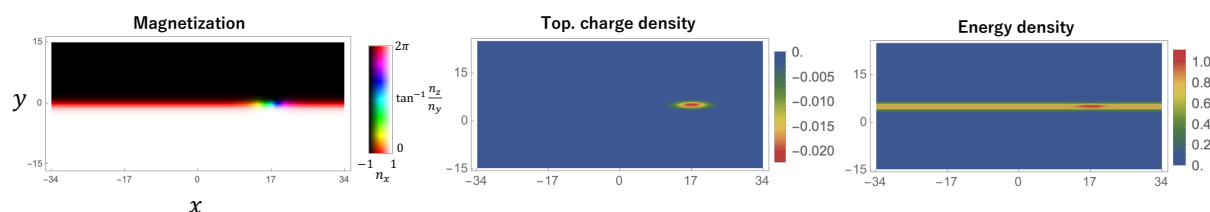


図 1. 磁壁スキルミオン結晶. 左から, 磁荷ベクトル, トポロジカルチャージ密度, エネルギー密度を表している.

参考文献

- [1] N. Nagaosa and Y. Tokura, “Topological properties and dynamics of magnetic skyrmions,” Nat. Nanotech. **8**, 899–911 (2013).
- [2] R. Cheng, M. Li, A. Sapkota, et al., “Magnetic domain wall skyrmions,” Phys. Rev. B **99**, 184412 (2019).
- [3] C. Ross and M. Nitta, “Domain-wall skyrmions in chiral magnets,” Phys. Rev. B **107**, 024422 (2023).
- [4] Y. Amari and M. Nitta, “Chiral magnets from string theory,” JHEP **11**, 212 (2023).
- [5] Y. Amari, C. Ross and M. Nitta, “Domain-wall skyrmion chain and domain-wall bimerons in chiral magnets,” Phys. Rev. B **109**, 104426 (2024).
- [6] T. Nagase, Y. G. So, H. Yasui, et al., “Observation of domain wall bimerons in chiral magnets,” Nat. Commun., **12**, 3490 (2021).

一般化したファジーエレメンタリセルオートマトンによるパターン形成

清水 清隆¹, 時弘 哲治¹

¹ 武蔵野大学工学研究科数理工学専攻

e-mail: g2486009@stu.musashino-u.ac.jp

本研究の目的は、ファジーエレメンタリセルオートマトン (FECA) の従来の多項式を用いた構成方法を一般化し、その一般化 FECA の性質を解析することである。

数理モデルなどに用いられるセルオートマトン (CA) は有限個の値、例えば 2 値 $\{0,1\}$ のみに値を持つ離散力学系である。例えば、代表的な一次元 CA であるエレメンタリーセルオートマトン (ECA) の時間発展は、写像 $F_k: \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$ によって定められている。ただし、添え字 k ($0 \leq k \leq 255$) は、時間発展のルールを示す番号である [1]。典型的な交通流モデルであるルール 184ECA では、この写像を

$$\begin{array}{cccccccc} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

と表現できる。ただし、写像 $F_{184}: \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$ を

$$u = F_{184}(x, y, z) \Leftrightarrow \frac{xyz}{u}$$

と表現している。

CA が $[0,1]$ の連続値に値を持つように拡張する操作をファジー化という。上の式を例に説明すると、ファジー化とは、 x, y, z および u がとる値を $\{0,1\}$ から連続区間 $[0,1]$ に拡張し、 $x, y, z \in \{0,1\}$ では、 u は元の CA と同じ値をとる力学系に対応させる操作である。このように連続化した CA をファジーセルオートマトン (FCA) という。ECA の場合、この操作は、関数 $F_{184}(x, y, z)$ を x, y, z について高々 3 次の多項式として表現できることが知られており、その振る舞いに関して研究がなされてきた [2, 3]。

ところで、ECA の一つの特徴は、簡単な時間発展規則にも関わらず複雑なパターン形成が見られることであり、これが数理モデルに用いられる一つの理由である (図 1)。しかしながら、時間発展の関数 $F_k(x, y, z)$ を高々 3 次の多項式としてファジー化を行った場合、時間発展で自明、単調な結果となる (図 2)。そのため、パターン形成など複雑なふるまいをする系の数理モデルに用いることができない。

そこで、本講演では、 $F_k(x, y, z)$ を多項式以外の形に拡張し、ECA から複雑なふるまいをするファジーエレメンタリセルオートマトン (FECA) を構成する一般的な手法を提案し、その結果これらの FECA が実際に様々な興味深いパターンを生じることを示す。また、(1) パターンによる FECA の分類、(2) ルールの混合、(3) ファジー化のパラメータの変化に対するパターンの転移、などについても説明する。

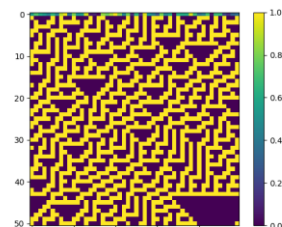


図 1. 30ECA

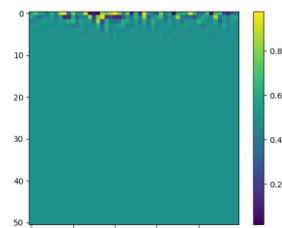


図 2. 30FECA

具体的な構成方法は次の命題に示すとおりである.

命題 (FECA の一般的構成法) : 集合 $\Omega := \{u(x) \mid [0,1] \rightarrow [0,1], u(0) = 0, u(1) = 1\}$, すなわち, 写像 $[0,1] \rightarrow [0,1]$ で, 条件 : $u \in \Omega \rightarrow u(0) = 0, u(1) = 1$ を満たすものの集合を考える. このとき, F_k をルール k ECA に対する 3 次多項式とし,

$$g, u, v, w \in \Omega, \quad \widetilde{F}_k(x, y, z) := g(F_k(u(x), v(y), w(z)))$$

とすると, \widetilde{F}_k はルール k FECA の時間発展規則を与える.

いくつかの例を示す. 図 3 は, ルール 184FECA のパターン形成のパラメータ依存性を示す.

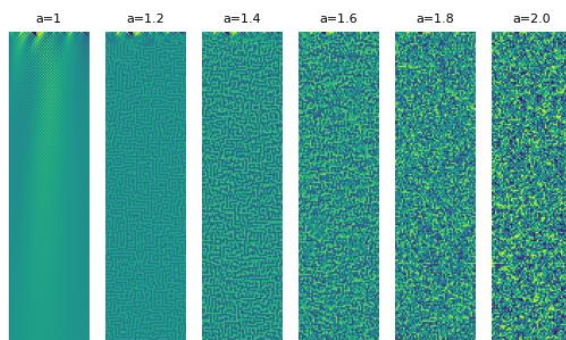


図 3. 184FECA パターン形成のパラメータ依存性

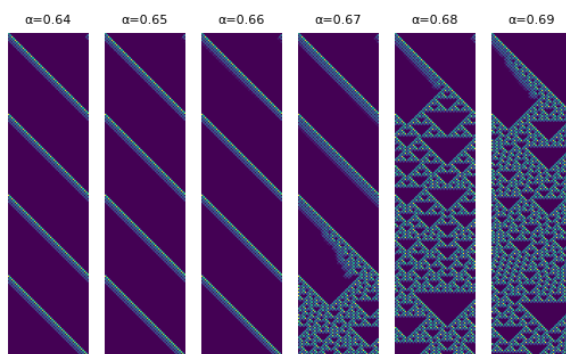


図 5. 184FECA と 90FECA の混合

参考文献 :

- [1] Wolfram, S.: Theory and Applications of Cellular Automata. World Scientific, Singapore (1986).
- [2] Cattaneo, G., Flocchini, P., Mauri, G., Quaranta-Vogliotti, C., Santoro, N.: Cellular automata in fuzzy backgrounds. Physica D 105, 105-120 (1997)
- [3] 山本 航, 高橋 大輔 : ファジーセルオートマトンの漸近挙動の解析について. 日本応用数学会論文誌. Vol. 32 No. 2 (2022) , p61-74

図 4 は, セルを 3 つに限定して 3 次元上にプロットを行ったもので, カオス系に類似の特徴的な構造が見受けられる.

図 5 は, 二種の異なる ECA の線形結合をとったもので, 混合割合の変化による 1 種の相転移現象と考えられる特徴的なふるまいを示すことができる.

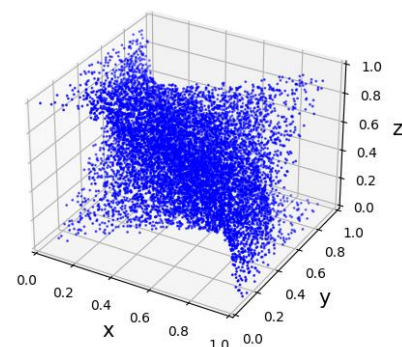


図 4. 43FECA の 3 次元プロット

本講演ではこれらの例を中心に一般化 FECA の特性を考察したい.

2 のべき乗を位数とする有限体上の可積分系

荒岡 葵¹, 時弘 哲治¹¹ 武蔵野大学 工学研究科 数理工学専攻

e-mail: g24860002@stu.musashino-u.ac.jp

1 目的・背景

ソリトン解や無限個の保存料を持つ可積分セルオートマトン (CA) には, 箱玉系のように非線形可積分系方程式の超離散化による構成がある [1]. 一方, CA は有限集合上の離散力学系であるため, 自然な発想として有限体を用いた構成が考えられ, ソリトンのなふるまいをする F_3 上の CA が構成されている [2]. 本研究では可積分系を特徴づける Yang-Baxter 方程式 [3] に基づき, 有限体上の CA を構成する. 特に位数が 2 のべき乗の有限体について考え, その特徴を考察する.

2 Yang-Baxter 方程式

X を適当な集合として,

$$\begin{array}{ccc} R: & X \times X & \rightarrow X \times X \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & (u, v) & \mapsto (f(u, v), g(u, v)) \end{array} \quad (1)$$

となる写像において, R_{ij} ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) を $X \times X \times X$ の i 番目の集合と j 番目の集合に, 例えば, 次のように作用するものと定義する.

$$\begin{array}{ccc} R_{12}: & X \times X \times X & \rightarrow X \times X \times X \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & (u, v, w) & \mapsto (f(u, v), g(u, v), w) \end{array} \quad (2)$$

このとき, 次の式を Yang-Baxter 方程式という.

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \quad (3)$$

ただし, ここではスペクトラルパラメータ依存性は省略している. 今回の研究ではスペクトラルパラメータに依存しない, Yang-Baxter 関係式 (組ひも関係式) を考察する. また, このような集合論的な枠組みでは, Yang-Baxter 写像とも呼ばれる [4].

3 関数関係式

セルオートマトン系の構成を考え, 有限体 \mathbb{F}_p 上の Yang-Baxter 方程式を考察する. したがって, (1), (2) 式での $u, v, w \in \mathbb{F}_p$ である. R 行列を与える写像 $(u, v) \mapsto (u', v')$ が次の形で与えられると仮定する.

$$u' = v + f(u + v), \quad v' = u - f(u + v)$$

このとき, 以下の命題が成り立つ.

命題 1. 写像 f が Yang-Baxter 方程式を満たすための必要十分条件は, 任意の $x, y \in \mathbb{F}_p$ に対して次式が成り立つことである.

$$f(x - f(y)) = f(x) + f(x - f(y + f(x))) \quad (4a)$$

$$f(y + f(x)) = f(y) + f(y + f(x - f(y))) \quad (4b)$$

以下, f は全単射である場合を考え, 位数 p は 2 のべき乗であるものとする.

命題 2. 位数 p が 4 の場合, *Yang-Baxter* 関係式を満たす関数 f の総数は 16 であり, 8 では 736 である.

$a \in \mathbb{F}_p$ に対して, (4a), (4b) を満たす f のうち $f(0) = a$ を満たす集合を Ω_a とする. この時次の命題が成り立つ.

命題 3. $\forall a \in \mathbb{F}_p, \Omega_a \simeq \Omega_0$.

命題 4. $f \in \Omega_0$ ならば $\forall x \in \mathbb{F}_p, f(f(x)) = x$.

命題 5. f がただ一組の互換 $\sigma[i, j]$ であるならば, f は (4a), (4b) を満たす.

命題 6. $\forall a, \forall b \in \mathbb{F}_p, f := \sigma[a, b] \circ \sigma[0, b] \circ (f_{+b}) \circ \sigma[a, b]$ ならば $f \in \Omega_0$. ただし, $f_{+b}(x) := x + b$ とする.

4 可積分 CA の構成

R 行列を用いた CA の構成を考える. $\mathbb{F}_p^{\times N} := \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \times \cdots \times \mathbb{F}_p$ に値をとる状態が離散的に時間発展するとする. 時刻 t の状態を $\mathbf{x}_t := (x_{t,1}, x_{t,2}, \dots, x_{t,N}) \in \mathbb{F}_p^{\times N}$ とし, \mathbf{x}_{t+1} の値は, 図 1 のように R 行列を用いて定まるとする.

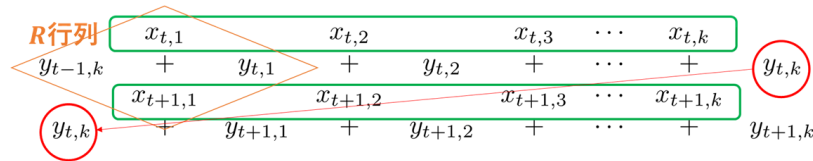


図 1. R 行列による状態 $(x_{t,1}, x_{t,2}, \dots, x_{t,N}) \in \mathbb{F}_p^{\times N}$ の時間発展規則.

この可積分 CA について, 位数が 4, 8 の場合のこの CA の時間発展を調べ, 以下の予想と定理を得た.

予想 7. この CA では, 任意の初期値, 初期境界値, 状態数 k に対して周期 4 である.

定理 8. 位数が 4 の場合には予想は正しい.

本講演ではこうした命題や定理について, 証明とその後の展開について述べる予定である.

参考文献

- [1] 時弘哲治, 「箱玉系の数理」, 朝倉書店, 2010.
- [2] Fumitaka Yura, Solitons with nested structure over finite fields, J. Phys. A: Math. Theor. 47 (2014) 325201.
- [3] 神保 道夫, 「量子群とヤン・バクスター方程式」, シュプリンガー・フェアラーク・東京, 1990.
- [4] A. P. Veselov, Yang-Baxter maps and integrable dynamics, Phys. Lett. A314 (2003) pp.214-221.

群集を表現する数理モデルとしての 5 近傍セルオートマトンについて

岡本 和也¹, 高橋 大輔², Zanolungo Francesco³, 辻本 諭⁴

¹ 早稲田大学大学院 基幹理工学研究科, ² 早稲田大学 理工学術院 基幹理工学部,

³ 大阪国際工科専門職大学 工科学部, ⁴ 京都大学大学院 情報学研究科

e-mail : poulkun67@gmail.com

1 概要

近年, 群集事故発生件数の増加に伴い, 群集に関する研究は盛んになっている [1]. 群集事故は高密度下で発生しやすいが, 高密度下の実験を行うことは, 研究倫理の観点から困難である [2]. そのため, 群集を表現する数理モデルのシミュレーションや解析の重要性が増している. 数理モデルの 1 つにセルオートマトンモデルと呼ばれるものがある. このモデルは, 全ての変数が離散的であるため, コンピュータで誤差なくシミュレーションできるという利点がある.

本発表では, 5 近傍セルオートマトンと呼ばれるセルオートマトンモデルの 1 つについて紹介する. また, そのうちの PCA5-40 および PCA5-59 について解析を行なったところ, これらのモデルが群集を表現するために必要な性質を持つことが明らかになったので, このことについて報告する.

2 5 近傍セルオートマトンモデル

数理モデルの中でも, セルオートマトンモデルは非常に単純なモデルであるにも関わらず, 複雑な現象を再現できることが知られている. Wolfram は, 3 近傍セルオートマトン (ECA : Elementary Cellular Automaton) を複数のクラスに分類し, その中でも, ECA184 が交通流における自由相から渋滞相へと遷移するという重要な性質を示すことを明らかにした [3]. 近年, 5 近傍セルオートマトンが注目されており, 特に, 粒子数が保存されるような粒子セルオートマトン (PCA : Particle Cellular Automaton) と呼ばれる系の研究が進められている [4]. 5 近傍粒子セルオートマトンは,

$$u_j^{n+1} = u_j^n + q(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) - q(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n) \quad (1)$$

と表せることが知られている. ここで, u_j^n は時刻 n における位置 j における状態変数 $u_j^n \in \{0, 1\}$ を表し, $q(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$ は流入, $q(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n)$ は流出を表している. また, $u_j^n = 0$ はセル内に粒子が存在せず, $u_j^n = 1$ はセル内に粒子が存在することを表している. Okumura らは, 全ての 5 近傍粒子セルオートマトンにルール番号を与えており, 本研究では, PCA5-40 および PCA5-59 に着目した. 例として, PCA5-40 は次の真理値表を満たす流量で構成される.

1111	1110	1101	1100	1011	1010	1001	1000
0	1	1	1	0	0	1	1
0111	0110	0101	0100	0011	0010	0001	0000
0	0	1	1	0	0	0	0

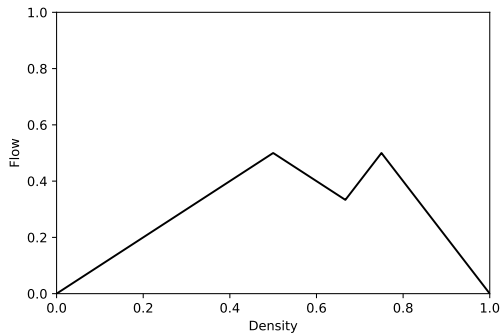
表 1: PCA5-40 の流量 $q(w, x, y, z)$ が満たす真理値表. 表に含まれる 4 つ並んだ数は入力 w, x, y, z を表しており, その下には入力 w, x, y, z に対応する出力 $q(w, x, y, z)$ が示されている.

3 基本図

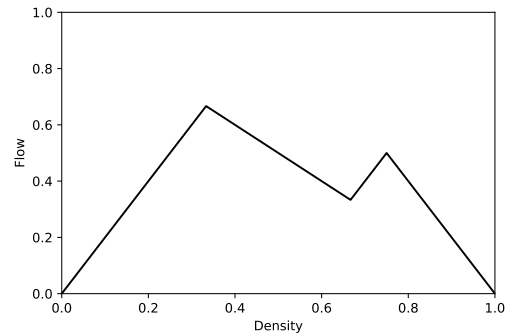
交通流や群集の流れを特徴づける代表的なものとして、基本図と呼ばれるグラフが知られている。基本図は横軸に密度、縦軸に流量を取るグラフであり、セル数を K とすると密度 ρ および流量 \bar{q} はそれぞれ次のように与えられる。

$$\rho = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K u_j^n, \quad \bar{q} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K q(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n) \quad (2)$$

図 1 は、PCA5-40 および PCA5-59 を周期境界条件の下で数値計算を行い、式 (2) を用いて得られた基本図である。図 1 より、どちらの基本図も 2 つのピークがあることがわかる。この性質は、群集の流れにおいても観測されており、2 つのピークの高さは異なることが知られている。図 1(a) は ECA184 の基本図に対して高密度下でもう 1 つのピークが与えられたものになっている。実際に、PCA5-59 における動く粒子のパターンは $\{10, 1110\}$ であり、ECA184 では $\{10\}$ のみである。このことから、パターン $\{1110\}$ によって 2 つ目のピークが得られることが明らかになった。また、PCA5-40 では動く粒子のパターンは $\{10, 100, 1110\}$ であり、これは PCA5-59 における粒子の最高速度を 2 へと拡張したのになっている。したがって、PCA5-40 は ECA184 の拡張となっており、群集を表現するモデルとして必要な性質を持つことが明らかになった。本講演では、数値計算だけでなく超離散方程式を用いた解析についても取り扱う。



(a) PCA5-59 から得られた基本図



(b) PCA5-40 から得られた基本図

図 1: 5 近傍セルオートマトンのシミュレーションから得られた基本図

謝辞 本研究は、京都大学とトヨタ自動車の共同研究プロジェクト「モビリティ基盤数理の研究」の支援を受けている。

参考文献

- [1] Schadschneider, A., Chraïbi, M., Seyfried, A., Tordeux, A., and Zhang, J. (2019)., Crowd Dynamics, **1**, 63–102.
- [2] Helbing, D., Johansson, A., and Al-Abideen, H. Z. (2007)., Phys. Rev. E, **75**(4), 046109.
- [3] Wolfram, S. (1986)., Advances in applied mathematics, **7**(2), 123–169.
- [4] Okumura, T., Matsukidaira, J., and Takahashi, D. (2013)., J. Phys. A, **46**(29), 295101.