

位相変位カオス同期-Phase Shift Chaotic Synchronization-

大矢 長門¹, 梅野 健²^{1,2} 京都大学 情報学研究科 数理工学

e-mail : oya.nagato.56x@st.kyoto-u.ac.jp, umeno.ken.8z@kyoto-u.ac.jp

1 Introduction

自然界ではほとんどの物事は準周期的な非線形な状態によって成り立っており、理想的な線形現象は見ることが稀である。通常のカオスでは周期性は生じない。しかしながら、一定時間経過すると準周期性カオスが生じる場合がある。これら非線形現象であるカオスにおける位相変位について述べる。

2 位相のずれたカオス同期

多体系一般化ブル変換の完全同期条件を満たすように、次の行列式を考える。

$$X_{t+1} = AX_t - BX_t^{-1} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} w_{t+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{t+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{t+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{21} & \alpha & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{21} & \alpha & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{21} & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_t \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} w_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_t \end{bmatrix}^{-1} \quad (2)$$

この一般化ブル変換の式 [1] によってコーシー分布 [2] による、条件付きリアプノフ指数 [3] が定義でき、同期現象 [4] を伴うカオスであることを示すことができる。また、 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ とし、任意の値として $t = 0$ の初期値を全て $w_0 = 2, x_0 = 3, y_0 = 5, z_0 = 7$ と置く。

ここで、 $\varepsilon_{13} = 0$ とし、微小な値 $\Delta\varepsilon$ を考え、その分を ε_{12} ないしは、 ε_{14} から引いてやると位相変位現象 [phase shift effect] が発生する。

Cyclic な結合に微小な差を付けることによって、4 体系において、それぞれ位相が $\pi/2$ ずれた周期的カオス同期が生じる。

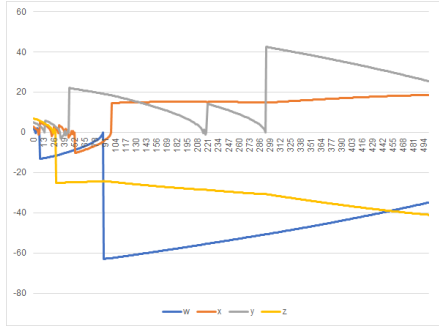
3 波動的性質による周期的同期現象

行列による写像変換を重ねることで回転縮小作用とカオスが発生を促す項 BX_t^{-1} によって ∞ への発散効果を抑制し波動的性質が生じる。従って、値的には同期しているように見えなくても、図 1, 図 2 の様に周期的同期現象が発生する。

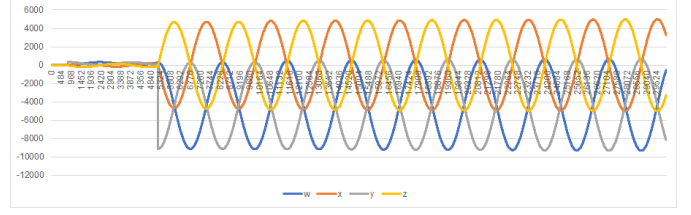
なお、図 1 を見ると最初はカオス状態であるが、全体図で見ると、5000 を超えたあたりから、それぞれの波に分かれた正弦波同期が生じる。

すなわち、完全同期ではなく、正弦波のような波形の周期性カオス、すなわち長周期同期が発生する。

図 3 が示すものは、 ε_{12} の値を 0.001 ずらして計算を行っている。その結果、大周期振動と小周期振動によって変調され互いに $\pi/2$ の位相がずれたカオス同期現象が見られる。



初期拡大図

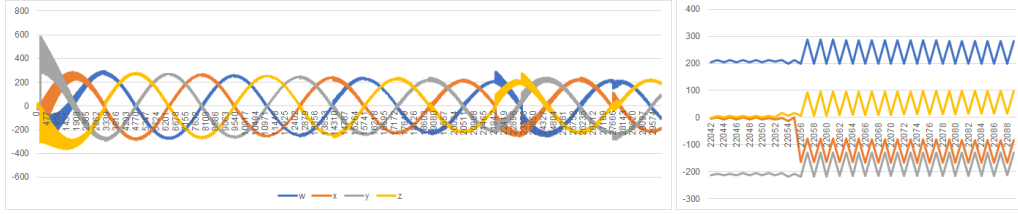


全体図

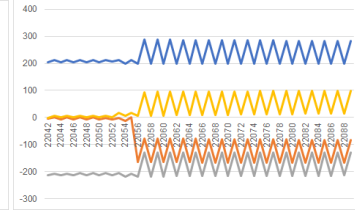
図 1. $\alpha = 1, \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{14} = 0.001, \varepsilon_{13} = 0$



図 2. $\alpha = 0.001, \varepsilon_{12} = 0.5, \varepsilon_{13} = 0, \varepsilon_{14} = -0.5$



全体図



部分拡大図

図 3. $\alpha = 0.5, \varepsilon_{12} = -0.499, \varepsilon_{13} = -0.5, \varepsilon_{14} = -0.5$

4 Summary

自然界には規則性や不規則性の混在する状況があるが、今まで、カオス現象には不規則性といった認識があったが、規則的側面からのアプローチは少なかったと思われる。しかし、今回のこのシミュレーションによって、規則性と不規則性を併せ持つ身近な現象を示すことが可能であることも分かった。

参考文献

- [1] Ken Umeno, Ken-ichi Okubo, Exact Lyapunov exponents of the generalized Boole transformations Progress of Theoretical and Experimental Physics, Volume 2016, Issue 2, February 2016, 021A01, Published: 11 February 2016
- [2] Ken Umeno. Ergodic transformations on R preserving Cauchy laws. NOLTA, IEICE, Vol.7, pp.14–20, 2016.
- [3] M. Shintani and K. Umeno. Conditional Lyapunov exponent criteria in terms of ergodic theory. Progress, of Theoretical and Experimental Physics, 013A01, 2018.
- [4] Takumi Kano, Ken Umeno, Chaotic synchronization of mutually coupled systems–arbitrary proportional linear relations, Chaos 32, 113137 (2022),

重力相互作用モデルの 1 次元リング構造における多様な解について

小池 元¹, 高安 秀樹¹, 高安 美佐子¹

¹ 東京工業大学 情報理工学院

e-mail : koike.h.af@m.titech.ac.jp

1 重力則の観測とモデル化

国や都市間の移住による人口移動 [1, 2]、国際貿易による国間のお金のやり取り [3]、企業間取引による企業間のお金のやり取り [4] など時間的にも空間的にも多様なスケールでの移動現象は重力則とよばれる共通の式でモデル化され、ネットワーク上の非線形輸送として理解できる。典型的にはネットワークの各リンク上のソースノードからターゲットノードへの流れがソースとターゲットのサイズの両方に非線形に依存しており、ターゲットサイズが大きいほど大きい流れができる“rich get richer”現象の一例となっている。ネットワークの各ノードが接続したノードへの配分量を自分と周りの状態に応じて時間変化させ、流入流出によって各ノードのサイズが時間発展するモデルが近年調べられており [5, 6]、そのひとつとして、次の式で表される重力相互作用モデルとよばれるモデルが提案されている [6]。

$$\dot{x}_j = \sum_i \frac{A_{ij}x_j^\gamma}{\sum_k A_{ik}x_k^\gamma} x_i - (1 + \nu)x_j + 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

ただし

- x_j : ノード j のサイズ、企業間取引の場合は企業 j の (スケールした) 売上高に対応する
- n : ネットワークのノード数
- A_{ij} : ネットワークの隣接行列, ノード i から j への有向リンクが存在すれば 1, しなければ 0
- γ : 非線形性の強さを表す制御パラメータ、典型的には正の値をとる
- ν : 外部とのやりとりを表す散逸係数、正の値をとる

である。企業間取引データからパラメータをフィッティングすると $\gamma = 0.33, \nu = 0.1$ となり、フィッティングされたパラメータを用いて取引ネットワークの上でモデルの定常状態を数値的に求めることで、日本企業の売上高分布で見られる Zipf 則を再現できることが知られている。その際、企業間取引での γ がおよそ 0.3 であり非線形であることが売上高の累積分布のべき指数-1 を実現するのに重要である。

2 分岐現象

輸送の非線形性が系の定常状態に及ぼす影響は基本的かつ極めて重要な興味であり、 γ を制御パラメータとして定常解が分岐現象を示すことがすでに知られている。この分岐現象はある種の相転移と考えられ、拡散局在転移と呼ばれて分岐点のネットワーク構造依存性が興味の対象として調べられてきた [6, 7]。例えば企業間取引ネットワークでの分岐点 γ_c は散逸係数 $\nu = 0.1$ の場合には 0.9 程度と見積もられており、現実には拡散相であるとされている。

しかしながら、これまでの研究では一様解の分岐については調べられてきたが、一様解の分岐後の振る舞いについては調べられていない。現実系はネットワーク構造とサイズがともに不均一であり、

人口移動や国際貿易などのマクロな系においては γ の値は典型的に 1 であり必ずしも小さくないため、一様解が分岐して局在相になったあとの解の振る舞いを知ることには十分意義があると考えられる。そこで、本講演では最も単純な設定のひとつとして 1 次元リング上で一様解が分岐したあとに非線形性を強めた場合に非自明な解が観測されることを示し、特に弛緩振動やカオス解といった固定点とは限らない解の振る舞いについて説明する。以下、主に $\nu = 0.01$ と固定した場合の挙動について述べる。

3 1 次元リング上の分岐現象

まず、1 次元リングの場合における一様解の分岐解析を復習する。モデルを一様解周りで線形化し、線形化行列の固有値を求めると次のようになる [7]:

$$\lambda_j = -\gamma \cos^2\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) - (1 + \nu), \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2)$$

この固有値の表式から、散逸係数 ν を固定すると、長波長では不安定にならずある有限の波長が最も不安定になる Turing 分岐を示すことがわかる。 ν が大きいほど分岐点 γ_c の値は大きくなり、不安定波長が短くなる。 $n = 9, \nu = 0.01$ の場合に $0 \leq \gamma \leq 1.5$ で数値計算を行ったところ、次のような相が観察された。一様解は γ によらずつねに固定点である。

- $0 \leq \gamma < \gamma_c = 0.595$: 一様解 $x_j = \frac{1}{\nu}$ が唯一の安定固定点である。
- $\gamma = \gamma_c$: 一様解の対称性が崩れる超臨界ピッチフォーク分岐が起きる。
- $\gamma_c < \gamma < 0.755$: 局在固定点が複数存在する。
- $\gamma = 0.755$: 局在固定点から別の固定点へのジャンプが観察される。
- $0.755 < \gamma < 0.92$: 局在固定点が複数存在する。
- $0.92 < \gamma < 0.934$: 周期解が存在する。
- $0.934 < \gamma < 1.027$: カオス解が存在する。
- $1.027 < \gamma \leq 1.5$: 局在固定点が複数存在し、安定である。

参考文献

- [1] Ravenstein, J Royal Stat Soc 52.2 (1899)
- [2] Zipf, Ame Soc Rev 11.6 (1946)
- [3] Tinbergen, New York Twentieth century fund 5.1 (1962)
- [4] Tamura, et al. Int J Mod Phys Conf Ser 16 (2012)
- [5] Per Sebastian Skardal. J Nonlin Sci, 29 (2018)
- [6] Koutarou Tamura, Hideki Takayasu, and Misako Takayasu. Sci Rep 8, 1 (2018)
- [7] Hajime Koike, Hideki Takayasu, and Misako Takayasu. J Stat Phys 186, 3 (2022)

電極触媒の劣化速度に関する力学系モデルの構築

大岡 英史¹, Marie E. Wintzer¹, 小松 弘和², 須田 智晴¹, 足立 精宏³, 李 愛龍¹, 孔 爽¹, 橋爪 大輔³, 望月 敦史⁴, 中村 龍平^{1,5}
¹ 理研 CSRS, ² 豊田高専, ³ 理研 CEMS, ⁴ 京大ウィルス研, ⁵ 東工大 ELSI
 e-mail : hideshow.ooka@riken.jp

1 概要

水素製造や燃料電池など、次世代のクリーンエネルギー技術を実現するには、効率的な電極触媒が必要である。電極触媒は金属や金属酸化物などから構成されることが多く、電圧をかけることにより、その固体表面上で特定の化学反応を促進する触媒として機能する。本来、触媒とは化学反応の前後で自身は変化しない材料を指し、原理的に永久的に使用可能である。しかし、現実の触媒は想定外の反応が起こることにより少しずつ劣化するため、実際の材料寿命は有限となる。[1] このため、長寿命の材料を探索することは良い触媒を開発する上で不可欠である。本発表では、このような固体表面上で起きる触媒の劣化・溶出を評価するための力学系モデルを取り上げる。[2]

2 モデル

触媒の劣化・溶出のモデルとして、以下のような化学反応ネットワークを考える。目的触媒反応は、 N 個の中間体 $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow \cdots \rightarrow X_N \rightarrow X_1$ からなり、各反応は速度定数 k_i を持つとする。また、各中間体から速度定数 d_i で溶出が起きるとする。全ての反応は一次の質量作用系であると仮定する。この場合、 X_i の量を x_i と記述し、濃度ベクトル $x := (x_1, \dots, x_n)^T$ を定義すると、 x の時間変化は以下の常微分方程式 (ODE) に従う：

$$\frac{dx}{dt} = (C - D)x. \quad (1)$$

ここで、

$$C := \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & \cdots & 0 & k_n \\ k_1 & -k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -k_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n-1} & -k_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

は触媒サイクルを、

$$D := \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}. \quad (3)$$

は溶出に対応する。

3 結果

現実の触媒では、触媒反応は溶出に対して十分に速いとみなせる。このため、触媒サイクルに対して定常状態近似 $Cx = 0$ [3, 4] を適用することが可能となる。この場合、 x を陽に求めることが可能

となる。そして、触媒寿命 τ を x の総量 $(\sum x_i)$ が $\frac{1}{e}$ に減衰する時間と定義すると、寿命は以下の数式で表現できる：

$$\tau := \left(\sum \frac{1}{k_i} \right) / \left(\sum \frac{d_i}{k_i} \right). \quad (4)$$

本発表では、寿命の理論式の導出と実際の実験との整合性について述べる。

参考文献

- [1] A. Li, S. Kong, C. Guo, H. Ooka, K. Adachi, D. Hashizume, Q. Jiang, H. Han, J. Xiao, R. Nakamura, Nat. Catal. 5 (2022), 109–118.
- [2] H. Ooka, M. E. Wintzer, H. Komatsu, K. Adachi, A. Li, S. Kong, D. Hashizume, A. Mochizuki, R. Nakamura, ChemRxiv (10.26434chemrxiv-2023-7w3gk).
- [3] Z. Gromotka, G. Yablonsky, N Ostrovskii, D. Constales, Entropy 23 (2021), 818.
- [4] N. Ostrovskii, Chem. Engin. J. 120 (2006), 73–82.

力学系と時系列データの圏について

須田 智晴¹

¹ 東京理科大学

e-mail: tomoharu.suda@rs.tus.ac.jp

1 概要

時系列データに基づき力学系を記述・解析することは応用上興味深い問題である。このような場合に考察の対象となるデータは通常、何らかの力学系に起源を持つものであり、単なる文字列以上の構造を持つことが期待される。そこで、本研究では、力学系の観測により生じる時系列データについて圏論の枠組みを用いて考察する。これにより、力学系の情報がどのようにデータに反映されるかについて、見通しの良い記述を得ることを試みる。本講演の内容は S. Das 氏 (Texas Tech) との共同研究に基づく。

2 はじめに

力学系理論の構造自体について考えたい場合がある。例えば、力学系には離散や連続など様々な設定が存在するが、これらの間の関係はどうなっているかを問題とするような場合である。一般に、複数の数学的構造の相互関係を考察する際、圏論を用いることで概念を整理できることが期待される [1, 2]。そこで、ここでは写像の力学系を観測し、データを作る操作について圏論の概念を用いた定式化を試みたい。これは次のような流れを経ると考えられる。

- **Step 1:** モデルより軌道を計算する。
- **Step 2:** 相空間を離散化し、それについての無限列として軌道を表現する。
- **Step 3:** 軌道の有限部分列をとる。

以上の各ステップにおいて、元の力学系の構造はある程度保たれていると思われる。以下では時系列データの概念を定式化することで、どのような性質が保たれるのかについて考察を行う。

3 列による力学系の記述

定義 1 無限列のなす圏 **Seq** を以下で定義。

- 対象は無限列のシフト不変な集合。すなわち、 $S \subset A^{\mathbb{N}}$ という形の集合で、シフト写像 σ について $\sigma(S) \subset S$ となるもの。
- 射はシフトと可換な写像。すなわち、 $\phi: S \rightarrow T$ で $\sigma\phi = \phi\sigma$ となるもの。

対象 S の元となる集合を $|S|$ と表す。

Seq の対象は力学系とみなすことができ、射はいわゆる semiconjugacy に相当する。また、移動平均などの時系列データの変換も射として表現できる。さらに underlying set 上の写像で生成される射に制限することにより、**Seq** の部分圏 **Seq₀** が定義される。モデルより軌道を計算する操作は離散力学系の圏 **Map** より **Seq₀** への関手として定式化できる。次の構成は時系列データを考察する上で基本的である。

定義 2 S を **Seq** の対象とする. S に含まれる長さ $n + 1$ の部分列全体の集合を次で表す.

$$W_n(S) := \{\xi_0 \xi_1 \cdots \xi_n : \xi \in S\}$$

4 時系列データの構造

定義 3 有限列の圏 **FinSeq** を以下で定義.

- 対象は有限列の集合. すなわち, $X \subset A^n$ という形の集合.
- 射は単に写像.

$X \subset A^n$ のとき, $\text{len } X = n$ と書く.

すると時系列データは有限列を用いて, 次のように定義できる.

定義 4 時系列データは **FinSeq** の対象の族 $X = \{X_i\}_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) と写像 $s_i, f_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ からなる構造で, 以下を満たすもの.

- $\text{len } X_i = i + 1$ for all i .
- $s_i(x_0 x_1 \cdots x_i) = x_1 \cdots x_i$ and $f_i(x_0 x_1 \cdots x_i) = x_0 x_1 \cdots x_{i-1}$ (定義できるとき).

この s_i はシフト写像であり, f_i は最後の項を除去する写像である. 時系列データの力学系としての性質は, これらの標準的な写像を用いて記述することができる.

定義 5 時系列データの圏 **TSD** を次で定義.

- 対象は時系列データ.
- 射 $\phi : X \rightarrow Y$ は写像 $\phi_k : X_k \rightarrow Y_k$ の族で任意の k について以下を可換にするもの.

$$\begin{array}{ccc} X_k & \xleftarrow[s_{k+1}]{f_{k+1}} & X_{k+1} \\ \downarrow \phi_k & & \downarrow \phi_{k+1} \\ Y_k & \xleftarrow[s_{k+1}]{f_{k+1}} & Y_{k+1} \end{array}$$

定理 6 関手 $W : \mathbf{Seq}_0 \rightarrow \mathbf{TSD}$ を \mathbf{Seq}_0 の対象 S に時系列データ $W(S)$ を対応させることで定義できる. 射については \mathbf{Seq}_0 の射 $S \rightarrow S'$ はある写像 $h : |S| \rightarrow |S'|$ と同一視できるので, これを用いて定義する.

次のように関手を合成することで, 時系列データに力学系の構造が反映されていることがわかる.

$$\mathbf{Map} \rightarrow \mathbf{Seq}_0 \rightarrow \mathbf{TSD}$$

例えば, 共役な力学系は同型な時系列データを生成する.

参考文献

- [1] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician. Springer, 1978.
- [2] E. Riehl, Category theory in context. Courier Dover Publications, 2017.
- [3] S. Das, T. Suda, “Dynamics, data and reconstruction”, in preparation.