トラスのコンプライアンスに対する分布的ロバスト CVaR 制約付き期待値最小化問題の定式化

藤山 拓巳 [1], 寒野 善博 [1]
[1] 東京大学
e-mail : takumi007@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

1 はじめに

確信度付き信頼性最適設計 [1] では, 構造物が制約を満たす確率（信頼度）

$$r := \mathbb{P}\{g(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s}) \leq 0\}$$

を用いて, 信頼性の確信度 c に対して制約

$$c := \mathbb{P}\{r \geq r^{\mathrm{target}}\} \geq c^{\mathrm{target}} \tag{1}$$

を与えることで, 確率分布の不確実性を考慮した最適設計が行われる．式 (1) は, VaR 制約に対する分布の不確実性を考慮していることに対応している．ここで, トラスの最適設計では, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ は各部材の断面積を表す設計変数, m は部材の数, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^d$ は不確実なパラメータを表す確率変数（本稿では外力）, d は節点変位の自由度を表す.

一方, 最適化分野には分布の不確実性を考慮したモデルである分布的ロバスト最適化がある：

$$\min_{\boldsymbol{x}} \max_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_{\boldsymbol{s}\sim P}\left[f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s})\right]. \tag{2}$$

ここで, $\mathcal{P}$ は分布の不確実性集合を表す．問題 (2) は, 不確実性集合に含まれる最悪な分布に対して最良な設計変数を求解することで, 分布の不確実性を考慮した最適な解を得ることを意図している.

本研究では, 数理最適化分野のモデルである分布的ロバスト最適化とリスク尺度 CVaR を用いることで, 既往の確信度付き信頼性最適設計とは異なるリスク尺度に基づく問題として, 分布的ロバスト CVaR 制約付き期待値最小化問題を定式化する．コンプライアンス制約の下でのトラスの最適設計に適用し, 制約値に応じて最適なトラスの形態が変化する様子を確認する.

2 問題設定

本研究では, トラスのコンプライアンスを扱う．コンプライアンスは構造物の静的柔性の指標であり,

$$f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s}) := \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^d}\{2\boldsymbol{s}^\top\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^\top K(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\}$$

と表される．ここで, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d$ は節点変位を表す変数である．また, 剛性行列 $K(\boldsymbol{x})$ は半正定値対称な定行列 $K_1, \dots, K_m \in \mathcal{S}^d$ を用いて $K(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^m x_j K_j$ と表される.

トラスのコンプライアンスに対する分布的ロバスト CVaR 制約付き期待値最小化問題を

$$\begin{array}{lll} \displaystyle\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}} & \displaystyle\max_{P\in\mathcal{P}} & \mathbb{E}_{\boldsymbol{s}\sim P}\left[f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s})\right] \\ \mathrm{s.\,t.} & \displaystyle\max_{P\in\mathcal{P}} & \mathrm{CVaR}^{\gamma}_{\boldsymbol{s}\sim P}(f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{s})) \leq \nu \end{array} \tag{3}$$

と定式化する．ここで, $\gamma \in [0,1)$ は CVaR により考慮されるコンプライアンスの上側確率を表し, $\nu \in \mathbb{R}$ はコンプライアンスの最悪 CVaR の上限に対する制約値を表す．また $\mathcal{X}$ は, 各部材の長さ $\boldsymbol{l}$ と体積の上限値 V_0 を用いて, $\mathcal{X} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{l}^\top\boldsymbol{x} \leq V_0\}$ と定める.

3　分布の不確実性集合の構成と 2 次錐計画問題の帰着

本研究では文献 [2] に従い, 外力の標本 $\{\hat{\boldsymbol{s}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{s}}_n\}$ を用いて分布の不確実性集合を構成する．つまり, カーネル関数を $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ とし, その半径を $h > 0$ とするとき, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ を重みとする重み付きカーネル密度推定量

$$\hat{p}_{\boldsymbol{w}}(y) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n} w_i k \left(\frac{y - f(\boldsymbol{x}; \hat{\boldsymbol{s}}_i)}{h} \right)$$

と ϕ ダイバージェンス $I_\phi(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^n q_i \phi\left(\frac{p_i}{q_i}\right)$ を用いて不確実性集合を

$$\mathcal{P}_{\mathcal{W}_\phi^\tau} := \left\{ \hat{p}_{\boldsymbol{w}}(y) \mid \boldsymbol{w} \in \mathcal{W}_\phi^\tau \right\}$$

と定める．ここで,

$$\mathcal{W}_\phi^\tau := \left\{ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{1}^\top \boldsymbol{w} = 1,\ I_\phi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}^0) \leq \tau \right\}$$

である．すると, 問題 (3) は, 凸最適化問題

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \alpha \in \mathbb{R}} \quad & \max_{\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}_\phi^\tau} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i f(\boldsymbol{x}; \hat{\boldsymbol{s}}_i) \\ \mathrm{s.t.} \quad & \max_{\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}_\phi^\tau} \quad \left\{ \sum_{i=1}^{n} w_i \Upsilon_k \left(f(\boldsymbol{x}; \hat{\boldsymbol{s}}_i) - \alpha \right) \right\} \leq (1 - \gamma)(\nu - \alpha) \end{aligned} \tag{4}$$

に書き換えられる．ここで, 関数 $\Upsilon_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はカーネルに依存するある平滑な単調非減少凸関数である [2]．一様カーネルや三角カーネルを用いた場合, $\Upsilon_k(f(\boldsymbol{x}; \hat{\boldsymbol{s}}_i) - \alpha)$ $(i = 1, \dots, n)$ はいくつかの凸 2 次不等式を用いて表すことができるため, 問題 (4) は 2 次錐計画問題で記述できる.

4　数値実験

数値実験では, 部材数 49 の平面トラスの問題設定を扱う．最悪期待値と最悪 CVaR の 2 目的最小化に対するパレートフロントを求め, そのトレードオフ関係を分析する.

5　おわりに

本研究ではトラスのコンプライアンスに対して, 分布的ロバスト CVaR 制約付き期待値最小化問題を定式化し, 凸最適化問題に帰着させた．また, 数値実験を通し, 最悪 CVaR に対する制約値に対応して最適なトラスの形態が変化する様子を確認した．今後の展望として, コンプライアンス以外の制約への応用が挙げられる.

参考文献

[1] M-Y. Moon, H. Cho, K. K. Choi, N. Gaul, D. Lamb, and D. Gorsich. Confidence-based reliability assessment considering limited numbers of both input and output test data. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **57**(5):2027–2043, 2018.

[2] W. Liu, L. Yang, and B. Yu. Kernel density estimation based distributionally robust mean-CVaR portfolio optimization. *Journal of Global Optimization*, **84**:1053–1077, 2022.

トポロジー最適化における不連続・非有界な一般化固有値関数に対する近似関数の構成

西岡 暁 [1], 寒野 善博 [1,2]
[1] 東京大学 大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻，[2] 東京大学 数理・情報教育研究センター
e-mail : akatsuki_nishioka@mist.i.u-tokyo.ac.jp

1 概要

トポロジー最適化は機械や建築物などの構造物の最適な形状を求める数理設計手法である．ロバスト性，振動，座屈などを考慮したトポロジー最適化において最大（最小）一般化固有値を目的関数や制約に含む最適化問題が現れる．これらの一般化固有値関数は，行列が特異になる点で不連続性や非有界性をもつため，最適化問題としての扱いが難しい [1]．本研究（プレプリント [2]）では，最大一般化固有値を拡張実数値関数として再定義し，再定義された関数にエピ収束する近似関数を構成する．近似関数は連続関数であるため扱いが容易であり，エピ収束性により近似関数の最小解が元の拡張実数値関数の最小解へ収束することが保証される．

2 一般化固有値

対称行列の組 $(X, Y) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$（$Y$ は正定値）に対する一般化固有値および対応する一般化固有ベクトルは

$$Xv_i = \lambda_i Y v_i.$$

を満たす実数 $\lambda_i \in \mathbb{R}$ と非零実ベクトル $v_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, n)$ として定義される．n 個の一般化固有値の中で最大の値を取るものは

$$\lambda_{\max}(X, Y) = \sup_{v \neq 0} \frac{v^\top X v}{v^\top Y v} \tag{1}$$

のように一般化 Rayleigh 商を用いて表せることが知られている．

3 応用例：固有振動数に関するトポロジー最適化

トラス構造の固有振動数のトポロジー最適化を考える．最適化変数（設計変数）$x \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ は各部材の断面積を並べたベクトルである．x に対応するトラス構造の固有振動数は剛性行列 $K(x) \in \mathbb{S}^n_{\succeq 0}$ および質量行列 $M(x) \in \mathbb{S}^n_{\succeq 0}$ の一般化固有値 $\lambda_i(K(x), M(x))$ として定式化される．最小固有振動数を最大化することで振動に強い構造が得られることが知られている [1]．この最小固有振動数の最大化問題は，以下のような最大一般化固有値の最小化問題として定式化できる：

$$\begin{aligned} \underset{x \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}}{\text{minimize}} \quad & \lambda_{\max}(M(x), K(x)) \\ \text{subject to} \quad & l^\top x = V_0. \end{aligned} \tag{2}$$

ただし，$l \in \mathbb{R}^m_{>0}$ は各部材の長さで構成されたベクトルで，$V_0 > 0$ は体積の上限値であり，制約は体積（質量）制約を意味する．

剛性行列 $K(x)$ および質量行列 $M(x)$ は，ある部材の断面積が 0 のとき，特異行列になる場合がある．その場合，(1) ではある非零ベクトル v に対して分母が 0 になってしまうため，定義が well-defined でなくなることがわかる．そのため，(2) の最大一般化固有値 $\lambda_{\max}(\cdot, \cdot)$ は次節の拡張された定義を用いる．

4　最大一般化固有値の定義の拡張

文献 [1] では，固有振動数に関するトポロジー最適化において，最小一般化固有値の定義を正則とは限らない半正定値行列の場合に拡張している．本研究では，[1] のアイデアをもとに，固有振動数に限らないより一般の場合に対して，最大および最小一般化固有値の定義を拡張する．この拡張は，次節の近似関数のエピ収束性の証明において必要となる．以下では最大一般化固有値のみを扱うが，最小一般化固有値も同様に理論を展開できる．

定義 1（最大一般化固有値） 半正定値対称行列 $X, Y \succeq 0$ に対して，最大一般化固有値を以下のように定義する：

$$\lambda_{\max}(X,Y) := \begin{cases} \sup\limits_{v \notin \ker Y} \frac{v^\top X v}{v^\top Y v} & (Y \neq 0), \\ \infty & (X \neq 0,\ Y = 0), \\ 0 & (X = Y = 0). \end{cases} \tag{3}$$

上の最大一般化固有値は行列が特異となる点で不連続である（$\mathbb{S}^n_{\succ 0} \times \mathbb{S}^n_{\succ 0}$ 上では連続である）．

5　最大一般化固有値の近似関数の構成

不連続かつ非有界な最大一般化固有値 (3) に対して以下の近似関数を提案する：

$$\lambda_{\max}(M(x), K(x) + \epsilon I). \tag{4}$$

ただし，$\epsilon > 0$ は近似パラメータである．$K(x) + \epsilon I$ は任意の $x \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ において正定値であるため，関数 (4) は $\mathbb{R}^m_{\geq 0}$ 上で連続である．

近似関数 (4) が最大一般化固有値 $\lambda_{\max}(M(x), K(x))$ にエピ収束することが，以下の定理から従う．関数 f のエピ収束性は，その関数のエピグラフ $\mathrm{epi}f := \{(x,\alpha) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\}$ の Painlevé–Kuratowski の意味での（集合としての）収束性により定義される [3].

定理 2 近似関数 $\lambda_{\max}(\cdot, \cdot + \epsilon I) : \mathbb{S}^n_{\succeq 0} \times \mathbb{S}^n_{\succeq 0} \to \mathbb{R}$ は $\epsilon \to 0$ の極限で (3) で定義される最大一般化固有値 $\lambda_{\max}(\cdot, \cdot) : \mathbb{S}^n_{\succeq 0} \times \mathbb{S}^n_{\succeq 0} \to (-\infty, \infty]$ にエピ収束する．

エピ収束性の帰結である以下の定理により，(4) を用いた近似最適化問題の正当性が保証される．

定理 3 近似問題

$$\begin{aligned} \underset{x \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}}{\mathrm{minimize}} \quad & \lambda_{\max}(M(x), K(x) + \epsilon I) \\ \text{subject to} \quad & l^\top x = V_0 \end{aligned} \tag{5}$$

の大域解の列 $\{x^*_\epsilon\}_\epsilon$ は必要ならば部分列をとることで $\epsilon \to 0$ の極限で問題 (2) の大域解に収束する．

参考文献

[1] W. Achtziger and M. Kočvara. Structural topology optimization with eigenvalues. *SIAM Journal on Optimization*, 18(4):1129–1164, 2007.

[2] A. Nishioka and Y. Kanno. Variational analysis of unbounded and discontinuous generalized eigenvalue functions with application to topology optimization. *arXiv preprint arXiv:2405.04805*, 2024.

[3] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets. *Variational Analysis*. Springer Berlin, Heidelberg, 1998.

弾性波動方程式逆問題解析高速化のための順問題に対する直接的数値解法

代田 健二 [1]
[1] 愛知県立大学情報科学部
e-mail : shirota@ist.aichi-pu.ac.jp

1 はじめに

本研究では，波動方程式族の逆問題に対する数値的再構成法高速化の基礎研究として，弾性波動方程式の初期値境界値問題に対する数値解法について考察する．著者は，これまでに波動場における逆問題に対する数値解法についての研究を実施してきた．主に対象としてきた係数同定問題に対しては，その非線形性ゆえに一般には勾配法などの反復解法を用いられることが多く，著者も随伴変数法を基礎とした反復法を提案し，一定精度の同定結果を得ることができた．一方，随伴変数法を基礎とした反復法を用いているため，各反復ごとに波動方程式の順問題を 2 回解く必要があり，実用問題，特に空間 3 次元問題への適用には計算速度の観点で課題が残る結果となっていた．この課題を解決する基礎研究として著者は，3 次元スカラー波動方程式の初期値境界値問題に対し，差分法とスペクトル選点法による離散化によりクロネッカー積構造の係数行列を持つ連立一次方程式を導出し，さらに BiCG 系解法を応用することで高速な解法を開発した [1]．なお BiCG 系解法は連立一次方程式に対する反復解法であるが，時間方向離散化に直接解法である選点法を用いていることから "直接的" と名付けている．

本研究の目的は, 弾性波動方程式の初期値境界値問題に対し開発手法を拡張することにより, 弾性波動場における逆問題に対する高速解法の基礎を確立することである．$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ は, 線形かつ等方的な弾性体とし, 有界な Lipschitz 領域とする．$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ を変位ベクトル, $\varepsilon(\boldsymbol{u})$, $\sigma(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ をそれぞれひずみテンソル, 応力テンソルとし, $\varepsilon(\boldsymbol{u}) = (\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})/2$, $\sigma(\boldsymbol{u}) = 2\mu\varepsilon(\boldsymbol{u})+\lambda \mathrm{tr}\,\varepsilon(\boldsymbol{u})I_n$ が成り立っているとする．ここで, tr は行列のトレース, I_n は n 次単位行列である．また λ, $\mu \in L^\infty(\Omega)$ は Lamé の弾性係数である．このとき，本研究で対象とするのは次の線形弾性波動方程式である:

$$\rho\partial_t^2\boldsymbol{u} = \nabla^{\mathrm{T}}\sigma(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{f} \quad \text{in } \Omega\times(0, T)\,.$$

ただし，初期値および初速度 $\boldsymbol{u}(\cdot,0)|_\Omega = \boldsymbol{u}_0$，$\partial_t\boldsymbol{u}(\cdot,0)|_\Omega = \boldsymbol{v}_0$，表面変位と表面力 $\boldsymbol{u}|_{\Gamma_D\times(0,T)} = \boldsymbol{g}$，$\sigma(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\nu}|_{\Gamma_N\times(0,T)} = \boldsymbol{q}$ が与えられているものとする．ここで ∂_t は $\partial/\partial t$ を意味し，$\partial\Omega = \overline{\Gamma_D\cup\Gamma_N}$，$\Gamma_D\cap\Gamma_N = \emptyset$ とする．また $\rho \in L^\infty(\Omega)$ は密度，$T > 0$ は観測時間の長さであり，$\boldsymbol{u}_0$，$\boldsymbol{v}_0$，$\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{g}$，$\boldsymbol{q}$ は適切に与えられた関数である．

2 スペクトル選点–有限要素法による直接的数値解法

対象とする問題の離散化手法として，スペクトル選点法を時間方向離散化に用いることで時間方向の並列計算を可能にしたスペクトル選点–差分法 [1] のアイディアを採用する．空間方向の離散化には，係数同定逆問題への応用を考慮して，有限要素法を採用する．対象問題を弱定式化し，有限要素法を適用することにより，次のような半離散化方程式を得ることができる．

$$M_h\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t^2}(t) + A_h\boldsymbol{u}_h(t) = \boldsymbol{F}_h(t)\,,\quad t\in(0, T),\quad \boldsymbol{u}_h(0) = \boldsymbol{u}_{0,h},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_h}{\mathrm{d}t}(0) = \boldsymbol{v}_{0,h}\,. \tag{1}$$

ただし，$\boldsymbol{u}_h(t) = (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^{(1)}, t), \dots, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^{(N)}, t))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{u}_{0,h} = (\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}^{(1)}), \dots, \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}^{(N)}))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}_0 = (\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}^{(1)}), \dots, \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}^{(N)}))^{\mathrm{T}}$ であり，また $\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ は有限要素分割による節点，$M_h, A_h \in \mathbb{R}^{n\cdot N \times n\cdot N}$ はそれぞれ質量行列，剛性行列である．

半離散化方程式 (1) の時間方向近似として，Newmark 法に代表される数値積分法が一般的に用いられている．しかしこれらの方法では，逐次近似ベクトルを求めていくため，時間方向を並列化することが困難である．本研究では，選点法により時間方向を離散化することで大規模連立一次方程式を導出し，その方程式を並列計算することで高速化の実現を目指すことにする．ここで選点法としては，Gauss-Lobatto 選点を用いた Chebyshev 多項式によるスペクトル選点法 [2] を採用する．(1) を 1 階常常微分方程式に変換し，その方程式へ選点数 $N_T + 1$ のスペクトル選点法を適用することにより，次の $2nNN_T$ 次の全離散化方程式を得ることができる．

$$\left(\frac{2}{T} D_t \otimes \tilde{M}_h + I_{N_T} \otimes \tilde{A}_h\right) \hat{\boldsymbol{u}} = \hat{\boldsymbol{F}}.$$

ただし，$D_t \in \mathbb{R}^{N_T \times N_T}$ はスペクトル選点法による微分行列であり，

$$\tilde{M}_h = \begin{pmatrix} I_{nN} & O_{nN} \\ O_{nN} & M_h \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_h = \begin{pmatrix} O_{nN} & -I_{nN} \\ A_h & O_{nN} \end{pmatrix}.$$

$\otimes$ は行列のクロネッカー積である．係数行列の構造を維持可能な連立一次方程式の解法として代表的な方法としては，SOR 法などの定常反復解法や BiCG 法などの非定常反復解法がある．一方，係数行列は疎とはいえ，D_t の要素数 $\times \tilde{A}$ の要素数を格納するメモリが必要となり，大規模問題を対象とする場合は何らかの対処法を考えなければならない．そこで本研究では，大橋ら [3] が提案した逆 `vec` 作用素を用いたアイディアを採用する．逆 `vec` 作用素を全離散化方程式に適用することにより，次の同値な行列方程式を得ることができる．

$$\tilde{M}_h U \tilde{D}_t^{\mathrm{T}} + \tilde{A}_h U = F.$$

ただし，$U = \mathtt{vec}^{-1}(\hat{\boldsymbol{u}}) \in \mathbb{R}^{2nN \times N_T}$，$F = \mathtt{vec}^{-1}(\hat{\boldsymbol{F}}) \in \mathbb{R}^{2nN \times N_T}$，$\tilde{D}_t = \frac{2}{T} D_t$ である．この変換により，係数行列に対する使用メモリ量は，従来法と同程度になる．この行列方程式に対して，全離散化方程式に安定化 GPBiCG 法 [4] のアルゴリズムに逆 `vec` 作用素を適用することで得られるアルゴリズムを適用することで近似解を得ることができる．数値実験結果は，発表時に示す．

謝辞　本研究は JSPS 科研費 23K03236 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] 代田健二, 波動方程式の逆問題解析高速化のための順問題に対する直接的高速数値解法の開発, 第 28 回計算工学会講演会講演論文集, C-04-04 (PDF), 2023.

[2] J. Shen, T. Tang, and L. Wang, Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications, Springer Series in Computational Mathematics 41, Springer, 2011.

[3] A. Ohashi and T. Sogabe, On computing maximum/minimum singular values of a generalized tensor sum, Electronic Transactions on Numerical Anaysis, Vol.43 (2015), 244-254.

[4] K. Abe and G. Sleijpen, Solving linear equations with a stabilized GPBiCG method, Applied Numerical Mathematics, Vol.67 (2013), 4–16.

数理・計算モデル：新規圧縮性流体ソルバーの開発

中澤 嵩[1]
[1]金沢大学
e-mail: tnakazawa@staff.kanazawa-u.ac.jp

1 背景

航空工学や自動車工学では非定常・圧縮性（高レイノルズ数）流体を扱う必要があるため，圧縮性 Navier-Stokes 方程式が支配方程式として多く利用されるが，時間方向・空間方向の高精度な離散化を担保する必要があるため計算コストが膨大となる．そこで，最適設計を行う際には，圧縮性 Navier-Stokes 方程式と比較して計算コストを抑制することが可能な、式(1)に記述している圧縮性 Euler 方程の利用が一般的である．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})=0,\frac{\partial \rho\boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})+\nabla p=0,\frac{\partial \rho E}{\partial t}+\nabla\cdot\{(\rho E+p)\boldsymbol{u}\}=0.(1)$$

この圧縮性流体を扱う際，非圧縮性流体と比較して，時空間に複雑な応力分布が発生し，局所的に密度が集中する衝撃波が発生する．このような場合には，衝撃波を高精度に捕捉する必要があるため，界面を高精度に解像することが可能な有限体積法や不連続ガラーキン法等を用いた空間離散化が行われるが，形状最適化を行う際には順問題だけでなく逆問題を解く必要があるためアルゴリズムが非常に煩雑となることが予想される．

2 数理モデル

近年，Multi Fidelity 設計を考慮したアプローチが注目を集めつつある．ここで，圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いた設計を High-Fidelity 設計とする．一方，圧縮性 Euler 方程式に対して何らかの数学的な操作を行った際に得られる簡易な数理モデルを用いた設計を Low-Fidelity 設計とすることで（厳密に圧縮性 Euler 方程式を解いていないが），膨大な計算コストを緩和しつつ妥当な最適形状が得られると考えられる．ここでは，Low- Fidelity 設計を行う際の支配方程式として式(2)に記述している F. De Vuyst が提案している数理モデル(1)を活用することにする．

$$\frac{Da_\rho}{Dt}+\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0,\rho\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}+p\nabla a_p=0,\frac{Da_p}{Dt}+\gamma\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0.(2)$$

この数理モデル(2)は，密度と圧力と対して log 変換を行うことで衝撃波近傍における数値フラックスを精度よく近似することが期待されている．

$$a_\rho=\log(\rho),a_p=\log(p)$$

また，数理モデル(1)と同様の位相速度$u,u-c,u+c$や適合方程式

$$D_1\rho-\frac{1}{c^2}D_1p=0, D_2u+\frac{1}{\rho c}D_2p=0, D_3u-\frac{1}{\rho c}D_3p=0$$

が得られることが分かっており，最終的にはリーマン不変量も一致する．結果的に，この数理モデル(2)はこの数理モデル(1)と同等の数学的性質を引き継いでいると考えられる．

3　計算モデル

時間方向に離散化する際に，特性曲線法を用いて物質微分を数値的に近似することをすることを前提とすると，下記のように$a_\rho, \boldsymbol{u}, a_p$に関する偏微分方程式が得られる．

$$\rho^{n-1}\frac{Da_\rho^n(\boldsymbol{x})}{Dt}+\rho^{n-1}(\nabla\cdot\boldsymbol{u}^n)=0,$$
$$\rho^n\frac{D\boldsymbol{u}^n(\boldsymbol{x})}{Dt}+\nabla p^n-\frac{1}{2}\Delta t\nabla\cdot\{(\nabla p^n)\boldsymbol{u}^n\}=0,$$
$$p^{n-1}\frac{Da_p^n(\boldsymbol{x})}{Dt}+\gamma p^{n-1}(\nabla\cdot\boldsymbol{u}^n)=0,$$

4　まとめ

圧縮性流体場の数値計算には，これまで保存系を用いることが一般的であり，非保存系で記述される数理モデル(2)に関する数値計算スキームはほとんど存在しない．そこで，今後は代表的なテスト計算であるSod Shock Tube ProblemやNACA0012周り流れ等を対象として，数値計算結果の妥当性を検証したいと考えている．

謝辞　本研究は JSPS 科研費 23K03659 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] De Vuyst, HAL Id : cel-00842234, ver. 1.

