

# 与えられた半順序に従った地図の折り畳み状態の存在性

賈 伊陽<sup>1</sup>, 三谷 純<sup>2</sup>

<sup>1</sup>日本女子大学, <sup>2</sup>筑波大学

e-mail: jiyay@fc.jwu.ac.jp

## 1 背景

地図折り問題とは、与えられた山谷割り当て付きの正方形格子パターンを折り畳むことが可能かを判定する問題である[1]。この問題の発展問題として、与えられた各面（各正方形）の順序を折り畳み状態の面の重なり順として、折り畳み状態の存在性を判定する問題があり、これを重なり順問題と呼ぶ。この発展問題に関して、「一般折り」、「単純折り」、および「単純折りと展開」の折り操作に対するそれぞれの制限の下、いずれも線形時間で解けるという結果が得られた[2]。本研究では、正方形の全順序の重なり順の代わりに、一部の正方形がなす半順序が与えられる前提で、対応する地図の折り畳み状態の存在性を判定する問題を検討する。

## 2 折り畳み状態行列

任意の折り畳み状態を二値行列で表現できる。ある折り畳み状態に対応する二値行列では、隣接する正方形の面の下から上への関係が 1 として記録され、それ以外の場合は 0 として記録される。さらに、折り畳み状態における各正方形の面の位置の上下関係の推移性により、この二値行列の冪和行列には、全ての「下から上への」位置関係が記録される。同様に、与えられた半順序に対応する二値行列とその冪和行列において、与えられた半順序に含まれる全ての隣接関係と上下位置関係が記録される。図 1 に、一例を示している。

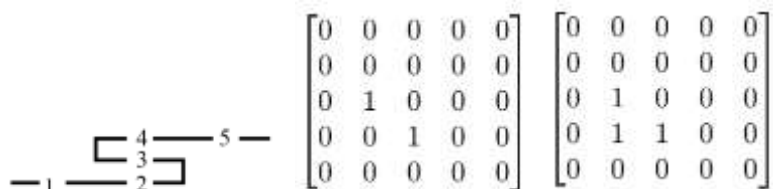


図 1. (部分的) 折り畳み状態(半順序  $2<3<4$ ), 対応する隣接行列, 冪和行列

正方形のペアの組  $\{(i, i+1), (j, j+1)\}$  が自己交差を起こすことは、必ず以下の四つのケースのどちらかになる。

- 1)  $i < j < i+1 < j+1$
- 2)  $j < i+1 < j+1 < i$
- 3)  $i+1 < j+1 < i < j$
- 4)  $j+1 < i < j < i+1$

対応する  $2 \times 2$  の部分行列の要素はそれぞれ  $(i, j)$ ,  $(i, j+1)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i+1, j+1)$  であるため、1 と 0 の数は必ず奇数となることが分かる。この事実に基づき、与えられた半順序に従った地図の折り畳み状態の存在性を調べることができる。調べる手順は以下の通りである。

- 1) 与えられた半順序に存在しない正方形にインデックスを付ける
- 2) 1) の正方形をインデックス順に、以下の操作を行う：
  - A) 与えられた半順序に存在する各正方形とのペアの組を全て見出す
  - B) 対応する行列の 0 と 1 の数を基に、現在の正方形の可能な重なり順での位置を決め

る；可能な位置がある場合，一つを選び，手順 C)に移る．可能な位置がない場合，インデックス順に，現在の正方形の前の正方形の次の可能な位置を調べて選ぶ．全ての正方形に次の可能な位置がない場合，与えられた半順序に従った地図の折り畳み状態が存在しないことを出力する

C) 1)の正方形をインデックス順に次の正方形に移り，手順 2)を繰り返す

3) 与えられた半順序に従った地図の折り畳み状態が存在する場合，得られた正方形の重なり順（全順序）を出力する

### 3 折り畳み状態に対応できない半順序の(再)発見

上記の行列表現を用いて，長さ 6 の切手折りの場合に，与えられた半順序 (6, 1, 5, 3, 4) に従った折り畳み状態が存在しないことが判明した（図 2）．

0	*	1	1	1	0
*	0	*	*	*	*
0	*	0	1	0	0
0	*	0	0	0	0
0	*	1	1	0	0
1	*	1	1	1	0

0	*	1	1	1	0
*	0	*	*	*	*
0	*	0	1	0	0
0	*	0	0	0	0
0	*	1	1	0	0
1	*	1	1	1	0

図 2. 冪和行列の  $2 \times 2$  の部分行列において、推移性を満たす 0 と 1 の数を偶数にする割り当ては存在しないため、与えられた半順序に従った折り畳み状態が存在しない

また，図 3 に示す  $2 \times 5$  のサイズの山谷割り当て付きの地図に従った折り畳み状態が存在しないことも再確認できる．

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

0	0	0	0	0	0	*	*	*	*
1	0	0	0	0	0	*	*	*	*
1	1	0	0	0	0	*	*	*	*
1	1	1	0	1	1	*	*	*	*
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
*	*	*	*	0	0	0	0	0	0
*	*	*	*	1	1	1	0	0	0
*	*	*	*	1	1	1	1	0	0
*	*	*	*	1	1	1	1	1	0

図 2. 最小の折り畳めない  $2 \times 5$  の地図と対応する冪和行列

### 4 結論と発展問題

結論として，与えられた半順序に従った折り畳み状態の存在性の判定問題を行列に翻訳することができ，行列表現を用いてこの判定問題を解決することができるという結論に達した．さらに，折り畳み状態に対応できない半順序を発見することも可能である．この判定問題が NPC（非決定性多項式時間完全）に属するかを明らかにすることが，最も重要な発展問題と考えている．

### 参考文献

- [1] Arkin, Esther M., et al, When can you fold a map?, Computational Geometry 29.1 (2004): 23-46.
- [2] Jia, Yiyang, Jun Mitani, and Ryuhei Uehara. Clarifying the Difference between Origami Fold Models by a Matrix Representation: Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games, Thai Journal of Mathematics 21.4 (2023): 1061-1079.

# 1 次元折り紙の folding motion に対応する local stacking order の変化の様子を表す幾何的 object の提案

村井 紘子<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 奈良女子大学

e-mail : murai@cc.nara-wu.ac.jp

## 1 概要

1 次元折り紙  $P$  の folded state  $(f, \lambda)$  は, Demaine-O'Rourke [1] により定義されている. ここで  $f$  は  $P$  から  $\mathbb{R}^2$  への写像であり,  $\lambda$  はその multiple set  $S(f)$  に対して,  $f(S(f))$  の stacking order を表す  $S(f) \times S(f)$  から  $\{1, -1\}$  への関数である. さらに彼らは folded state の 1-parameter family  $(f_t, \lambda_t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) に対して,  $\lambda$  のどのような変化が可能であるかを注意し, その条件を満たすような  $(f_t, \lambda_t)$  を folding motion と呼んでいる. 本稿では特殊な folding motion に対しては, その stacking の変位を表す  $P \times P \times [0, 1]$  内の幾何的 object を定義し, その性質と具体例を紹介する.

## 2 準備

$P$  を閉区間  $[0, 1] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$  とし,  $C$  を  $\text{int}P$  内の有限個の点から成る集合とする. ただし  $\mathbb{R}^2$  には標準的な向きが入っているとする. このとき組  $(P, C)$  を 1 次元折り紙の **crease pattern** といい,  $P \setminus C$  の各成分すなわち (開, 半開または閉) 区間を  $(P, C)$  の **face** と呼ぶ.  $P$  から  $\mathbb{R}^2$  への連続写像  $f$  が **piecewise-rigid** であるとは,  $(P, C)$  の各 face  $F$  に対し,  $F$  の長さ  $|F|$  と  $f(F)$  の長さ  $|f(F)|$  が等しく,  $f(F)$  が一直線上にあるときにいう.  $(P, C)$  が  $f$  の **canonical crease pattern** であるとは,  $C$  がこのような定義を満たす集合の中で最も小さいときにいう. Piecewise-rigid な  $f$  が **flat** であるとは,  $f(P)$  が一直線上にあるときにいい, 特に  $f(P)$  が  $\mathbb{R}(\subset \mathbb{R}^2)$  に含まれるとき,  $f$  は **strongly flat** であるという. 以下では  $f$  は flat であるとする.  $S(f) := \{(p, q) \in (P \setminus (\partial P \cup C)) \times (P \setminus (\partial P \cup C)) \mid p \neq q, f(p) = f(q)\}$  とおく. いま,  $P \subset \mathbb{R}$  であるから,  $P$  には  $\mathbb{R}$  から誘導される自然な向きが定まる.  $P \setminus (\partial P \cup C)$  の成分を  $P_1, P_2, \dots, P_m$  とし, 各  $P_i$  には  $P$  の向きから誘導される向きが定められているとする. このとき  $p \in P \setminus (\partial P \cup C)$  に対し,  $f(p)$  における  $f(P)$  の長さ 1 の法線ベクトル  $\mathbf{n}(f(p))$  を次のように定義する:  $f$  の canonical crease pattern  $(P, C)$  の face で  $p$  を含むものを  $P_i$  とするとき,  $\mathbf{n}(f(p))$  は  $f(P_i)$  の向きの単位ベクトルを 90 度回転したものである.

**定義 1**  $f, (P, C)$  を上の通りとし,  $f$  は flat であるとする.  $\lambda$  を  $P \times P$  から 3 点集合  $\{1, -1, *\}$  への写像で次を満たすものとする. このとき写像の組  $(f, \lambda)$  を  $P$  の **flat folded state** という.

- 1)  $\lambda(p, q) = * \Leftrightarrow (p, q) \notin S(f)$ .
- 2)  $S(f)$  の任意の元  $(p, q)$  に対し,  $\lambda(q, p) \mathbf{n}(f(p)) = -\lambda(p, q) \mathbf{n}(f(q))$  が成り立つ.
- 3)  $(p, q), (q, r)$  を  $S(f)$  とする. (この時  $(p, r)$  も  $S(f)$  の元となる.)  $\lambda(q, p) = -\lambda(q, r)$  ならば  $\lambda(p, r) = \lambda(p, q)$  である.
- 4)  $(p, q)$  を  $S(f)$  の元とする.  $(p, q)$  を含む  $S(f)$  の弧状連結成分の任意の点  $(p', q')$  に対し,  $\lambda(p', q') = \lambda(p, q)$  が成り立つ.

**定義 2** Flat folded state  $(f, \lambda)$  に対して特に  $f$  が strongly flat であるとき,  $(f, \lambda)$  は  $P$  の **strongly**

flat folded state であるという.

定義 3  $(f, \lambda)$  を  $P$  の flat folded state とする. 1 パラメータ族  $M = (f_t, \lambda_t)$  ( $t \in [0, 1]$ ) が  $P$  から  $(f, \lambda)$  への flat folding motion であるとは, 次の条件が満たされるときにいう:

- 1)  $f_0 : P \rightarrow \mathbb{R}^2$  は包含写像である. (従って任意の  $p, q \in P$  に対し  $\lambda_0(p, q) = *$  である.)
- 2)  $(f_1, \lambda_1) = (f, \lambda)$ .
- 3) 任意の  $t \in [0, 1]$  に対し,  $(f_t, \lambda_t)$  は  $P$  の flat folded state である.
- 4)  $f_t$  は  $t$  に関して連続である.
- 5)  $\lambda_t$  は  $t$  に関して連続である. (ここでは連続性の定義は述べない).

定義 4  $(f, \lambda)$  を  $P$  の strongly flat folded state とする. 1 パラメータ族  $M = (f_t, \lambda_t)$  ( $t \in [0, 1]$ ) が定義 3 の条件において 3) を次の 3') に置き換えたものを満たすとき,  $M$  を  $P$  から  $(f, \lambda)$  への strongly flat folding motion であるという.

3') 任意の  $t \in [0, 1]$  に対し,  $(f_t, \lambda_t)$  は  $P$  の strongly flat folded state である.

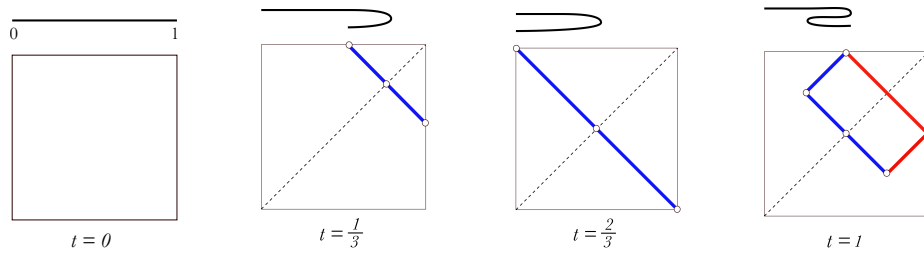
定義 5  $(f, \lambda)$  を  $P$  の strongly flat folded state とし  $M = (f_t, \lambda_t)$  ( $t \in [0, 1]$ ) を  $P$  から  $(f, \lambda)$  への strongly flat folding motion とする. このとき  $P \times P \times [0, 1]$  の部分集合  $G(M)_R$ ,  $G(M)_B$ ,  $G(M)$ ,  $C(M)$  を次のように定める.  $G(M)_+ = \{(p, q, t) \in P \times P \times [0, 1] | \lambda_t(p, q) = 1\}$ ,  $G(M)_- = \{(p, q, t) \in P \times P \times [0, 1] | \lambda_t(p, q) = -1\}$ ,  $G(M) = G(M)_+ \cup G(M)_-$ ,  $C(M) = \{(p, q, t) \in P \times P \times [0, 1] | p \in C_t \text{ または } q \in C_t\}$ , ここで  $C_t$  は  $(f_t, \lambda_t)$  に対応する canonical crease pattern を表す. また  $G(M)$  を  $M$  の graphic と呼ぶ.

このとき, 次が成り立つ.

命題 6 必要ならばパラメータ  $t$  を調整することにより次の 2 つの条件を満たすようにできる:

- 1)  $G(M)$  は  $P \times P \times [0, 1]$  内の piecewise-linear 2-cell である.
- 2)  $C(M)$  は  $P \times P \times [0, 1]$  内の straight segments から成る 1-complex である.

例 7 下の図は  $P$  の strongly flat folding motion  $M = (f_t, \lambda_t)$  を表す模式図 (上段) と, それに対応する graphic  $G(M)$  の  $t = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$  それぞれにおける断面 (下段) を表したものである. ここで赤は  $G(M)_+$ , 青は  $G(M)_-$  を表している.



謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP22K03313, JP23K03231 の助成を受けたものです.

## 参考文献

- [1] Erik D Demaine, Joseph O'Rourke, Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedra. Cambridge university press, 2007.

## 4 次元立方体の星展開、起点展開、最遠点写像

山岸 義和<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 龍谷大学先端理工学部

e-mail : yg@rins.ryukoku.ac.jp

### 1 概要

4 次元多面体の星展開の定義を提案する。4 次元立方体  $M = \partial I^4$  ( $I = [0, 1]$ ) について、星展開と起点展開を描き、最遠点写像の極限集合が 8 つの面 (3-立方体) の対角線の和集合であることを示す。

### 2 4 次元立方体の星展開と起点展開

(有界な) 凸多面体  $P \subset \mathbb{R}^{n+1}$  の表面  $M = \partial P$  を考える。多面体の星展開 ( $n = 2$ ) および起点展開は、重なりのない多面体展開として知られている [1, 2]。一方、 $M$  上の最短経路の長さで  $M$  上の距離  $d$  を定義する。 $p \in M$  の最遠点集合  $f(p) = \{q \in M \mid d(p, q) \geq d(p, q'), \forall q' \in M\}$  を考える。多面体の最遠点は星展開および起点展開と密接な関わりをもつ。たとえば立方体  $M = \partial I^3$  の場合、まず起点  $p \in M$  から 8 つの頂点への最短経路の和集合を  $S$  とし、 $S$  に沿って  $M$  を切り開く (星展開)。星展開の上で、起点  $p$  の 8 つのコピーを母点集合とするボロノイ分割を考える。ボロノイ辺の和集合は最小跡  $C(p)$  ( $p$  からの最短経路を複数もつ点の集合の閉包) に等しい。最小跡に沿って  $M$  を切り開けば起点展開が得られる。ボロノイ点の中から最遠点が選ばれる (図 1)。

$n = 3$  の場合、 $p$  から  $M$  のすべての辺上の点への最短経路の和集合を考えても星展開は作れない [3]。たとえば 4 次元立方体の場合、 $M$  の 1-skeleton (辺の和集合) は、16 個の頂点と 32 本の辺からなるグラフであるが、これは平面グラフでない。このため、辺上のある点  $q$  は  $p$  からの最短経路を複数もつ。この最短経路同士を結ぶような切り込みが星展開には必要となる。そこで、起点展開および星展開を次のように定義する。

**定義 1** 多面体  $M_1 \subset \mathbb{R}^n$  から  $M$  の上への連続写像  $g_1 : M_1 \rightarrow M$  が区分的に等長写像であり、内部  $M_1^\circ$  への制限は  $M_1^\circ$  から  $M \setminus C(p)$  への同相とする。このとき  $M_1$  を起点展開と呼ぶ。 $p$  を端点とするいくつかの最短経路 (無限個) の和集合を  $S$  とする。多面体  $M_2 \subset \mathbb{R}^n$  から  $M$  の上への連続写像  $g_2 : M_2 \rightarrow M$  が区分的に等長写像であり、内部  $M_2^\circ$  への制限は  $M_2^\circ$  から  $M \setminus S$  への同相とする。このとき  $M_2$  を星展開と呼ぶ。ここで  $S$  が極小であるとは、他の任意の星展開  $g'_2 : M'_2 \rightarrow M$ ,  $g'_2|(M'_2)^\circ : (M'_2)^\circ \rightarrow M \setminus S'$  について、 $S' \subset S$  ならば  $S' = S$  をみたすときをいう。

4 次元立方体の星展開と起点展開の例を図 2 に示す。星展開上に見られる凹四角形の部分は、追加の切り込みである。凹四角形の対角線上の点は、起点  $p$  からの最短経路を 2 本持っている。

### 3 4 次元立方体の最遠点写像

3 次元立方体  $M = \partial I^3$  の場合、 $p = (a, b, 0)$ ,  $0 < b < a < 1/2$  とおき、 $\iota(x, y, z) = (1-x, 1-y, 1-z)$  とすると、 $\iota f(p) = ((a+2b(1-b))/(3-2a), b, 0)$  が成立ち、したがって  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\iota f)^k(p) = (b, b, 0)$  が成立つ。3 次元立方体の最遠点写像の極限集合は、対角線の和集合となる。

4 次元立方体の場合、最遠点写像は区分的有理写像として表される。

**定理 2**  $p = (a, b, c, 0) \in \Delta = \{(a, b, c, 0) \mid 0 \leq c \leq b \leq a \leq 1/2\} \subset \partial I^4$  とする。 $\{q_j\}_{j \geq 0}$  を



$q_0 = p, q_{j+1} \in \iota f(q_j), j \geq 0$  で与える ( $\iota(x, y, z, w) = (1-x, 1-y, 1-z, 1-w)$ )。  $q_1 \in \Delta$  を選ぶと  $q_j \in \Delta, j \geq 1$  であり、

$$\lim_{j \rightarrow \infty} q_j = (c', c', c', 0), \quad \exists 0 \leq c' \leq c$$

が成立つ。とくに  $c > 0$  のとき  $c' > 0$  である。

**謝辞** 本研究は JSPS 科研費 24K06838 の助成を受けたものです。

## 参考文献

- [1] B. Aronov, J. O'Rourke, Nonoverlap of the star unfolding, Discrete Comput. Geom., 8 (1992), 219-250.
- [2] E. Miller, I. Pak, Metric combinatorics of convex polyhedra: cut loci and nonoverlapping unfoldings, Discrete Comput. Geom., 39 (2008), 339-388.
- [3] E. D. Demaine, J. O'Rourke, 上原龍平 (訳), 幾何学的な折りアルゴリズム, 近代科学社, 2009 年.

