フェイズフィールド法による外力項付き平均曲率流方程式の弱解の構成とその応用

高棹 圭介 [1], Katerina Nik [2]
[1] 京都大学大学院理学研究科, [2] Delft University of Technology
e-mail : takasao.keisuke.8w@kyoto-u.ac.jp

1 導入

$d \geq 2$, Ω を $\Omega = \mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$, または境界が滑らかな $\mathbb{R}^d$ の有界領域とする. $W(s) = \dfrac{(1-s^2)^2}{2}$, $g^\varepsilon(x,s)$ を $\varepsilon > 0$ に依存する既知関数とする. 本講演では, 以下の Allen-Cahn 方程式を考える:

$$\varepsilon \partial_t \varphi^\varepsilon = \varepsilon \Delta \varphi^\varepsilon - \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon} + g^\varepsilon(x, \varphi^\varepsilon)\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty). \tag{1}$$

ここで, 境界条件は $\Omega = \mathbb{T}^d$ のときは周期境界条件, Ω が滑らかな境界を持つ有界領域のときは $\dfrac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial \nu} = 0$ on $\partial\Omega$ を課す (ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトル). $\sigma = \int_{-1}^1 \sqrt{2W(s)}\, ds$ とし, Radon 測度 μ_t^ε を $d\mu_t^\varepsilon = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon(x,t)|^2}{2} + \frac{W(\varphi^\varepsilon(x,t))}{\varepsilon}\right) dx$ で定める. まず, (1) に関する既知の結果を紹介する. Ilmanen [1] は, $\Omega = \mathbb{R}^d$ かつ $g^\varepsilon \equiv 0$ であるとき, μ_t^ε の極限が Brakke flow とよばれる平均曲率流方程式の弱解 (varifold による解) であることを証明した. Mugnai-Röger [2] は, $d = 2,3$ で Ω が有界領域, かつ g^ε が x にのみ依存し連続等の仮定を課した場合に, μ_t^ε の極限が外力項付き平均曲率流方程式の弱解 (L^2-flow) になることを示した. Mizuno-Tonegawa [3], Kagaya [4] は, Ω が有界領域, かつ $g^\varepsilon \equiv 0$ であるときに, 得られる Brakke flow が弱い意味で Neumann 境界条件を満たすことを示した. 本講演では, g^ε として適切なものを与えることで, (1) の特異極限から体積保存平均曲率流方程式及び平均曲率流方程式の障害物問題の弱解が得られることを示す.

2 体積保存平均曲率流方程式

$\Omega = \mathbb{T}^d$, $\alpha \in (0,1)$, $G(s) = \int_0^s \sqrt{2W(a)}\, da = s - \frac{1}{3}s^3$,

$$\lambda^\varepsilon(t) = g^\varepsilon(x, \varphi^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\left(\int_\Omega G(\varphi^\varepsilon(x,0))\, dx - \int_\Omega G(\varphi^\varepsilon(x,t))\, dx\right)$$

とする. このとき以下が成り立つ.

定理 1 (Takasao [5]) $U_0 \subset \Omega$ を, 境界 $M_0 = \partial U_0$ が C^1 級の開集合とする. このとき, 0 に収束するある正の数列 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ と (1) の解の族 $\{\varphi^{\varepsilon_i}\}_{i=1}^\infty$, 及び Radon 測度の族 $\{\mu_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が存在して以下が成り立つ:

1) $\mu_0 = \mathcal{H}^{d-1}\lfloor_{M_0}$ かつ $\mu_t^{\varepsilon_i} \rightharpoonup \mu_t$ as Radon measures.
2) ある $\lambda \in L^2_{loc}(0,\infty)$ が存在して, 任意の $T > 0$ について $\lambda^{\varepsilon_i} \rightharpoonup \lambda$ weakly in $L^2(0,T)$.
3) $U_t = \{x \in \Omega \mid \lim_{i\to\infty} \varphi^{\varepsilon_i}(x,t) = 1\}$ と定めると, 任意の $t \geq 0$ について $|U_t| = |U_0|$.
4) $\{\mu_t\}_{t\in[0,\infty)}$ は, generalized velocity vector $v \in L^2_{loc}((0,\infty); L^2(\mu_t)^d)$ を持つ L^2-flow である.
5) 任意の $\Phi \in C_c(\Omega \times (0,\infty); \mathbb{R}^d)$ について

$$\int_0^\infty \int_\Omega \left\{ v - h + \lambda \frac{d\mathcal{H}^{d-1}\lfloor_{\partial^* U_t}}{d\mu_t} n \right\} \cdot \Phi \, d\mu_t dt = 0$$

が成り立つ. ここで $n = n(x,t)$ は reduced boundary $\partial^* U_t$ の外向き単位法線ベクトルである.

3　平均曲率流方程式の障害物問題

Ω を境界が滑らかな $\mathbb{R}^d$ の有界領域, $O_+, O_- \subset\subset \Omega$ を $C^{1,1}$ 級の境界を持つ開集合とし, $\mathrm{dist}\,(O_+, O_-) > 0$ とする. $U_0 \subset \Omega$ を開集合, $M_0 = \overline{\partial U_0 \setminus \partial\Omega}$ とし, 以下を仮定する:

1) $A = \{(y_1, y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \mid |y_1| < 1, |y'| < 2\}$ に対してある C^1-diffeomorphism $\Psi : A \to \Psi(A) \subset \mathbb{R}^n$ が存在して $M_0 = \{\Psi(y_1, y') \mid y_1 = 0, |y'| \le 1\}$ かつ $\partial\Omega \cap \Psi(A) = \{\Psi(y_1, y') \mid |y_1| < 1, |y'| = 1\}$ が成り立つ. さらに $\Psi(A \cap \{y_1 > 0, |y'| < 1\}) \subset U_0$ が成り立つ.
2) $O_+ \subset U_0$, $U_0 \cap O_- = \emptyset$, $\mathrm{dist}\,(M_0, O_\pm) > 0$, かつ $M_0 \perp \partial\Omega$ on $\partial\Omega \cap \partial M_0$. ここで $\partial M_0 = \Psi(\{y_1 = 0, |y'| = 1\})$.

定理 2（Nik-Takasao [6]）　0 に収束するある正の数列 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ と, x にのみ依存する滑らかな外力 g^{ε_i} を持つ (1) の解の族 $\{\varphi^{\varepsilon_i}\}_{i=1}^\infty$, 及び Radon 測度の族 $\{\mu_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が存在して以下が成り立つ:

1) $\mu_0 = \mathcal{H}^{d-1}\lfloor_{M_0}$ かつ $\mu_t^{\varepsilon_i} \rightharpoonup \mu_t$ as Radon measures.
2) a.e. $t \ge 0$ について, μ_t は rectifiable varifold の weight measure である. 特に, $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \overline{(O_+ \cup O_-)}$ では integral である.
3) 任意の $t \ge 0$ について $\mathrm{spt}\mu_t \cap O_\pm = \emptyset$. さらに, $\psi(x,t) = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{2}(\varphi^{\varepsilon_i}(x,t) + 1)$ とおくと, $\psi = 1$ a.e. on $O_+ \times [0,\infty)$ かつ $\psi = 0$ a.e. on $O_- \times [0,\infty)$.
4) $\tilde{\Omega}$ 上で $\{\mu_t\}_{t\in[0,\infty)}$ は平均曲率流方程式の弱解 (Brakke flow) であり, さらに [3, 4] の意味で Neumann 境界条件を満たす.

注意 3　関数 g^ε は十分大きな $C > 0$ について $x \in O_\pm$ のとき $g^\varepsilon(x) = \pm C$ となるように定める.

謝辞　本研究は科研費 (課題番号: 23H00085, 23K03180, 24K00531) 及び the Austrian Science Fund (FWF) project F65, ENW Vidi grant VI.Vidi.223.019 ‘Codimension two free boundary problems’ of the Dutch Research Council NWO の助成を受けたものである.

参考文献

[1] T. Ilmanen, *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature*, J. Differential Geom., **38** (1993), 417–461.

[2] L. Mugnai and M. Röger, *Convergence of perturbed Allen-Cahn equations to forced mean curvature flow*, Indiana Univ. Math. J., **60** (2011), 41–75.

[3] M. Mizuno and Y. Tonegawa, *Convergence of the Allen-Cahn equation with Neumann boundary conditions*, SIAM J. Math. Anal., **47** (2015), 1906–1932.

[4] T. Kagaya, *Convergence of the Allen-Cahn equation with a zero Neumann boundary condition on non-convex domains*, Math. Ann., **373** (2019), 1485–1528.

[5] K. Takasao, *The existence of a weak solution to volume preserving mean curvature flow in higher dimensions*, Arch. Ration. Mech. Anal. **247** (2023), Paper No. 52, 53 pp.

[6] K. Nik and K. Takasao, *On an obstacle problem for the Brakke flow with a generalized right-angle boundary condition*, preprint, https://arxiv.org/abs/2404.03763.

非線形修正された等高面方程式の数学解析

曽我 幸平 [1], Dieter Bothe[2], Mathis Fricke[2]
[1] 慶應義塾大学, [2]Technical University of Darmstadt
e-mail : soga@math.keio.ac.jp

本稿は論文 [1] の結果の紹介である．有界領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ が流体で充たされているとする．Lagrange 描写による流体粒子の位置を $X(t,\tau,\xi)$ と表す ($t\ge 0$: 観測時刻, $\tau\ge 0$: 初期時刻, $\xi\in\Omega$: 初期位置)．Euler 描写による流速場 v は,

$$v:[0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}^3,\quad v(t,x):=\frac{\partial}{\partial t}X(t,0,\xi)\Big|_{\xi=X(0,t,x)}$$

と定義される．X は常微分方程式 $x'(t)=v(t,x(t))$ の flow map に他ならない．各流体粒子に付随した $\mathbb{R}$-値の物理量 $F=F(t,\tau,\xi)$, $F(0,0,\xi)=\phi^0(\xi)$ が時間変化しないと仮定する:

$$\frac{d}{dt}F(t,0,\xi)=0\ \ (\Leftrightarrow F(t,0,\xi)=\phi^0(\xi))\quad(\forall\,t\ge 0,\,\forall\,\xi\in\Omega). \tag{1}$$

F の Euler 描写は $f(t,x):=F(t,0,\xi)|_{\xi=X(0,t,x)}$ である．(1) を f で表示すると,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)+v(t,x)\cdot\nabla f(t,x)=0\quad\text{in }(0,\infty)\times\Omega,\\ f(0,\cdot)=\phi^0\quad\text{on }\Omega\end{cases} \tag{2}$$

となる．(1),(2) に従う時間発展を「単純移流」という．(2) の古典解は $f(t,x)=\phi^0(X(0,t,x))$ である．流体運動の基礎方程式系は v に対する Navier-Stokes 型方程式と (2) の連立になり得るが，本稿では滑らかな $v:[0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}^3$ が存在すると仮定して，その単純移流についてのみ議論する．

水と油のように混ざらない 2 種の流体 $^\pm$ が $t=0$ において Ω の部分領域 $\Omega^\pm(0)$ を充たしている状況を考える．ただし, $\Omega^+(0)\subsetneq\Omega$, $\partial\Omega^+(0)\cap\partial\Omega=\emptyset$, $\Omega^-(0):=\Omega\setminus\overline{\Omega^+(0)}$, $\Sigma(0):=\partial\Omega^+(0)$ とする．各 $t\ge 0$ に対して $\Omega^\pm(t):=X(t,0,\Omega^\pm(0))$ のそれぞれが流体 $^\pm$ のみで充たされているとき「流体 $^\pm$ は物質界面 $\Sigma(t):=\partial\Omega^+(t)=X(t,0,\Sigma(0))$ を形成する」という．$\phi^0(\xi)>0$ $(\forall\xi\in\Omega^+(0))$, $\phi^0(\xi)<0$ $(\forall\xi\in\Omega^-(0))$, $\phi^0(\xi)=0$ $(\forall\xi\in\Sigma(0))$ を満たす関数 ϕ^0 によって $\Omega^\pm(0)$ に属す流体粒子にラベルを付け，各 $t\ge 0$ でのラベルの値を $F(t,0,\xi)$ と表す．F の Euler 描写を f と表す．F,f の時間発展が単純移流ならば，物質界面 $\Sigma(t)$ は $f(t,\cdot)$ の 0-等高面に一致する．このような文脈で現れる (2), f をそれぞれ「等高面方程式, 等高面関数」という．$\Sigma(t)$ の外向き ($\Omega^-(t)$ への向き) 単位法線ベクトル場 $\nu(t,x)$ と $\nu(t,x)$ に関する平均曲率場 $\kappa(t,x)$ は $\nu(t,x)=-\nabla f(t,x)|\nabla f(t,x)|^{-1}$, $\kappa(t,x)=-\nabla\cdot\nu(t,x)$ $(x\in\Sigma(t))$ となる．これらの表示公式は等高面法で重要な役割を果たす．

計算機流体力学で等高面法を取り扱う際，計算精度との関連で, $|\nabla f(t,x)|$ が界面上で極端に小さく/大きくなると都合が悪い．$|\nabla f(t,x)|$ の値が極端になると例えば ν,κ の近似精度が著しく悪くなる．(2) の解 f に対して，各特性曲線 $x(t):=X(t,0,\xi)$ に沿った $|\nabla f|$ の時間発展は,

$$\frac{d}{dt}|\nabla f(t,x(t))|^2=-2\langle\nabla v(t,x(t))\nabla f(t,x(t)),\nabla f(t,x(t))\rangle\qquad(\langle\cdot,\cdot\rangle\text{ は内積}) \tag{3}$$

となる．Roisman [2] は，(2) の代替として，(3) 右辺の効果を界面上で打ち消す方程式を提案した:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}(t,x)+v(t,x)\cdot\nabla\phi(t,x)=\phi(t,x)\Big\langle\nabla v(t,x)\dfrac{\nabla\phi(t,x)}{|\nabla\phi(t,x)|},\dfrac{\nabla\phi(t,x)}{|\nabla\phi(t,x)|}\Big\rangle,\\ \phi(0,\cdot)=\phi^0\quad(\nabla\phi^0|_{\Sigma(0)}\neq 0\text{ を仮定する}).\end{cases} \tag{4}$$

(4) の C^2 級解 ϕ が存在すると仮定して特性曲線の方法を援用すると，全ての $t \geq 0$ において $\phi(t,\cdot)$ の 0-等高面 $\Sigma^\phi(t)$ は $\Sigma(t)$ に一致し，$\Sigma^\phi(t)$ に値を取る (4) の特性曲線 $x(t)(\neq X(t,0,\xi)$ に注意) に沿って $|\nabla\phi(t,x(t))| = |\nabla\phi^0(x(0))|$ $(\forall\, t \geq 0)$ となることがわかる．しかし，(4) は完全非線型であるため，v, ϕ^0 がどれだけ滑らかであっても，ϕ は有限時刻で滑らかさを失い得る．(4) を粘性解クラスで解く場合は，Ω 全域で定義された時間大域解の存在が期待されるが，$\Sigma^\phi(t) = \Sigma(t)$ が成り立つかどうかは非自明であり，仮にそうだとしても $|\nabla\phi(t,x)|$ が意味を持つかどうかは非自明である．

本研究の目的は，(4) が計算機流体力学の要請に数学的に厳密に応え得る方程式かどうか調べることである．Hamamuki [3] は，$\mathbb{R}^n$ で定義された一般的な Hamilton-Jacobi 方程式の初期値問題に対して，(4) 第一式右辺と本質的に同等の非線型修正を加えた問題を連続な粘性解クラスで考察し，次のことを示した: 初期値が初期値の 0-等高面の符号付距離関数に (局所的に) 一致しているならば，修正された問題の粘性解の 0-等高面は修正前のものに一致し，さらに粘性解は 0-等高面の各点で微分可能であり，微分の大きさは 1 である．本稿では，流体力学が $\partial\Omega$ で要請する v に対する境界条件と v の適当な滑らかさを仮定した上で，問題 (4) の適切性を論じる．v の境界条件より「$\partial\Omega$ の X-不変性 (すなわち $X(t,0,\partial\Omega) = \partial\Omega$)」と「全ての $t \geq 0$ で $\Sigma(t)$ は $\partial\Omega$ に触れないこと」が従う．

主結果 1 ([1]). $\Gamma_0 := \cup_{t\geq 0}(\{t\} \times \Sigma(t))$ の近傍 $|_{t\geq 0}$ で定義された (4) の C^2 級解 ϕ が一意的に存在して，$\Sigma^\phi(t) = \Sigma(t)$ および $|\nabla\phi(t,x)| = |\nabla\phi^0({}^{\exists !}\xi)|$ $(\forall\,(t,x) \in \Gamma_0)$ が成り立つ．

Γ_0 上で $|\nabla\phi| \neq 0$ となるので，(4) にある $\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ から特異性は生じないことに注意する．粘性解クラスで (4) を Ω 全域で考察するに先立ち，$\frac{p}{|p|}$ の特異性と $\partial\Omega$ 近傍における非線型性を除去する: $\eta(t,x,r)$ を適当な cut-off 関数として $\eta(t,x,|\nabla\phi|)$ を (4) 第一式右辺に掛ける (修正後の問題を (4)' と表す)．この修正によって，粘性解に対する境界条件を $\phi(t,x) = \phi^0(X(0,t,x))$ $(\forall\,(t,x) \in [0,\infty) \times \partial\Omega)$ と設定することができる (これは，$\partial\Omega$ の X-不変性の下，(2) で自動的に満たされるものである)．主結果 1 で述べた解 ϕ の定義域では $\eta(t,x,|\nabla\phi|) \equiv 1$ となるよう設定できるので，ϕ は (4)' を満たす．

主結果 2 ([1]). $[0,\infty) \times \Omega$ で定義された (4)' の C^0 級粘性解 $\tilde{\phi}$ が一意的に存在して，$\Sigma^{\tilde{\phi}}(t) = \Sigma(t)$ が成り立ち，さらに Γ_0 の近傍 $|_{t\geq 0}$ で $\tilde{\phi} = \phi$(=主結果 1 の C^2 級解) となる．

主結果 1 は，特性曲線の方法によって小さな時間幅で古典解を構成する操作を無限回繰り返すことで証明される．小さな時間幅は $\Sigma^\phi(t)$ における $|\nabla\phi(t,x)|$ の上限・下限に依存するが，これらは t に依存しないことが示されるので，時間大域解が構成できる．ただし毎回のステップで解の定義域を空間変数に関して縮ませる必要がある．主結果 2 については，標準的な Perron の方法で連続粘性解の存在を示し，局所比較原理の証明のアイデアを応用することで古典解との局所的一致を示す．

参考文献

[1] D. Bothe, M. Fricke and K. Soga, Mathematical analysis of modified level-set equations, Mathematische Annalen (2024). https://doi.org/10.1007/s00208-024-02868-y

[2] I. Roisman, Implicit surface method for numerical simulations of moving interfaces, a talk given at the international workshop on Transport Processes at Fluidic Interfaces – from Experimental to Mathematical Analysis, Aachen, Germany, December 2011.

[3] N. Hamamuki, An improvement of level set equations via approximation of a distance function, Applicable Analysis **98** (2019), no 10, pp. 1901-1915.

空間不均一な拡散を持つ非線形 Fokker-Planck 方程式の自由エネルギーの長時間挙動

荒木 康太 [1], 水野 将司 [2]
[1] 日本大学大学院理工学研究科，[2] 日本大学理工学部
e-mail : csku24001@g.nihon-u.ac.jp

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかな境界を持つ有界な凸領域とする．$D \in C^2(\overline{\Omega})$ を Ω 上の正値関数，$\phi \in C^2(\overline{\Omega})$ を Ω 上の関数，$\alpha > 1$ を定数として，以下の非線形 Fokker-Planck 方程式のノイマン問題を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} - \operatorname{div}(f\nabla(\alpha D(x) f^{\alpha-1} + \phi(x))) = 0, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ f(x,0) = f_0(x), & x \in \Omega, \\ f\nabla(\alpha D(x) f^{\alpha-1} + \phi(x)) \cdot \nu = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{NFP}$$

ここで,ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルとする．f_0 は $\overline{\Omega}$ 上の与えられた正値関数で $\|f_0\|_{L^1(\Omega)} = 1$ をみたすものとする．f は $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$ 上の未知関数である．この問題は [1] で提唱した，結晶粒界の確率モデルに関係がある．空間非一様な温度分布を考えるのであれば，拡散係数 D は関数であるべきである．本研究は，数理モデルに絶対温度を状態変数に組み込んだ問題の数学解析の基礎になると考えられる．そこで，本研究では (NFP) の解の長時間挙動を考察する．

(NFP) はエネルギー則を持つ．実際，自由エネルギー $F[f](t)$ を

$$F[f](t) := \int_\Omega (D(x) f^\alpha(x,t) + f(x,t)\phi(x))\,dx \tag{1}$$

で定めるとき，(NFP) の正値古典解 f と $T > 0$ に対して，次のエネルギー則

$$F[f](T) + \int_0^T \int_\Omega |\nabla\mu(x,t)|^2 f(x,t)\,dx\,dt = F[f](0) \tag{2}$$

を満たす．ただし，$\mu(x,t) := \alpha D(x) f^{\alpha-1} + \phi(x)$ である．これより，$F[f](0) < \infty$ であれば，ある単調増加な点列 $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ が存在して

$$t_j \to \infty, \quad \int_\Omega |\nabla\mu(x,t_j)|^2 f(x,t_j)\,dx \to 0 \quad (j \to \infty) \tag{3}$$

が成り立つ．そこで，(NFP) の解の長時間挙動として，(3) での部分列をとらない収束

$$\int_\Omega |\nabla\mu(x,t)|^2 f(x,t)\,dx \to 0 \quad (t \to \infty) \tag{4}$$

を考察する．

$D = D(x)$ が定数のときは，多孔質媒質型の非線形拡散を持つ Fokker-Planck 方程式として，多くの研究がある．ϕ が強凸関数のとき，[2, 3] のエントロピー消散法によれば (4) の指数オーダーでの収束並びに f が L^1 ノルムでの長時間挙動が研究されている．他方，$D = D(x)$ が x の関数となるとき，[4, 5] では線形拡散，すなわち (NFP) で $f^{\alpha-1}$ を $\log f$ に変えた方程式に周期境界条件を課した問題の解の長時間挙動を考察し，(4) が指数オーダーで収束するための十分条件を導出している．本研究では $\alpha > 1$，すなわち，多孔質媒質型の非線形拡散において (4) が指数オーダーで収束するための D の条件を f が (NFP) の古典解であるときに導出した．

定理 1. $n = 1, 2, 3$ とし，ある正の定数 $\lambda > 0$ が存在して，$\nabla^2\phi \geq \lambda I$ が成り立つとする．ここで I は単位行列である．$\alpha D(x) f_0^{\alpha-1}(x) > \max_{y\in\overline{\Omega}} \phi(y) - \phi(x)$ が成り立つとする．f を (NFP) の時間大域的古典解とする．このとき，ある正の定数 C_1, C_2, $C_3 > 0$ が存在して，以下が成り立つ: すべての $x \in \overline{\Omega}$ に対して $D(x) \geq C_1$ かつ

$$\int_\Omega |\nabla(\alpha D(x) f_0^{\alpha-1}(x) + \phi(x))|^2 f_0(x)\, dx \leq C_2 \tag{5}$$

が成り立つならば，

$$\int_\Omega |\nabla\mu(x,t)|^2 f(x,t)\, dx \leq C_3 e^{-\lambda t}, \quad t > 0 \tag{6}$$

が成り立つ．ここで C_1，C_2，C_3 は n，λ，Ω，α，$\|\nabla D\|_{L^\infty(\Omega)}$，$\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\Omega)}$，$f_0$ にのみ依存する．

初期値に関する仮定 $\alpha D(x) f_0^{\alpha-1}(x) > \max_{y\in\overline{\Omega}} \phi(y) - \phi(x)$ は解の正値性を保証するために課したものである．この仮定のもとで，μ についての最大値原理

$$\inf_{x\in\Omega} \mu(x,0) \leq \mu(x,t) \leq \sup_{x\in\Omega} \mu(x,0) \tag{7}$$

を示すことができる．したがって f の正値性，有界性が成り立つ．(6) を証明するために，(2) から

$$\frac{d}{dt} F[f](t) = -\int_\Omega |\nabla\mu(x,t)|^2 f(x,t)\, dx$$

となることに注意して，F の t での 2 階導関数を計算する．Jüngel [3] による，エントロピー消散法の解析手法に倣うと，D が x の関数であることから，

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} F[f](t) \geq 2\int_\Omega (\nabla\mu \cdot \nabla^2\phi \nabla\mu) f\, dx + 2(\alpha-1)\int_\Omega D(x)|\nabla^2\mu|^2 f^\alpha\, dx \\ + 2(\alpha-1)^2 \int_\Omega D(x)(\Delta\mu)^2 f^\alpha\, dx - \int_\Omega G(\nabla D)\, dx\end{aligned} \tag{8}$$

とできる．ここで，$G(\nabla D)$ は ∇D に依存するが，D に依存しない．$D(x)/C_1 \geq 1$ に注意すると，十分大きな C_1 をとることで，$G(\nabla D)$ の積分を (8) の右辺の他の項で評価できる．従って，Gronwall の定理により，$-\frac{d}{dt}F[f](t)$ に対する指数減数評価 (6) が得られる．次元に関する仮定は $G(\nabla D)$ に $|\nabla\mu|^3$ を含む項があること，その積分を (8) の右辺第 2 項で評価するために与えたものである．

謝辞　本研究は JSPS 科研費 JP22K03376 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Epshteyn, Y., Liu, C., and Mizuno, M., Math. Models Methods Appl. Sci. **32**(2022), 2189–2236.

[2] Carrillo, J. A., Jüngel, A., Markowich, P. A., Toscani, G., and Unterreiter, A., Monatsh. Math., **133**(2001), 1–82.

[3] Jüngel, A., *Entropy methods for diffusive partial differential equations*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, 2016.

[4] Epshteyn, Y., Liu, C., Liu, C., and Mizuno, M., Anal. Appl. **20**(2022), 1295–1356.

[5] Epshteyn, Y., Liu, C., and Mizuno, M., preprint, arXiv:2404.05157.

動的境界条件により濾過を表す偏微分方程式モデルの数学的物理的側面について

古川　賢 [1]
[1] 富山大学学術研究部理学系
e-mail：furukawa@sci.u-toyama.ac.jp

1　概要

本公演ではアクアリウムの生態系を表現する偏微分方程式系について紹介する．境界条件はディリクレ，ノイマン，ロビン境界条件を用いるのが自然であるが，今回の偏微分方程式系は濾過現象を表現するためにディリクレ-ノイマン境界条件と周期境界条件の中間的な境界条件を用いて，それを第4種境界条件とよぶ．モデルは移流拡散，動的境界条件，第4種境界条件からなる偏微分方程式系であり，次で与えられる．

$$
\begin{aligned}
&\partial_t v_1 - \nu_1 \partial_x^2 v_1 + c(\sigma_1)\partial_x v_1 = -\frac{R_1 v_1}{A+v_1} v_2 + f, && x \in I, t>0,\\
&\partial_t v_2 - \nu_2 \partial_x^2 v_2 + c(\sigma_1)\partial_x v_2 = \left(\frac{R_2 v_1}{A+v_1} - \frac{v_2}{C_v}\right) v_2, && x \in I, t>0,\\
&B_1(\theta(\sigma_1); v_1) = 0, \quad B_2(\theta(\sigma_1); v_1) = 0, && x \in \partial I, t>0,\\
&B_1(\theta(\sigma_1); v_2) = 0, \quad B_2(\theta(\sigma_1); v_2) = 0, && x \in \partial I, t>0,\\
&\frac{d\sigma_1}{dt} = -\frac{S_1\sigma_1}{B+\sigma_1}\sigma_2 + c(\sigma_1)\theta(\sigma_1)\gamma_+ v_1, && t>0,\\
&\frac{d\sigma_2}{dt} = \left(\frac{S_2\sigma_1}{B+\sigma_1} - \frac{\sigma_2}{C_\sigma}\right)\sigma_2 + c(\sigma_1)\theta(\sigma_1)\gamma_+ v_2, && t>0,\\
&c = P(\sigma_1), && t>0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで B_1, B_2 は境界作用素であり，次で定義される．

$$
B_1(\theta; u) = (1-\theta)\gamma_+ u - \gamma_- u, \tag{2}
$$

$$
B_2(\theta; u) = \gamma_+ \partial_x u - (1-\theta)\gamma_- \partial_x u. \tag{3}
$$

ここで，$\gamma_\pm$ はそれぞれ境界 $\{x = \pm 1\}$ へのトレース作用素である．領域を $I = (-1, 0)$ とし，v_j と σ_j はそれぞれ領域 I 上の未知数と境界 $\partial I = \{\pm 1\}$ 上の未知数，A，B，R_j，S_j，C_v，C_σ は正の定数である．関数 $\theta = \theta(\sigma_1)$ はフィルターの濾過効率であり，$\theta \in (0, 1]$ を満たすものとし，流速 $c = c(\sigma_1) > 0$ は θ に比例するとする．非線形項は被食者捕食者関係で与えた．未知関数 v_1 と σ_1 は有機物を表し，v_2 と σ_2 はバクテリアを表す．前者は被食者であり，後者が捕食者に対応する．

領域 I は流体で満たされている水槽と考える．有機物は自己増殖せずバクテリアに一方的に捕食されるが，外力による供給がある．バクテリアに対しては環境収容力が存在し，有機物には存在しない．なお，領域内と境界上での未知数はそれぞれ区別し，違うものと認識する．実際，$v_j(x,t)$ は (x,t) は時刻 t での x での水中の被食者捕食者量を表し，$\sigma_j(t)$ は時刻 t までで濾過フィルタに存在する被食者捕食者量を表す．したがって，v_j のトレースは必ずしも σ_j とは一致しない．境界上には濾過フィルターが存在して，水を右境界から吸引し，左境界から同量を放出すると考える境界条件は $B_j(\theta; v) = 0$ は，ある割合 $\theta(\sigma_1) \in (0, 1]$ で有機物 v_1 とバクテリア v_2 が境界上 (濾過フィルター内)

に吸着され，残りが水と共に領域 (水槽) 内に戻されることで水の循環が生まれ，濾過が行われることを意味する．吸着された有機物 v_1 とバクテリア v_2 は，動的境界条件を通して σ_1 と σ_2 の式に足し込まれる．領域内と境界上の有機物とバクテリアはそれぞれ被食者捕食者関係が成り立ち，有機物は自己増殖せず，また，バクテリアの環境収容力には限界がある．領域内には有機物の投下に対応する外力 f を与える．

2 主結果

本公演ではこのようなモデル (1) に対して，解の一意存在性 (適切性) といくつかの数値計算の結果を紹介することでこの方程式が数理物理的に濾過を表現することができていることを実証する．境界上でバクテリアが蓄積することによる自由境界問題への発展も若干触れる．L^2 をルベーグ空間，H^m は m 次ソボレフ空間，BC は有界な連続関数のなす空間とする．$Q_T = I \times (0,T)$ とする．

定理 1 $T > 0$ とし，初期値 v_{j0} と σ_{j0} と正の外力 $f \in C([0,T); BC(I))$ を，

$$\begin{aligned}
&f \in H_t^2 L_x^2(Q_T) \cap H_t^1 H_x^2(Q_T) \\
&\quad \cap C([0,T); H^3(I)) \cap C^1(0,T; H^1(I)) \\
&v_{j,0} \in H^3(I), v_{j,0} \geq 0, \\
&\sigma_{j,0} > 0
\end{aligned}$$

を満たすものとする．フィルターの濾過効率 θ を定数 $\beta > 0$ に対して

$$\theta = \theta(\sigma_1) = \frac{1}{1 + \beta\sigma_1}$$

とする．この時，$(v_{1,0}, v_{2,0}, \sigma_{1,0}, \sigma_{2,0})$ を初期値とする (1) の解 $(v_1, v_2, \sigma_1, \sigma_2)$ が存在し，次を満たす．

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1,2} (&\|v_j(t)\|^2_{H_t^2 L_x^2(Q_T)} + \|v_j(t)\|^2_{H_t^1 H_x^2(Q_T)} + \|v_j(t)\|^2_{L_t^2 H_x^4(Q_T)} \\
&+ \sup_{0<t<T} \|v_j(t)\|^2_{H^3(I)} + \sup_{0<t<T} \|\partial_t u_j(t)\|^2_{H^1(I)}) \leq C,
\end{aligned} \tag{4}$$

及び，

$$\sum_{j=1,2} (\sup_{0<t<T} |\sigma_j(t)| + \sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{4}-\delta} |\sigma_j'(t)| \sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}-\delta} |\sigma_j''(t)|) \leq C. \tag{5}$$

ここで，$\delta > 0$ は十分小さい定数とし，$C > 0$ は初期値，外力，θ に依存する定数である．

謝辞 本研究は科研費若手研究 (No. 22K13948) の助成を受けたものである．

参考文献

[1] K. Furukawa, H. Kitahata, Modeling and Mathematical Analysis of the Clogging Phenomenon in Filtration Filters Installed in Aquaria, preprint, arXiv:2401.11260.

