

細胞運動における流体構造連成問題の数理

石本 健太¹¹ 京都大学数理解析研究所

e-mail : ishimoto@kurims.kyoto-u.ac.jp

1 はじめに

バクテリアやプランクトンなどの細胞スケールの生物の流体中の運動を考える．この系は，周囲の流体の運動，細胞自身の弾性応答，そして細胞内部の駆動力の連成問題になっている [1]．

2 細胞運動の流体力学

空間中に物体が一つある状況を考え，流体領域を $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ とする．細胞スケールの微小物体周りの流体の運動は低レイノルズ数のストークス方程式

$$\nabla \cdot \sigma = 0, \nabla \cdot u = 0. \quad (1)$$

で記述される． u は速度場， σ は応力テンソルで，圧力 p と歪み速度テンソル e を用いて $\sigma = -pI + 2e$ で与えられる． I は恒等テンソルである．物体に働く力とトルクは，微小流体では釣り合いの式が成り立っている．重力の効果を見捨てる，物体表面を S とすれば，

$$\int_S \sigma \cdot n \, dS = \int_S (x - x_0) \times \sigma \cdot n \, dS = 0 \quad (2)$$

と書ける． x_0 は空間中に固定された点の座標である．これを境界 $\partial\Omega$ での粘着境界条件（Dirichlet 境界条件）の元で解くことで，流体中での微小物体の挙動が分かる．一般には，物体の形状は時間変化する．これは，微生物のように自己変形して流体中を推進する物体に対応する．

ここで，物体の位置と向きは，空間に固定された座標系と，物体とともに移動する座標系の間の変換 $g \in \text{SE}(3)$ で与えられる． $\text{SE}(3)$ は 3 次特殊ユークリッド群で，並進と回転から生成される．「形状」とは，物体表面 S から，この回転と並進の自由度を除いたものである．これより「形状」の時間変化を既知関数としてこちらから与えると， u の S での境界条件 $u = v$ が得られる．ただし， v は物体表面の速度で，並進速度，回転速度，変形速度の 3 つ速度の和になっている．

ストークス方程式は線形の偏微分方程式で，境界での値が与えられると解が一意に定まる境界値問題になっている．式 (1)-(2) を解くことで，物体の並進速度と回転速度が求められる．得られた時間発展方程式は物体の運動方程式に対応しており，境界の形状のみの関数である抵抗テンソルを用いて形式的に表示することができる [2]．境界 S の形状を表すパラメータを s とすると，物体座標系での並進と回転の速度 $v_b = g^{-1}\dot{g}$ は，

$$v_b = A(s)\dot{s} \quad (3)$$

の形で与えられる． $A(s)$ は主ファイバー束上の接続の構造を有しており，しばしばストークス接続と呼ばれる [3]．ストークス流れでなくても式 (3) と同じ微分幾何学的な記述が可能な場合がある．実際，微生物に代表される細胞スケールの遊泳に限らず，砂や泥の中の運動や，摩擦の大きな環境での這行や歩行といった，強い散逸系で成り立つことが実験的に知られている [4]．逆に，流体に運動量が奪われる系では成り立たず，魚・昆虫・鳥といった生き物の流体中の遊泳・飛翔には適用できない．

3 細胞運動の流体構造連成問題

物体の弾性応答を考慮する場合には、形状は未知関数であり、流体と物体の間の力とトルクの釣り合いを満たすように同時に定める必要がある。また、物体の構成方程式が必要となる。さらに、物体を駆動させるための内力（あるいは外力）が必要となり、一般に非自励系の力学系となる。

本研究では、このようなアクティブな系の流体構造連成問題を統一的に記述するために、エネルギー保存則を破るような弾性応答の拡張として、非相反バネによる弾性体記述を考え [5, 6]、バネの変位 $\xi(x)$ と弾性力 $f(x)$ の関係が、

$$f(x) = - \int_B K(x, x') \cdot \xi(x') dx' \quad (4)$$

のように与えられているとする。 B は物体領域を指す。ここで、 $K(x, x')$ は対称性を仮定しない。特に、 $K(x, x')$ が対称でない場合には、奇弾性 (odd elasticity) と呼び、保存形で記述できないような内力を記述することができる。

講演では、実際の細胞遊泳のデータを用いて、この奇弾性体記述によって時間周期的な細胞遊泳の記述が可能であることを議論する予定である。

謝辞 本講演の一部は安田健人氏（京大数理研）、Clément Moreau 氏（CNRS/LS2N）との共同研究に基づく。JST 創発的研究支援事業（JPMJFR212N）、科研費・学術変革領域（A）（21H05309）の支援を受けた。

参考文献

- [1] 石本健太, 細胞遊泳から始める「生き物」の力学, 日本物理学会誌, to appear.
- [2] 石本健太, 微生物流体力学: 生き物の運動・形・流れを探る, サイエンス社 (2022).
- [3] A. Shapere and F. Wilczek, Geometry of self-propulsion at low Reynolds number, J. Fluid Mech., 198 (1987) 557-585.
- [4] D. Zhao, B. Bittner, G. Clifton, N. Gravish, S. Reven, Walking is like slithering: A unifying, data-driven view of locomotion, PNAS, 119 (2022) e2113222119.
- [5] K. Ishimoto, C. Moreau, K. Yasuda, Self-organized swimming with odd elasticity, Phys. Rev. E, 105 (2022) 064603.
- [6] K. Ishimoto, C. Moreau, K. Yasuda, Odd elastohydrodynamics: Non-reciprocal living material in a viscous fluid, PRX Life, 1 (2023) 023002.

細胞性粘菌の走気性の観察とモデル化

船本 健一¹, 廣瀬 理美¹, Ghazi Nasser², Rieu Jean-Paul²

¹東北大学, ²リヨン第一大学

e-mail: funamoto@tohoku.ac.jp

1 緒言

生体内では細胞活動により酸素が消費されるため、生体内の酸素濃度は大気中と比較して低く、時間的・空間的にも変化する。このような生体内の不均一な酸素濃度分布は、様々な生理現象や疾患に関わる細胞群の動態に影響を与えるが、その詳細については不明な点が多く残されている。細胞性粘菌の一種である *Dictyostelium Discoideum* は周囲の環境を感知して遊走する走性を有し、真核細胞のモデル生物として広く研究に用いられてきた。近年、細胞性粘菌は、代謝に伴う酸素消費によって自己生成した酸素濃度勾配に応じ、酸素のより豊富な領域に向かって長期的かつ安定的にリング形状を形成しながら集団的に遊走することが発見された[1]。このような細胞性粘菌の走気性の機序を解明するは、生物種・細胞種間の走気性の普遍性と特異性を明確化し、細胞応答の本質の解明につながることを期待される。本研究では、酸素濃度制御マイクロ流体デバイスを用いて酸素濃度勾配を生成し、細胞性粘菌の走気性を観察するとともに、その数理モデルの構築について検討した。

2 方法

本研究で用いた酸素濃度制御マイクロ流体デバイスには、複数回・複数条件の実験を同時に行えるように、細胞培養を行う3本のメディア流路(幅2 mm, 2 mm 間隔)を底面に配置し、その鉛直上方の底面から0.5 mmの位置に2本のガス流路(幅2 mm, 1 mm 間隔)を直交するように設けた(図1)。デバイスのサイズは30 mm 四方, 高さ4 mm であり、いずれの流路の高さも150 μm である。ガス流路に酸素濃度を調整した混合ガスを供給し、流路間でガス交換を行うことにより、メディア流路内の細胞培養液中の酸素濃度を制御できる。本デバイスの作製では、ポリジメチルシロキサン(PDMS)に流路パターンを転写し、カバーガラスを接着させることで流路を形成した。ここで、PDMSはガス透過性が高く、周囲の環境から自然拡散により流入する酸素がデバイス内の酸素濃度の制御性能を低下させることを防ぐため、ガス透過性の低いポリカーボネートフィルム(25 mm×20 mm×0.5 mm)を底面から1 mmの位置に内包させた。左右のガス流路にそれぞれ酸素濃度0%および21%の混合ガスを供給した場合、メディア流路に沿って酸素濃度0.4%から21%の酸素濃度勾配を生成することができた[2]。

デバイス内のメディア流路に、HL5培地を用いて培養した *Dictyostelium Discoideum* (AX2株)のアメーバ細胞を 2×10^6 個/mL (400 個/ mm^2)の密度で播種し、15分間以上静置して底面に接着させた。その後、酸素濃度勾配を生成し、細胞の挙動のタイムラプス観察を行った[2]。実験は22°Cの室内にて行った。ガス流路に混合ガスを供給し、30 s毎に取得した位相差顕微鏡画像に対し、画像解析ソフトウェアImageJを用いて各画像中の細胞の位置を検出し、MATLABを用いた二乗変位最小化アルゴリズムにより細胞の遊走を追跡した。さらに、細胞性粘菌の走気性を記述する数理モデルを構築した[1, 3]。平均場の反応拡散モデルにより細胞密度と酸素濃度の時間変化をそれぞれ記述し、細胞密度の式には細胞の増殖率を加味する項を付与し、酸素濃度の式には細胞による酸素消費量と走気性による遊走を加味する項を付与した。それらの式における各パラメータの値は、実験データに基づいて決定した。

3 結果および考察

細胞性粘菌は酸素濃度 2%未満の環境で遊走を活発化させ、酸素を求めて遊走する走気性を示した (図 1(a)). この走気性は、遊走頻度の増加、遊走速度の上昇、直進性の促進により生じることがわかった[2]. さらに、酸素濃度勾配に沿う方向の遊走速度を遊走の速さで除して求めた走気性指標 AI の変化と、酸素濃度勾配 ∇c を酸素濃度 c の値で除して求めた相対勾配 $\nabla c/c$ の変化は類似しており、両者の関係性が示唆された (図 1(b)). そこで、数理モデルにおいて、酸素濃度 2%未満の環境下で細胞が酸素濃度の相対勾配に応じて高酸素側に遊走することを表す項を付与した. 細胞性粘菌の凝集塊にカバーガラスを被せることで、低酸素環境を自己生成させる閉じ込めスポットアッセイを題材に検討を行った結果、数理モデルにより実験における観察結果を良好に再現することができた (図 1(c)) [3].

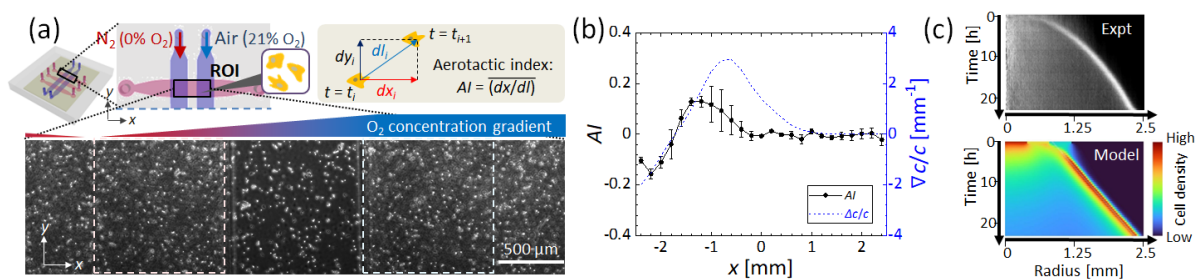


図 1 細胞性粘菌の走気性: (a) 酸素濃度制御マイクロ流体デバイスを用いた顕微鏡観察結果, (b) 走気性指標と相対濃度勾配の比較, (c) 閉じ込めスポットアッセイの実験結果と数理モデルによる解析結果の比較.

4 結言

細胞性粘菌の走気性について、酸素濃度制御マイクロ流体デバイスを用いて観察を行い、細胞性粘菌は酸素濃度 2%未満の環境で酸素濃度勾配に応じて高酸素側に遊走することがわかった. また、細胞密度と酸素濃度の時間変化を表す反応拡散の式に実験データに基づく項を付与した数理モデルを構築し、走気性による細胞密度の変化を再現することができた.

謝辞 本研究は、JST さきがけ JPMJPR2208 の支援を受けたものである.

参考文献

- [1] O. Cochet-Escartin, M. Demircigil, S. Hirose, B. Allais, P. Gonzalo, I. Mikaelian, K. Funamoto, C. Anjard, V. Calvez and J.-P. Rieu, Hypoxia triggers collective aerotactic migration in *Dictyostelium discoideum*, eLife, Vol. 10, (2021), e64731.
- [2] S. Hirose, J.-P. Rieu, O. Cochet-Escartin, C. Anjard and K. Funamoto, The oxygen gradient in hypoxic conditions enhances and guides *Dictyostelium discoideum* migration, Processes, Vol. 10, No. 2, (2022), 318.
- [3] S. Hirose, J. Hesnard, N. Ghazi, D. Roussel, Y. Voituron, O. Cochet-Escartin, J.-P. Rieu, C. Anjard and K. Funamoto, The aerotaxis of *Dictyostelium discoideum* is independent of mitochondria, nitric oxide and oxidative stress, Frontiers in Cell and Developmental Biology, Vol. 11, (2023), 1134011.

単一測定を用いた非凸境界インターフェースを持つ拡散光トモグラフィにおけるパラメータ同定問題のための数値形状最適化手法

Julius Fergy Rabago¹, 野津裕史²

金沢大学数物科学系 (〒920-1192 金沢市角間町)

e-mail : ¹rabagojft@se.kanazawa-u.ac.jp, ²notsu@se.kanazawa-u.ac.jp

1 拡散光トモグラフィ

この研究では、リプシッツ境界を持つ有界領域における拡散光伝搬モデルを検討し、拡散係数が既知であると仮定して、境界測定から吸収係数を再構築することに焦点を当てる。定常状態の拡散光トモグラフィでは、光の伝搬は拡散近似によりモデル化され、以下の偏微分方程式 (PDE) 系により表される (例えば [NW01] 参照) :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha(x)\nabla u(x)) + \mu_a(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (d \in \{2, 3\}), \\ \alpha(x)\partial_n u(x) + \frac{1}{\zeta}u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\zeta > 0$ 、 ∂_n は $\partial\Omega$ 上の外向き法線単位ベクトル n に関する方向微分、 α は拡散係数、 μ_a は吸収係数、 $f > 0$ はソース項を示す。

2 吸収係数の復元

議論を簡略化するために、以下の仮定を行う:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 、 $d \in \{2, 3\}$ はクラス $C^{1,1}$ の有界領域であり、 $f \in H^1(\Omega)$ 。
- Ω には、PDE 系の係数の有限ジャンプによって特徴づけられる滑らかな部分領域 $\omega \Subset \Omega$ が含まれ、 $\Omega \setminus \bar{\omega}$ は連結である。
- $A := \{\mu \in L_+^\infty(\Omega) \mid \mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max}\}$ と定義し、 $A \ni \mu_a = \mu_0 + \mu_1 \chi_\omega \geq \exists \mu^\circ > 0$ と仮定する。ここで、 $\mu_0, \mu_1 \in C^1(\bar{\Omega})$ であり、また、 χ_ω は ω の特性関数を表す。

これらの仮定の下で、各 $\mu \in A$ に対して、(1) の対応する変分定式化は適切である。また、関数 $F: A \rightarrow V$ ($A \ni \mu \mapsto F(\mu) = u \in V$) は μ に関して連続かつ微分可能である。以降では、 μ_a における \cdot_a を省略し、境界データからの再構築を扱う。ディリクレ測定値 $h = u|_{\partial\Omega}$ とし、 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は (1) を満たすとする。

問題 2.1 (吸収係数の復元). $\alpha, \zeta \in \mathbb{R}^+$ および f が与えられたとき、 $\mu \in A$ および $\partial\Omega$ 上で $u = h$ となる (1) の解 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ。

問題 2.1を解くために、許容吸収係数のファミリーを制限し、以下の正則化された最小化問題を考える。

問題 2.2. ある $B \subset A$ に対して、 $\mu_\rho = \inf_{\mu \in B} \left\{ J_\rho(\mu) := J(\mu) + \frac{\rho}{2} \|\mu\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}$ を満たす μ_ρ を求めよ。

命題 2.3. B が A の有限次元閉凸部分集合であり、 $\rho > \rho_0$ (ここで $\rho_0 := \rho_0(\alpha, \mu_{\min}, f)$ は正の定数) であるとする。このとき、問題 2.2には一意の解 $\mu_\rho \in B$ が存在し、 μ_ρ は全てのデータに対して連続に依存する。さらに、 μ_ρ は次の不等式により特徴づけられる: $(-u\rho + \rho\mu_\rho, \delta\mu - \mu_\rho)_\Omega \geq 0$ ($\forall \delta\mu \in B$)。

ここに、 $p = p(x; \mu_\rho) \in V$ は以下の PDE 系を満たす：

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha(x)\nabla p(x)) + \mu_\rho(x)p(x) = 0, & x \in \Omega, \\ \alpha(x)\partial_n p(x) + \frac{1}{\zeta}p(x) = u_\rho(x) - h(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

また、 $u_\rho = u_\rho(x) = u(x; \mu_\rho) = F(\mu_\rho) \in V$ は、 μ_a を μ_ρ に置き換えた (1) の解である。

$T_t := T_t(\theta) = \operatorname{id} + t\theta$, $\theta \in \Theta := \{\theta \in C^{1,1}(\mathbb{R}^d) \mid \operatorname{supp}(\theta) \subset \overline{\Omega}_o\}$ とする。ここに、 $\Omega_o := \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) \geq \exists \delta_o > 0\}$ は $t \in I \subset \mathbb{R}$ について $C^{1,1}$ -微分同相写像とする。

命題 2.4. 命題 2.3 の仮定が満たされるとする。また、 $\alpha, \zeta \in \mathbb{R}^+$ と $\Omega \in \mathcal{O}_{ad} = \{T_t(\theta)(\overline{\Omega}) \subset D \mid \Omega = D \setminus \overline{\omega} \in C^{1,1}, \overline{\omega} \subset \Omega_o, t \in I, \theta \in \Theta\}$ および $\theta \in \Theta$ を仮定する。このとき、 J は Ω で方向 θ に関して形状微分可能であり、その形状勾配は次式で与えられる：

$$dJ(\Omega)[\theta] = - \int_{\partial\omega} p\theta_n d\sigma. \quad (3)$$

ただし、 $p = p(x; \mu_\rho) \in V$ は (2) を満たす。

3 数値計算結果

ソボレフ勾配降下法 [RA20] を使用して数値計算を行った。図 1 は、非自明な凹型インターフェースと境界測定における異なるノイズレベルの場合の再構築結果で、単一測定を用いた提案手法の有効性を示している。

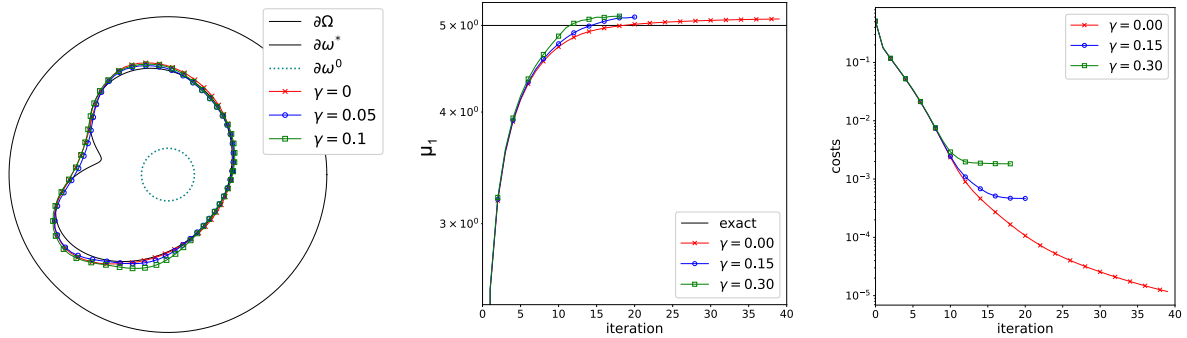


図 1. ピーナッツ形状の境界インターフェースをもつ例。 $\mu = \mu_0 + \mu_1 \chi_\omega$, $(\mu_0, \mu_1) = (0, 5)$, $f = 1$, ノイズレベルが $\gamma = 0, 0.05, 0.10$ の場合を示す。すべての場合で、 $\rho = 0.0001$ 。

謝辞 本研究は、JSPS 科研費 JP23K13012 および JST CREST JPMJCR2014 の支援を受けた。

参考文献

- [NW01] F. Natterer and F. Wübbeling. *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. Mathematical Modeling and Computation. SIAM, 2001.
- [RA20] J. F. T. Rabago and H. Azegami. A second-order shape optimization algorithm for solving the exterior Bernoulli free boundary problem using a new boundary cost functional. *Comput. Optim. Appl.*, 77(1):251–305, 2020.

Simulating reservoirs with information processing capabilities: numerical schemes and hardware optimization

Thomas Geert de Jong¹, Hirofumi Notsu¹, Kohei Nakajima²

¹Kanazawa University, ²The University of Tokyo
e-mail : tgdejong@se.kanazawa-u.ac.jp

Abstract

We provide high-speed implementations for simulating reservoirs described by N -coupled spin-torque oscillators. Here N also corresponds to the number of reservoir nodes. We benchmark a variety of implementations based on CPU and GPU. Our new methods are at least 2.6 times quicker than the baseline for N in range 1 to 10^4 .

1 Problem setting

With the recent advancements in machine learning, such as deep learning and generative models, the computational demands and associated energy costs have rapidly escalated [SGM19, TGLM20]. Consequently, there is an increasing emphasis on the development of more efficient computers to perform machine learning tasks. Computers that emulate neural networks in hardware are referred to as neuromorphic devices and have garnered attention as next-generation efficient computers. Physical reservoir computing is one of the major frameworks implemented in neuromorphic devices, which exploits the dynamics of optic, quantum, and spintronics systems [Nak20]. Their evolution is represented as a coupled network with a massive amount of nonlinear nodes called the *reservoir*. Only the readout part has to be trained for the learning task which makes it extremely computationally efficient. However, finding optimal physical parameters or number of nodes for the reservoir can be a time-consuming effort. In addition, the information processing capabilities of the reservoir increase generically with the size [DVSM12, KTN21]. Hence, to aid in this endeavour simulations of the reservoir are performed. But even in a virtual environment where we consider large number of nodes over a parameter space it becomes again a time-consuming effort. Although high speed implementations for toy reservoirs such as ESN exist [Sch18], we think that speeding up current simulators of physical reservoirs described by ODEs and PDEs would significantly contribute to the research community.

This study is done by example. Here we consider coupled spintronic devices. Spintronic devices exhibit excellent characteristics, making them promising candidates for neuromorphic computers, including high-speed dynamics, minute size, high energy efficiency, and durability against radiations [PW96, GP10, KK17, RTT⁺18, GQC⁺20]. A type of spintronic device known as a Spin-Torque Oscillator (STO) shows diverse dynamics, including periodic oscillation, and transitions between fixed points and chaos [TAN⁺19, AYT⁺20, KKT⁺21]. It has been reported that these dynamics can be directly harnessed as computational resources using physical reservoir computing schemes [TRAA⁺17, FFN⁺18, TTM⁺18, Nak20].

2 Results

In this talk we consider CPU and GPU implementations for simulating reservoirs given by N -coupled STOs [dJAT⁺23]. The GPU implementation is motivated by the fact that the coupling terms are of complexity $O(N^2)$ which can run quickly on GPUs due to their high performing parallelization ability. Each implementation is optimal in some N range. We show that the N used in the literature is sufficiently large that GPUs are quicker than CPUs. The methods

considered here are general and can be applied to any reservoir which can be approximated using an explicit method. This work is accompanied by a github repository with the benchmark code [Jon23].

謝辞 This research was supported by JST CREST Grant Number JPMJCR2014.

参考文献

- [AYT⁺20] N. Akashi, N. Yamaguchi, S. Tsunegi, T. Taniguchi, M. Nishida, R. Sakurai, Y. Wakao, and K. Nakajima. Input-driven bifurcations and information processing capacity in spintronics reservoirs. *Phys. Rev. Research*, 2:043303, 2020.
- [dJAT⁺23] T.G. de Jong, N. Akashi, T. Taniguchi, H. Notsu, and K. Nakajima. Virtual reservoir acceleration for cpu and gpu: Case study for coupled spin-torque oscillator reservoir. In *NeurIPS: ML with New Compute Paradigms Workshop*. NeurIPS, 2023.
- [DVSM12] J. Dambre, D. Verstraeten, B. Schrauwen, and S. Massar. Information processing capacity of dynamical systems. *Sci. Rep.*, 2:514, 2012.
- [FFN⁺18] T. Furuta, K. Fujii, K. Nakajima, S. Tsunegi, H. Kubota, Y. Suzuki, and S. Miwa. Macro-magnetic simulation for reservoir computing utilizing spin dynamics in magnetic tunnel junctions. *Physical Review Applied*, 10(3):034063, 2018.
- [GP10] S. Gerardin and A. Paccagnella. Present and future non-volatile memories for space. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 57(6):3016–3039, 2010.
- [GQC⁺20] J. Grollier, D. Querlioz, K. Camsari, K.Y. and Everschor-Sitte, S. Fukami, and M.D. Stiles. Neuromorphic spintronics. *Nat. Electron.*, 3:360–370, 2020.
- [Jon23] T.G. de Jong. Reservoir acceleration: High-speed reservoir computing. https://github.com/mathowl/reservoir_acceleration, 2023.
- [KK17] T.M. Kiwamu Kudo. Self-feedback electrically coupled spin-hall oscillator array for pattern-matching operation. *Applied Physics Express*, 10(4):043001, mar 2017.
- [KKT⁺21] A. Kamimaki, T. Kubota, S. Tsunegi, K. Nakajima, T. Taniguchi, J. Grollier, V. Cros, K. Yakushiji, A. Fukushima, S. Yuasa, and H. Kubota. Chaos in spin-torque oscillator with feedback circuit. *Phys. Rev. Research*, 3:04216, 2021.
- [KTN21] T. Kubota, H. Takahashi, and K. Nakajima. Unifying framework for information processing in stochastically driven dynamical systems. *Phys. Rev. Research*, 3:043135, 2021.
- [Nak20] K. Nakajima. Physical reservoir computing - an introductory perspective. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 59:060501, 2020.
- [PW96] F.W. Patten and S.A. Wolf. Overview of the darpa non-volatile magnetic memory program. In *Proceedings of Nonvolatile Memory Technology Conference*, pages 1–2, 1996.
- [RTT⁺18] M. Romera, P. Talatchian, S. Tsunegi, F. Abreu Araujo, V. Cros, P. Bortolotti, J. Trastoy, K. Yakushiji, A. Fukushima, H. Kubota, et al. Vowel recognition with four coupled spin-torque nano-oscillators. *Nature*, 563(7730):230–234, 2018.
- [Sch18] N. Schaetti. Echotorch: Reservoir computing with pytorch. <https://github.com/nschaetti/EchoTorch>, 2018.
- [SGM19] E. Strubell, A. Ganesh, and A. McCallum. Energy and policy considerations for deep learning in NLP. *CoRR*, abs/1906.02243, 2019.
- [TAN⁺19] T. Taniguchi, N. Akashi, H. Notsu, M. Kimura, H. Tsukahara, and K. Nakajima. Chaos in nanomagnet via feedback current. *Phys. Rev. B*, 100:174425, 2019.
- [TGLM20] N.C. Thompson, K. Greenewald, K. Lee, and G.F. Manso. The computational limits of deep learning. *arXiv preprint arXiv:2007.05558*, 2020.
- [TRAA⁺17] J. Torrejon, M. Riou, F. Abreu Araujo, S. Tsunegi, G. Khalsa, D. Querlioz, P. Bortolotti, V. Cros, K. Yakushiji, A. Fukushima, H. Kubota, S. Yuasa, M.D. Stiles, and J. Grollier. Neuromorphic computing with nanoscale spintronic oscillators. *Nature*, 547:428, 2017.
- [TTM⁺18] S. Tsunegi, T. Taniguchi, S. Miwa, K. Nakajima, K. Yakusjiji, A. Fukushima, S. Yuasa, and H. Kubota. Evaluation of memory capacity of spin torque oscillator for recurrent neural networks. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 57:120307, 2018.