

要素非適合境界条件を扱う仮想領域法の安定化手法と不定値行列ソルバー

鈴木 厚^{1,2}¹ 理化学研究所 計算科学研究センター, ² 大阪大学サイバーメディアセンター

e-mail : Atsushi.Suzuki.aj@a.riken.jp, Atsushi.Suzuki@cmc.cas.osaka-u.ac.jp

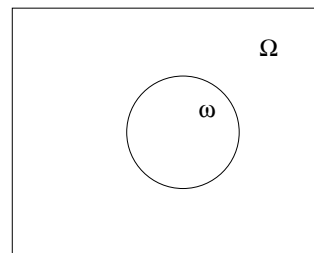
1 概要

3次元形状を扱う有限要素計算では領域の境界に沿って内部に四面体要素分割を生成して, Dirichlet 境界条件を課す問題を考えるが, 領域形状に完全に適合した要素分割を構成することが難しい場合がある. 計算領域を覆う要素分割に対し境界表面に Langrange 乗数を導入し, 表面積分により弱い方法で境界条件を課す仮想領域法があるが, 下限上限条件を満たす自由度の選択に制限が大きい. 表面形状をレベルセットにより陰的に記述し, 零等値面に交差する要素表面の Neumann データのジャンプに要素長の重みを乗ずることで解の近似精度内で安定化項を構成することで, 下限上限条件の制約を回避できる. 得られた行列は不定値であるが Langrange 乗数の自由度の符号を反転させると係数行列は強圧的になる. これにより軸選択手続を簡略化した高速な直接法ソルバーを利用できる.

2 内部境界に Dirichlet 条件を課す Poisson 方程式

ω を内部の領域, Ω をその外側の領域とする. Ω に外力 f を与え, $\partial\omega$ に非斉次 Dirichlet 条件を課す Poisson 方程式を考える.

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \nabla u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \setminus \partial\omega \end{cases} \quad (1)$$



\tilde{f} を $\Omega \cup \bar{\omega}$ で定義されていて Ω で f に一致する関数とする. $\partial\omega$ での Dirichlet 条件を制約条件として, Lagrange 乗数を導入することで, u は次の弱形式から求めることができる.

$$\int_{\Omega \cup \bar{\omega}} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{v} + \int_{\partial\omega} \tilde{v} \lambda + \int_{\partial\omega} (\tilde{u} - g) \mu = \int_{\Omega \cup \bar{\omega}} \tilde{f} \tilde{v} \quad \forall (\tilde{v}, \mu) \in H_0^1(\Omega \cup \bar{\omega}) \times H^{-1/2}(\partial\omega) \quad (2)$$

を満たす $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega \cup \bar{\omega})$ と $\lambda \in H^{-1/2}(\partial\omega)$ を求めよ. $\partial\omega$ での境界積分 $\int_{\partial\omega} \tilde{v} \lambda$ は $L^2(\partial\omega)$ の内積であるが, これにより $H^{1/2}(\partial\omega)$ の双対空間 $H^{-1/2}(\partial\omega)$ が定まる.

3 仮想領域法の離散化と下限上限条件

内部領域 ω とその外部領域 Ω を区別することなく, $\Omega \cup \bar{\omega}$ の三角形要素分割 \mathcal{T}_h を準備する. h は要素代表長さを表す. (2) は混合型の弱形式であるため, その有限要素近似では $\partial\omega$ の近似方法が問題となる. [1] の有限要素解の誤差評価に関する論文では, \mathcal{T}_h での P1 要素に対して $\partial\omega$ は $3h$ の大きさの折れ線で近似して P0 要素を用いると, $b(\tilde{v}_h, \lambda_h) = \int_{\partial\omega_h} \tilde{v}_h \lambda_h$ は一様な下限上限条件を満たすことが示されている. $a(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h) = \int_{\Omega \cup \bar{\omega}} \nabla \tilde{u}_h \cdot \nabla \tilde{v}_h$ に対し, P1 要素による有限要素基底関数による行列表現を A とし, $b(\cdot, \cdot)$ には更に P0 要素を用いて B とすると, (2) の有限要素方程式の行列表現は

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{g} \end{bmatrix}$$

となる. $\ker B^T = \{\vec{0}\}$ となるため, この係数行列は正則であるが, 不定値行列のため解きにくい. $\partial\omega$ の近似を粗くする必要のあることに加えて, これが仮想領域法が用いられなかった理由である.

4 レベルセット法による内部境界の表現

内部境界 $\partial\omega$ がレベルセット関数 $\varphi: \Omega \cup \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}$ の零等高線で表現される場合, $\partial\omega = \{x; \varphi(x) = 0\}$ を考える. φ_h を \mathcal{T}_h での φ の P1 有限要素補間とすると $\partial\omega_h$ は有限要素 $K \in \mathcal{T}_h$ 毎に φ_h が零の値をとる辺上の点を要素 K 内部で線分で繋げたものとして構成できる. φ_h の零等高線と共通部分を持つ有限要素の集合を $\mathcal{T}_{\partial\omega} = \{K; K \cap \partial\omega \neq \emptyset\}$ とする. (2) の離散化では Lagrange 乗数は $H^{-1/2}(\partial\omega)$ の近似空間に求めるが, これを $\mathcal{T}_{\partial\omega}$ の有限要素補間からなる関数に置き換える,

$$\int_{\partial\omega_h} \tilde{v}_h \hat{\lambda}_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_{\partial\omega}} \int_{K \cap \{x; \varphi_h(x)=0\}} \tilde{v}_h \hat{\lambda}_h.$$

ここで $\hat{\lambda}_h$ は $K \in \mathcal{T}_{\partial\omega}$ での P0 補間とする. 前節での $\partial\omega$ の近似による境界積分と同等の近似を実現するが, 下限上限条件の制約を満たさない可能性がある.

5 安定化項の追加と不定値行列ソルバー

[2] で導入された安定化手法は $\partial\omega$ が横切る有限要素の辺の左右の要素 K^+ と K^- での Neumann データ λ の差 $[\lambda] = \lambda^+ - \lambda^-$ の重み付き L^2 内積を追加するものである.

h_F を左右の要素で共有されている辺 $F = K^+ \cap K^-$ の長さとする. \mathcal{F} をこれらの辺の集合とする. P0 補間による $\hat{\lambda}_h$ と $\hat{\mu}_h$ に対して次を準備する.

$$d_h(\hat{\lambda}_h, \hat{\mu}_h) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \int_F h_F [\hat{\lambda}_h] [\hat{\mu}_h] = \sum_{F \in \mathcal{F}} h_F^2 (\lambda^+ - \lambda^-) (\mu^+ - \mu^-)$$

$\delta > 0$ を安定化パラメータとして (2) の右辺に $-\delta d_h(\hat{\lambda}_h, \hat{\mu}_h)$ を追加する.

[2] では, $\partial\omega_h$ の線積分で構成される $b_h(\cdot, \cdot)$ に対し, この双一次形式を追加した要素依存のノルムを導入することで, u_h と λ_h が要素サイズ h に対して一次の誤差評価を得ることを示している.

安定化項 $d_h(\cdot, \cdot)$ の $\mathcal{T}_{\partial\omega}$ の P0 基底による行列表現を D とすると \vec{u} と $\vec{\lambda}$ は連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -\delta D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{f} \\ \vec{g} \end{bmatrix} \quad (3)$$

の解になる. 安定化項は定数でない有限要素データ $\hat{\lambda}_h$ に対して, $d_h(\hat{\lambda}_h, \hat{\lambda}_h) > 0$ である. したがって $[\vec{u}, \vec{\lambda}] \in [\vec{0}, \vec{1}]^\perp$ を満たすベクトルに対して, $\vec{\lambda}$ の符号を取り替えた行列は

$$\left(\begin{bmatrix} A & B^T \\ -B & \delta D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix} \right) = (A\vec{u}, \vec{u}) + \delta(D\vec{\lambda}, \vec{\lambda}) > 0 \quad (4)$$

であることから $B^T \vec{1} \neq \vec{0}$ に注意すると, (3) の係数行列は正則であることがわかる. 不定値行列に対して軸選択処理を有する Dissection 直接法ソフトウェア [3] で安定して求解をすることができる. (4) 式の様に係数行列の下ブロックの符号を取り替えと, ほぼ強圧的であることがわかるため, 対称性は失われるが軸選択を簡便なもので済ませることができる.

講演時に FreeFEM 言語による 3 次元問題での安定化手法の記述と数値例を示す.

参考文献

- [1] V. Girault, R. Glowinski, JJIAM, 12 (1995) 487–514, 10.1007/BF03167240
- [2] E. Burman, P. Hansbo, CMAME, 199 (2010) 2680–2686, 10.1016/j.cma.2010.05.011
- [3] A. Suzuki, F.-X. Roux, IJNME, 100 (2014) 136–164, 10.1002/nme.4729

A Linear HDG scheme for the diffusion type Peterlin viscoelastic problem in 2D

Gou Sibang^{1,2}, Hu Jingyan², Wang Qi², Zhou Guanyu², Jing Feifei³

¹Kyoto University, Graduated School of Informatics. ²Institute of Fundamental and Frontier Sciences, University of Electronic Science and Technology of China. ³School of Mathematics and Statistics, Northwestern Polytechnical University.
e-mail : sibang.gou@outlook.com

1 Introduction

The viscoelastic model for the polymeric fluids appears in various non-Newtonian flow simulations [1], for example, molten plastics, biological fluids, and engine oil with polymeric additives. This work is to design a linear Hybridizable Discontinuous Galerkin (HDG) scheme for the nonstationary diffusive Peterlin viscoelastic system with a tiny diffusion coefficient ϵ for the conformation tensor.

Let Ω be a smooth, bounded domain in \mathbb{R}^2 with boundary Γ . The unknown $(\mathbf{u}, p, \mathbf{C}) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ represents the velocity, pressure and conformation tensor respectively. The 2D diffusion type Peterlin viscoelastic model is **(P)**:

$$\mathbf{u}_t + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \nabla \cdot [(\text{tr} \mathbf{C}) \mathbf{C}] \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (1b)$$

$$\mathbf{C}_t + \nabla \cdot (\mathbf{C} \otimes \mathbf{u}) - \epsilon \Delta \mathbf{C} - (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{C} - \mathbf{C} (\nabla \mathbf{u})^\top = \text{tr} \mathbf{C} \mathbb{I} - (\text{tr} \mathbf{C})^2 \mathbf{C} \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (1c)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on } \Gamma \times (0, T), \quad (1d)$$

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{C}(\cdot, 0) = \mathbf{C}^0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1e)$$

where $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$ is the given force, and $(\mathbf{u}^0, \mathbf{C}^0)$ is the initial value. ν, ϵ are viscosity and tiny diffusion coefficients, respectively, and \mathbb{I} is the identity matrix of $\mathbb{R}^{d \times d}$. Here,

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ij} = u_i v_j, \quad (\mathbf{C} \otimes \mathbf{u})_{ijk} = C_{ij} u_k,$$

and we see that $\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ if $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

There are many discrete schemes have been proposed for numerical simulations of **(P)**. However, the error estimates of some existing researches of stabilized Lagrange-Galerkin FEM [2, 3] often depend on the reciprocal of ϵ . As $\epsilon \rightarrow 0$, The parabolic equation (1c) becomes hyperbolic and the system may have non-smooth solutions. We observe that [4] used hybridized discontinuous Galerkin (HDG) method for the convection-diffusion equation, where the H^1 error estimate depends on $O(\epsilon^{1/2})$. The numerical experiments show that the HDG method is stable and has an optimal convergence order even when $\epsilon = 10^{-6}$. Our motivation is to use the HDG method to design a stable discrete scheme for (1) and to obtain the error estimates independent of ϵ^{-1} .

2 The linearn HDG Scheme

For spatial discretization, we refer to the HDG method for the stationary Navier-Stokes equations in [5], where the scheme is mass and momentum conserving, energy stable, and pressure-robust. Later it indicates that HDG method can effectively approximate the problems dominated by convective terms $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ and $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{C}$ when the diffusion coefficients ν and ϵ are arbitrarily small. For time discretization, we use the linear semi-implicit scheme.

The proposed HDG scheme is obtained by using the continuity of the flux and adding the following terms on the edge of each element.

- **symmetry term**

$$\int_{\partial K} \nu(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \otimes \mathbf{n} : \nabla \mathbf{v} \, ds \text{ and } \int_{\partial K} \epsilon(\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{C}) \otimes \mathbf{n} : \nabla \mathbf{D} \, ds.$$

- **penalty term**

$$\int_{\partial K} \frac{\nu\alpha}{h_K}(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \otimes \mathbf{n} : (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \otimes \mathbf{n} \, ds \text{ and } \int_{\partial K} \frac{\epsilon\beta}{h_K}(\mathbf{C} - \hat{\mathbf{C}}) \otimes \mathbf{n} : (\mathbf{D} - \hat{\mathbf{D}}) \otimes \mathbf{n} \, ds.$$

- **convection balance term**

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{2}(\mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}})(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \, ds + \int_{\partial K} \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{2}(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \, ds, \\ & \int_{\partial K} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{2}(\mathbf{C} + \hat{\mathbf{C}})(\mathbf{D} - \hat{\mathbf{D}}) \, ds + \int_{\partial K} \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{2}(\mathbf{C} - \hat{\mathbf{C}})(\mathbf{D} - \hat{\mathbf{D}}) \, ds. \end{aligned}$$

Some numerical experiments are designed to verify the theoretical error estimate results and convergence rates. Moreover, we performe comparative simulations with the Lagrange Galerkin(LG) method in [3] to show the stability of HDG scheme. we find FreeFEM has difficulty dealing with HDG scheme. How to define the function space and add the boundary integral term to the solution function is the main problem at present.

参考文献

- [1] P. L. Lions and N. Masmoudi. Global solutions for some Oldroyd models of non-Newtonian flows. *Chin. Annal Math.*, 21(2):131–146, 2000.
- [2] Y. L. Jiang and Y. Yang. Semi-Discrete Galerkin Finite Element Method for the Diffusive Peterlin Viscoelastic Model. *Comput. Meth. Appl. Mat.*, 18(2):275–296, 2018.
- [3] M. Lukáčová-Medvid'ová, H. Mizerová, H. Notsu, and M. Tabata. Numerical analysis of the Oseen-type Peterlin viscoelastic model by the stabilized Lagrange–Galerkin method. Part II: A linear scheme. *ESAIM: M2AN*, 51(5):1663–1689, 2017.
- [4] I. Oikawa. Hybridized discontinuous Galerkin method for convection-diffusion problems. *Jpn. J. Ind. Appl. Math.*, 31(2):335–354, 2014.
- [5] S. Rhebergen and G. N. Wells. A Hybridizable Discontinuous Galerkin Method for the Navier–Stokes Equations with Pointwise Divergence-Free Velocity Field. *J. Sci. Comput.*, 76(3):1484–1501, 2018.

数値計算：新規圧縮性流体ソルバーの開発

中澤 嵩¹

¹金沢大学

e-mail: tnakazawa@staff.kanazawa-u.ac.jp

1 概要

近年, Multi Fidelity 設計を考慮したアプローチが注目を集めつつある. ここで, 圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いた設計を High-Fidelity 設計とする. 一方, 圧縮性 Euler 方程式に対して何らかの数学的な操作を行った際に得られる簡易な数理モデルを用いた設計を Low-Fidelity 設計とすることで (厳密に圧縮性 Euler 方程式を解いていないが), 膨大な計算コストを緩和しつつ妥当な最適形状が得られると考えられる. ここでは, Low-Fidelity 設計を行う際の支配方程式として式 (2) に記述している F. De Vuyst が提案している数理モデル (1) を活用する.

$$\frac{Da_p}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, a_p = \log(\rho), \frac{1}{T} \frac{Du}{Dt} + \nabla a_p = 0, \frac{Da_p}{Dt} + \gamma \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, a_p = \log(p) \quad (1)$$

当該数理モデルでは, ガラーキン法で離散化が可能であり, 更に移流項については直接法で演算が可能な特性曲線法を用いることで, 計算コストを大幅に抑制することが可能となる.

2 数値計算結果：Sod Shock Tube Problem

まず初めに, 最小のエッジサイズ Δx を 5×10^{-4} として, a_p, u, a_p の基底関数として P1-P1-P1 (Fig. 1), P1-P2-P1 (Fig. 2), P2-P2-P2 (Fig. 3) の 3 ケースの計算を行った. 各図の橙色が $t = 0.2$ における厳密解, 青色が数値解のプロファイルとなっている. Fig. 1, Fig. 2, Fig. 3 の結果から, P2-P2-P2 が最も厳密解に近いプロファイルとなることが明らかとなった.

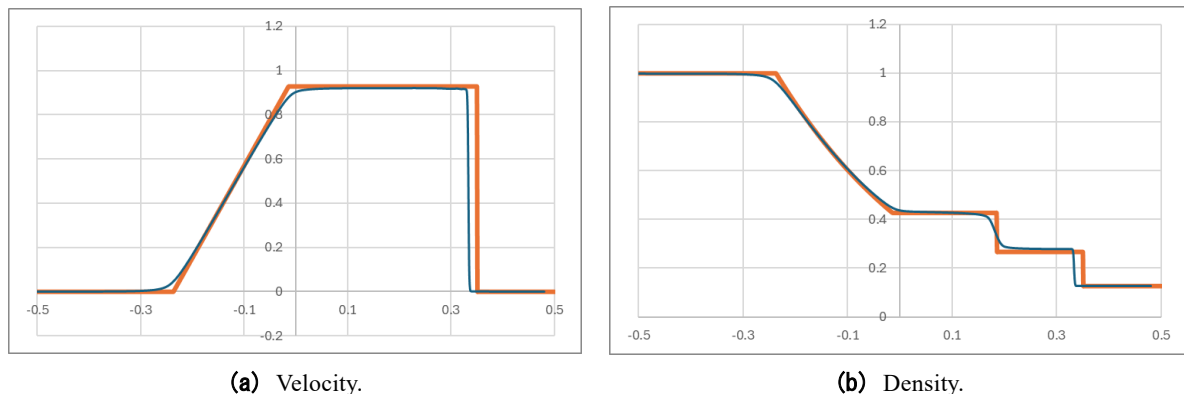
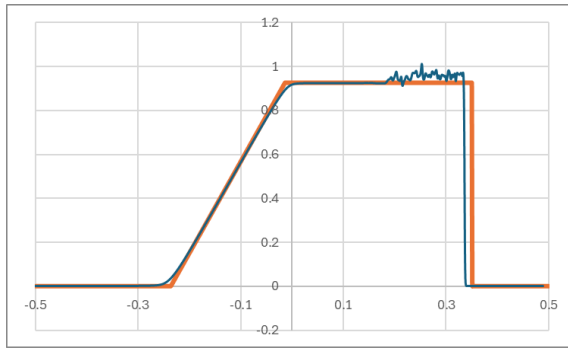
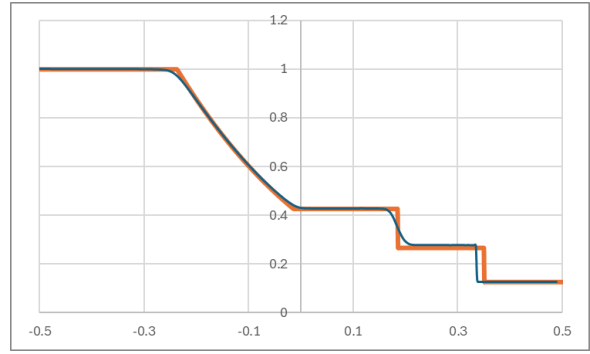


Fig. 1. a_p, u, a_p for P1-P1-P1.

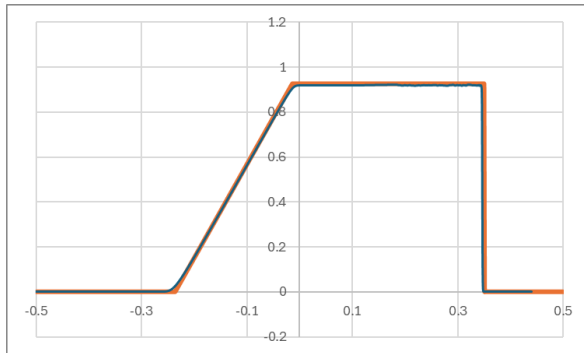


(c) Velocity.

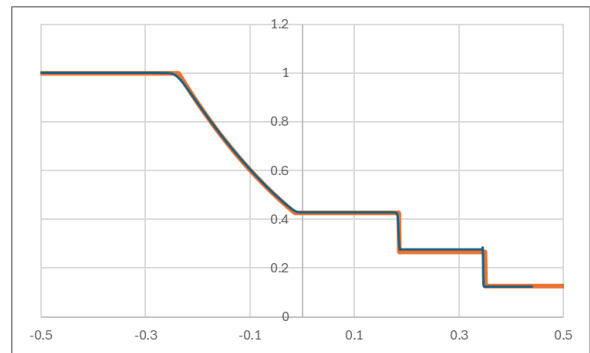


(d) Density.

Fig. 2. a_ρ, u, a_p for P1-P2-P1.



(e) Velocity.



(f) Density.

Fig. 3. a_ρ, u, a_p for P2-P2-P2.

謝辞 本研究は JSPS 科研費 23K03659 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] De Vuyst, HAL Id : cel-00842234, ver. 1.

FreeFEM を用いたレベルセット法に基づくトポロジー最適化

松本 敏郎¹, Cui Yi¹, 高橋 徹¹

¹ 名古屋大学

e-mail : matsumoto.toshiro.e6@f.mail.nagoya-u.ac.jp

1 はじめに

トポロジー最適化では、計算に有限要素法が用いられる場合が多く、簡便なコマンドで様々な現象に対して有限要素法を実行できる FreeFEM が便利である。FreeFEM はメッシュの生成、適応メッシュの機能もあることから、トポロジー最適化においても早くから用いられている [1, 2, 3].

本稿では、レベルセット法に基づくトポロジー最適化を考え、有限要素法の部分に FreeFEM を使用した例を示す。レベルセット法は、材料の分布を場所のスカラー関数であるレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ で表現する。設計領域内のある点 \mathbf{x} で $\phi(\mathbf{x}) > 0$ ならば \mathbf{x} は材料内部に位置し、 $\phi(\mathbf{x}) = 0$ ならば境界、 $\phi(\mathbf{x}) < 0$ ならば材料の外部であるとする。レベルセット関数は、トポロジー導関数を反応項とする反応拡散方程式を満足するものと仮定する。ここでは、レベルセット関数から実際の材料領域を切り出して材料領域に対する FEM のメッシュを生成し、そのメッシュに対して FEM で構造解析を繰り返す方法について、FreeFEM の使用例を示す。

2 レベルセット法による FreeFEM の使用手順

2次元の静弾性問題における平均コンプライアンス最小化を目的汎関数とするトポロジー最適化問題を考え、以下の FreeFEM++ の手順を記述したスクリプトファイルを作成して計算した。

① Fortran ルーチン

- 初期設計領域の定義し gmsh ファイルへ保存、レベルセット関数の設計領域のメッシュ生成（内部で mmg をコール）と境界条件の規定

② Fortran ルーチン

- レベルセット関数の分布から材料領域のメッシュ生成（内部で mmg をコール）
- 境界条件を追加しメッシュファイルを作成

③ FreeFEM で以下の手順による計算

- メッシュファイルの読み込み、メッシュ宣言
- 有限要素空間の宣言（レベルセット関数、変位とそれらのテスト関数）
- 弱形式を用いて、弾性問題とレベルセット関数についての反応拡散問題を定義
- 変位と随伴変位を有限要素法で計算し、目的関数値が収束していれば終了
- トポロジー導関数を計算し、レベルセット関数の分布を計算し、②へ戻る

②の Fortran の実行プログラム（ここでは Th0_to_Th.out）を FreeFEM++ のスクリプトファイル（ここでは topo.edp）から実行する部分は、下記のように記述できる。

```
// レベルセット関数 phi を mmg に渡してゼロ当地線の抽出とメッシュの生成
savesol("phi.sol",Th0,oldphi,order=1);
exec("./Th0_to_Th.out");
Th = readmesh("Th.msh");
```

レベルセット関数の 0 等値面を切り出してのメッシュ生成は、Fortran の中から mmg をコマンドラインとして実行して行った。弾性問題とレベルセット関数の反応拡散方程式を解くための問題定義

は、次のようにした.

```
problem elasticity2(u1,u2,v1,v2)
= int2d(Th)(mu0*(2*dx(u1)*dx(v1)+2*dy(u2)*dy(v2)
+ dy(u1)*dx(v2)+dx(u2)*dy(v1)+dy(u1)*dy(v1)+dx(u2)*dx(v2))
+ lambda0*(dx(u1)+dy(u2))*(dx(v1)+dy(v2)))
- int1d(Th,3)(f1*v1+f2*v2) + on(1,u1=0,u2=0);
problem RDE2(phi,vphi)
= int2d(Th0)(phi*vphi+dt*tao*Kappa*(dx(phi)*dx(vphi)+dy(phi)*dy(vphi)))
- int2d(Th0)(oldphi*vphi)-int2d(Th)(dt*Kappa*senscoef2*sens2*vphi)
+ on(3,phi=1);
```

弾性問題を解いてトポロジー導関数を計算し、反応拡散方程式を解いてレベルセット関数の分布を更新する部分の FreeFEM++ のスクリプトは以下のようにした.

```
elasticity2; // 弾性問題を解く
func sens = -(-1./(1.0+nu)*((4.*mu0*(dx(u1)^2 +dy(u2)^2
+2.*(dx(u2)/2.+dy(u1)/2)^2)) // トポロジー導関数
+(2.0*mu0-(1.-3.*nu)/2./(1.-nu)*(2.*mu0+2.*lambda0))*(dx(u1)+dy(u2))^2));
RDE2; // レベルセット関数の反応拡散方程式を解く
objective = int1d(Th,3)(f1*u1 + f2*u2); // コンプライアンス
```

図 2 には、FreeFEM を用いて計算したトポロジー最適化の結果の例を示す.

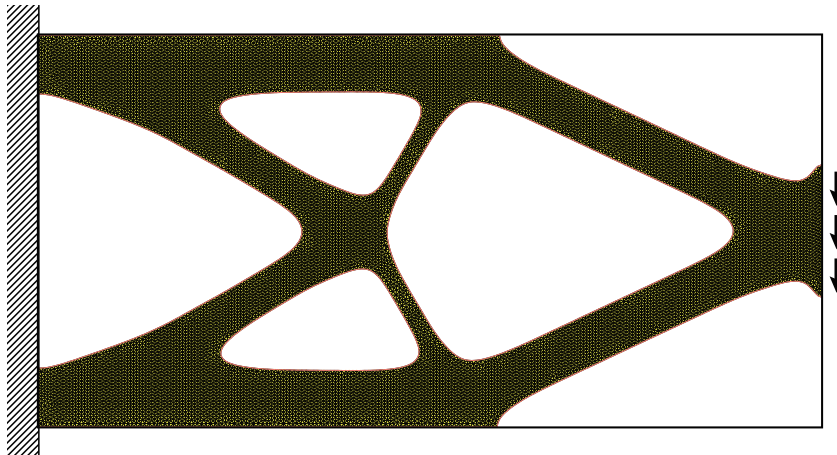


図 1. FreeFEM を用いて計算したトポロジー最適化の結果の例.

参考文献

- [1] G. Allaire, O. Pantz, Structural Optimization with FreeFem++, Structural and Multi-disciplinary Optimization, Vol.32 (2006), pp.173–181.
- [2] Y. Cui, T. Takahashi and T. Matsumoto, A time-saving FEM-based approach for structural topology optimization with exact boundary representation, Mechanical Engineering Journal, Vol.9 No.6 (2022), p.22-00281.
- [3] H. Li, T. Kondoh, P. Jolivet, K. Furuta, T. Yamada, B. Zhu, K. Izui and S. Nishiwaki, Three-dimensional topology optimization of a fluid-structure system using body-fitted mesh adaption based on the level-set method, Appl. Math. Model., Vol.101 (2022), pp.276–308.