

# ネマチック液晶の持つ弾性エネルギーの陽公式に基づく トポロジカル欠陥の平衡解の解析

三好 裕之<sup>1</sup>, 宮廻 裕樹<sup>1,2</sup>, 奈良 高明<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> 東京大学大学院情報理工学系研究科, <sup>2</sup> 東京大学工学部計数工学科

e-mail: hiroyukimiyoshi@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

## 1 序論

アクティブネマティクスは、構成要素の自己駆動と相互作用により配列を形成するシステムであり、細胞や分子モーターなどの単位から構成され複雑な挙動を示す。近年、その構成要素の配向角度を大きく変化させるトポロジカル欠陥の研究が盛んである。トポロジカル欠陥は構成要素の運動を制御し、相互作用しながら生成や消滅を繰り返すことが知られており、その欠陥の制御は全体のシステムの制御に繋がるからである。欠陥の平衡条件は弾性エネルギーにより評価されるが、エネルギーの計算には線積分などの数値的な手法が用いられる。

本稿では、弾性エネルギーの陽公式を導出する。その理論に基づき、円が複数交わっている領域で、欠陥が発生する位置や欠陥の回転数を考察し、先行研究の結果を数学的に検証する。

## 2 問題設定

領域  $\Omega$  内のトポロジカル欠陥  $z = z_k, k = 1, \dots, N$  が作る弾性エネルギーは、欠陥の特異点を中心とした半径  $\epsilon$  の領域  $D(\epsilon)$  を除いた、以下の面積分で定義される：

$$F = \int_{\Omega \setminus D(\epsilon)} |\nabla \phi(x, y)|^2 dx dy. \quad (1)$$

Miyazako らは、配向角度  $\phi$  の複素ポテンシャルを導入し、複素グリーンの定理を用いて図 1(A) で示す線積分でエネルギーを評価した [1]。しかし、ポテンシャル内の  $\log$  のブランチを回避するため、経路を適切に選ぶ必要がある。この問題点を解決するため、エネルギーの陽公式を導出する。

## 3 主結果: 弾性エネルギーの陽公式

式 (1) で定義されるエネルギー  $F$  は、座標  $z_k$  と単位円から  $\Omega$  への等角写像  $w = g(z)$  を用いて以下で与えられる：

$$F = -2\pi \sum_{k=1}^N q_k^2 \log \epsilon + 2\pi F_d + F_g + O(\epsilon \log \epsilon), \quad (2)$$

$$F_d \equiv \sum_{k=1}^N (q_k^2 - 2q_k) \log |g'(z_k)| + \sum_{k=1}^N q_k^2 \text{Im}[\mathcal{R}(z_k)] + \sum_{k=1}^N \sum_{l \neq k}^N q_k q_l \text{Im}[\mathcal{G}(z_k, z_l)], \quad (3)$$

$$F_g \equiv \int_{\mathbb{D}} \left| \frac{g''(z)}{g'(z)} \right|^2 dS + 4\pi \log |g'(0)|. \quad (4)$$

ここで、 $\mathcal{G}(\cdot, \cdot)$  や、 $\mathcal{R}(\cdot, \cdot)$  は以下のように与えられる。

$$\mathcal{G}(z, z_k) = -i[\log(z - z_k) + \log(1 - z_k \bar{z}_k)] - \frac{\pi}{2}, \quad \mathcal{R}(z_k) = -i \log(1 - z_k \bar{z}_k) - \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

式 (2) の第一項は座標  $z_k$  には依存せず、第二項の  $F_d$  は座標  $z_k$  のみに依存する。そのため、エネルギーの最適化の際には、 $F_d$  を最適化すれば良い。

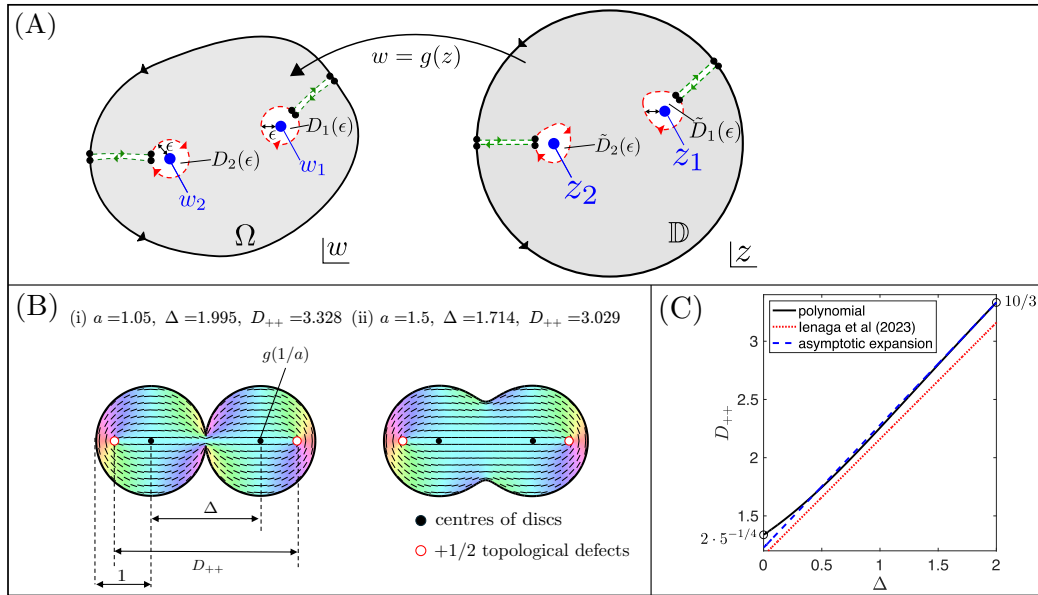


図 1. (A) 積分経路 (B) 円が二つ交わった領域の欠陥位置と中心間距離. (C) Ienaga らが予想した比例関係との比較.

#### 4 数値実験: Quadrature domain における欠陥定位

数値実験として, Ienaga らによる, 円形の領域が交わったような領域に対する欠陥位置の考察を行う [2]. Ienaga らは欠陥間距離と円の中心間距離の比例関係を予測した. 単位円からこのような領域への等角写像は, 数学的には Quadrature domain でよく近似されることが知られている:

$$g(z) = \frac{a^4 - 1}{a^2 - a + 1} \cdot \frac{z}{a^2 - z^2}. \quad (6)$$

このとき, 写像前の座標  $z = s$  に関して, エネルギー  $F_d$  が以下のように陽に記述される.

$$F_d = -\frac{1}{2} \log[2s(1 - s^4)] - \frac{3}{4} \log |g'(s)| - \frac{3}{4} \log |g'(-s)|. \quad (7)$$

このエネルギーの極値を求めると, 欠陥位置は以下  $t$  に関する多項式の解として得られる:

$$p_2(t) = t^4 + 18a^2 t^3 + 5(a^4 - 1)t^2 - 18a^2 t - a^4 = 0, \quad t = s^2. \quad (8)$$

図 1(B) に, 円が二つ交わった領域に関する配向の例を示す. これを用いて, 図 1(C) で示すように, Ienaga らが予想した仮説を数学的に検証することが可能になった.

**謝辞** 本研究は, 日本学術振興会特別研究奨励費 (JP24KJ0041), 科研費 (JP23H00086, JP23H04406) の支援を受けたものである.

#### 参考文献

- [1] H. Miyazako and T. Nara. Explicit calculation method for cell alignment in non-circular geometries. *R. Soc. Open Sci.*, Vol. 9, No. 1, p. 211663, January 2022.
- [2] R. Ienaga, K. Beppu, and Y. T. Maeda. Geometric confinement guides topological defect pairings and emergent flow in nematic cell populations. *Soft Matter*, Vol. 19, No. 26, pp. 5016–5028, July 2023.

# Numerical calculations of stability of stationary solutions for a phase field

岡本 朋揮<sup>1</sup>, 森 竜樹<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 武蔵野大学大学院工学研究科数理工学専攻 修士 1 年, <sup>2</sup> 武蔵野大学工学部

e-mail : g2486005@stu.musashino-u.ac.jp

## 1 次元フェーズフィールドモデル

$$(PFM; (0, 1)) \begin{cases} \tau \varphi_t = d\varphi_{xx} + \varphi - \varphi^3 + 2u & \text{in } (0, 1) \times (0, \infty), \\ u_t + \frac{\ell}{2}\varphi_t = \kappa u_{xx} & \text{in } (0, 1) \times (0, \infty), \\ \varphi_x(0, t) = \varphi_x(1, t) = 0, \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 & \text{in } (0, \infty), \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } (0, 1) \end{cases} \quad (1)$$

の定常解の安定性について数値的考察を行う. このモデルは非等温な固体と液体に関する相転移現象に関連する数理モデルである. ここで,  $\varphi = \varphi(x, t)$ ,  $u = u(x, t)$  は未知関数,  $\tau, d, \ell, \kappa$  は正定数である. 式 (1), (2) から以下が成り立つ.

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 \left( u(x, t) + \frac{\ell}{2} \varphi(x, t) \right) dx \right\} = 0.$$

これより,  $m$  を実定数とすると,  $(PFM; (0, 1))$  は保存則

$$\int_0^1 u(x, t) dx + \frac{\ell}{2} \int_0^1 \varphi(x, t) dx \equiv \int_0^1 u_0(x, t) dx + \frac{\ell}{2} \int_0^1 \varphi_0(x, t) dx =: m$$

を持つことがわかる.  $(PFM; (0, 1))$  の定常問題を考えると, 式 (1), (2) より,  $u$  は未知定数となり, これを  $\bar{u}$  とする. さらに, 単調増加な解  $\varphi$  に注目すると, 定常問題

$$(SP) \begin{cases} d\varphi_{xx} + \varphi - \varphi^3 + 2\bar{u} = 0 & \text{in } (0, 1), \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0, \\ \varphi_x(x) > 0 & \text{in } (0, 1), \\ \bar{u} + \frac{\ell}{2} \int_0^1 \varphi(x) dx = m \end{cases} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

をえる. ここで,  $\varphi = \varphi(x)$  は未知関数,  $m$  は実定数,  $\bar{u}$  は未知定数である.

(SP) の解構造に関して, Elliott-Zheng (FBP:ISNF, 95, (1990)) と Suzuki-Tasaki (Nonlinear Anal, 71,(2009)) は, 特別な  $\ell, m$  において, 定数解と非定数解の存在・非存在と安定性の結果をえた. 最近, Mori-Tasaki-Tsujikawa-Yotsutani (DCDS-B, 28,(2023)) は, 一般の  $\ell, m$  に対して, 非定数解の存在・非存在の情報を与える, 全ての非定数定常解の大域的分岐ダイアグラムが明らかにした. これにより, 各分岐ダイアグラムは曲線であり,  $\ell, m$  の値によって分岐構造は多彩に変化することがわかった. 特に  $0 < \ell < 1$  では 2 次分岐が起こり,  $\ell \geq 1$  では起こらない.

全ての定常解の構造が明らかにされ, 解の安定性を解析する目途が立ったことから, 本研究では, (SP) の線形化固有値問題を数値的に解き, 解の安定性を調べることを目標とする.

安定性解析の第 1 歩として, まず,  $0 < \ell < 1$  と比べて構造が単純な  $\ell \geq 1$  において, 解の安定性がどのように変化するかについて調べる.

図1は $\ell = 1.1$ における分岐ダイアグラムを $m$ の値を変えごとに描いたものである。図1内の黒色の放物線は式(3), (4), (5)を満たす解が存在する領域の境界を表す。なお、この解が一意的であることはよく知られている。この解を $\varphi(x; \bar{u}, d)$ とかく。ゆえに、 $d > 0$ かつこの曲線で囲まれた水色の領域が $\varphi(x; \bar{u}, d)$ の存在領域である。図1中の $m$ をとめるごとに描かれているのピンク色, オレンジ色の曲線は、式(6)を満たす $\varphi(x; \bar{u}, d)$ に対応する $(\bar{u}, d)$ である。

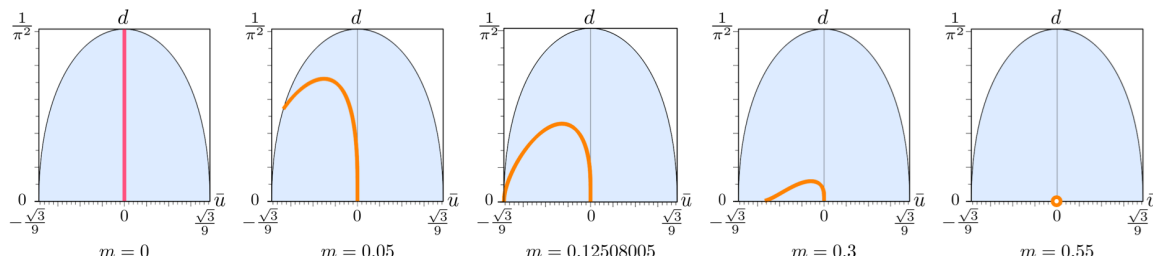


図1.  $\ell = 1.1$ における分岐ダイアグラム

$\varphi(x; \bar{u}, d)$ の安定性に関して、森(武蔵野大学数理工学センター紀要, 8, (2023))は、 $\ell \geq 1$ の場合において、 $\varphi(x; \bar{u}, d)$ を数値的に求め、それを初期値とした時間発展問題(PFM;(0,1))を解き、安定性を調べている。しかしながら、(SP)の分岐構造を捉えるために必要不可欠な線形化固有値問題の考察はなされていない。そこで、本講演では、 $\ell \geq 1$ の場合に(SP)の線形化固有値問題を数値的に解くことで、 $\varphi(x; \bar{u}, d)$ と対応する固有値, 固有関数の情報について得られた結果を報告する。

図2は、 $\ell = 1.1$ ,  $m = 0.05$ における分岐ダイアグラム(図1の左から2番目)上の解 $\varphi(x; \bar{u}, d)$ の安定性に関する数値計算結果である。 $m = 0.05$ のとき、分岐ダイアグラムは定数解と内部層を持つ解をつなぐ曲線となる。図2中の左右に並んだ緑色のグラフは黄色点 $(\bar{u}, d)$ における解形状を表す。赤色の曲線上には不安定な解があり、青色の曲線上には安定な解がある。

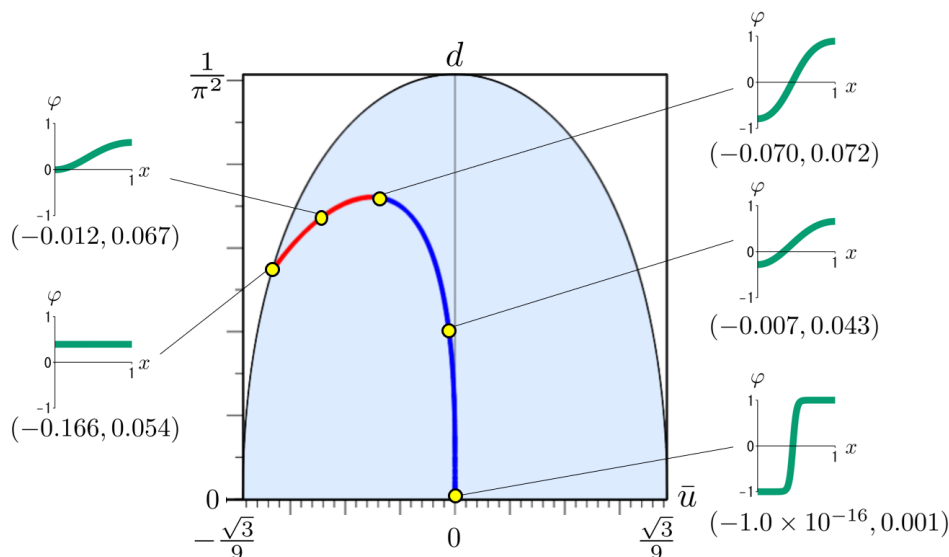


図2.  $\ell = 1.1$ ,  $m = 0.05$ における解形状とその安定性

固有値と解形状等の詳細, 他の $m$ の値における分岐ダイアグラム上の解の安定性については講演時に述べる。なお、本研究は、田崎 創平氏(北海道大学), 辻川 亨氏(宮崎大学名誉教授, 明治大学), 宮本 安人氏(東京大学), 四ツ谷 晶二氏(龍谷大学名誉教授)との議論に基づくものである。

# ある自己交差する閉曲線の曲線短縮問題における 曲線の漸近挙動に関する一考察

穴田 浩一<sup>1</sup>, 石渡 哲哉<sup>2</sup>, 牛島 健夫<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 早稲田大学高等学院, <sup>2</sup> 芝浦工業大学, <sup>3</sup> 東京理科大学  
e-mail: anada-koichi@waseda.jp

## 1 概要

$\mathcal{X}_0$  は曲率が正で自己交差する閉曲線,  $\alpha > 0$  とする. このとき,

$$\frac{d\mathcal{X}}{dt} = -\kappa^\alpha \mathcal{N} \quad \text{and} \quad \mathcal{X}(\cdot, 0) = \mathcal{X}_0$$

をみたす曲線の族  $\{\mathcal{X}(\cdot, t)\}$  の振る舞いについて考える. ここで,  $\kappa(\cdot, t)$  と  $\mathcal{N}(\cdot, t)$  は曲線  $\mathcal{X}(\cdot, t)$  の曲率と外向き単位法線である. この問題は, 外向き法線方向のなす角が  $\theta$  である曲線上の点における曲率を  $k(\theta, t)$  とおき,  $v(\theta, t) = (\alpha^{\frac{1}{\alpha+1}} k(\theta, t))^\alpha$ ,  $p = 1 + \frac{1}{\alpha}$  とおくと,  $\theta$  をパラメータとした, 次の準線形放物型偏微分方程式の解の振る舞いを考えることに帰着される.

$$v_t(\theta, t) = v(\theta, t)^p (v_{\theta\theta}(\theta, t) + v(\theta, t)) \quad \text{and} \quad v(\theta, 0) = v_0(\theta) := (\alpha^{\frac{1}{\alpha+1}} k_0(\theta))^\alpha. \quad (1)$$

ここで,  $k_0(\theta)$  は  $\theta$  をパラメータとした  $\mathcal{X}_0$  の曲率である. この問題に関するこれまでの研究としては,  $0 < \alpha \leq 1$  ( $p \geq 2$ ) の場合について, (1) の解  $v$  の漸近挙動や閉曲線  $\mathcal{X}$  の特異性に対する研究がある ([1], [2], [3] など). 一方,  $\alpha > 1$  ( $1 < p < 2$ ) の場合については, [4] の中でディリクレ問題に対する (1) の解の振る舞いについて考察されているが, 自己交差する閉曲線に対する曲線短縮問題の解の振る舞いに関することはあまり知られていない.

そこで, 本講演は, 図 1 のような閉曲線が初期曲線  $\mathcal{X}_0$  で,  $\alpha(p)$  が  $\alpha > 1$  ( $1 < p < 2$ ) をみたす場合に対する, (1) の解の漸近挙動について考察したい. 具体的には, (1) において,  $1 < p < 2$  で, かつ次の (V1), (V2), (V3), (V4) をみたすような  $v_0$  について考える.

(V1) 次をみたす 2 以上の整数  $m$  がとれる:

- $v_0(\theta + 2m\pi) = v_0(\theta)$  for  $\theta \in \mathbb{R}$
- $v_0(-\theta) = v_0(\theta)$  and  $v'_0(\theta) < 0$  if  $0 < \theta < m\pi$ .

(V2)  $v_0(\theta) \geq \varepsilon_0 > 0$  for  $\theta \in \mathbb{R}$ .

(V3)  $v''_0(\theta) + v(\theta) \geq 0$  for  $\theta \in \mathbb{R}$ .

(V4)  $\int_{-m\pi}^{m\pi} v_0(\theta)^{1-p} \cos \frac{\theta}{2m} d\theta < \infty$ .

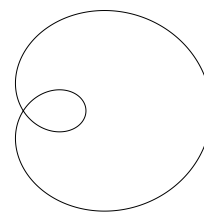


図 1:  $\mathcal{X}_0$  の例 ( $m = 2$ )

**注意**  $\alpha > 0$  ( $p > 1$ ) のとき, (V1), (V2), (V3), (V4) のもとで, (1) の解  $v$  は次をみたす.

- $v(\theta + 2m\pi, t) = v(\theta, t)$ .
  - $v(-\theta, t) = v(\theta, t)$  and  $v_\theta(\theta, t) < 0$  if  $0 < \theta < m\pi$ .
- 特に,  $v(0, t) = \max_{\theta \in [-m\pi, m\pi]} v(\theta, t)$ ,  $v(\pm m\pi, t) = \min_{\theta \in [-m\pi, m\pi]} v(\theta, t)$ .
- $v(\theta, t) \geq \varepsilon_0 > 0$ .
  - $v_t(\theta, t) = v(\theta, t)^p (v_{\theta\theta}(\theta, t) + v(\theta, t)) \geq 0$ .

## 2 主結果

**定理 1**  $p$  は  $1 < p < 2$  を,  $v_0$  は (V1), (V2), (V3), (V4) をみたすものとし,  $v$  を (1) の解とする. このとき, 次をみたす  $T_{\max} > 0$  と  $\gamma_\infty \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  が存在する:

- (i)  $\lim_{t \nearrow T_{\max}} v(0, t) = \infty$  かつ  $\lim_{t \nearrow T_{\max}} (T_{\max} - t)^{\frac{1}{p}} v(0, t) < \infty$ ,
- (ii)  $\theta \in (\gamma_\infty, m\pi)$  のとき,  $\sup_{t \in [0, T_{\max})} v(\theta, t) < \infty$ .

**注意**  $p$  が  $1 < p < 2$  をみたす場合の (1) の解  $v$  の振る舞いについて, 定理 1 (i) から,  $v$  の最大値が Type 1 爆発する. 一方, (ii) は, 有界な部分が残る (全領域での爆発ではない) ことを意味する.

**定理 2**  $p$  は  $1 < p < 2$  を,  $v_0$  は (V1), (V2), (V3), (V4) をみたすものとし,  $v$  を (1) の解,  $T_{\max}$  は定理 1 で与えられたものとする. また,

$$\tau := \log \frac{1}{T_{\max} - t}, \quad \mathcal{V}(\theta, \tau) := e^{-\frac{\tau}{p}} v(\theta, T_{\max} - e^{-\tau}) = (T_{\max} - t)^{\frac{1}{p}} v(\theta, t)$$

とおく. このとき, 次をみたす  $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\theta_\infty \in (\frac{\pi}{2}, m\pi)$ ,  $w \in C([- \theta_\infty, \theta_\infty]) \cap C^2((- \theta_\infty, \theta_\infty))$  が存在する:

- $\mathcal{V}(\theta, \tau_i) \rightarrow w(\theta)$  as  $i \rightarrow \infty$  uniformly in  $[- \theta_\infty, \theta_\infty]$ .
- $w$  は次をみたす:  $w_{\theta\theta} + w = \frac{1}{p} w^{1-p}$  in  $(- \theta_\infty, \theta_\infty)$ ,  $w(\pm \theta_\infty) = 0$ ,  $w(0) > 0$ .

さらに,  $\mathcal{V}$  の振る舞いについて, 次の結果を示すことができる.

**定理 3**  $p$  は  $1 < p < 2$  を,  $v_0$  は (V1), (V2), (V3), (V4) をみたすものとし,  $v$  を (1) の解とする. また,  $T_{\max}$ ,  $\{\tau_i\}$ ,  $\theta_\infty$ ,  $w$  は定理 1 と定理 2 で与えられたものとし,

$$w_p(\theta) := \left( \frac{2}{p(2-p)} \cos^2 \frac{p\theta}{2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

とおく. このとき, 次が成り立つ:

- (i)  $Z((T_{\max})^{\frac{1}{p}} v_0(\cdot) - w_p(\cdot)) \leq 2$  ならば,  $\theta_\infty = \frac{\pi}{p}$  で  $\mathcal{V}(\theta, \tau_i) \rightarrow w_p(\theta)$  uniformly in  $[-\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{p}]$ .
- (ii)  $\int_0^{\frac{\pi}{p}} \frac{\cos y}{v_0(y)^{p-1}} dy < 0$  ならば,  $\theta_\infty \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{p})$ ,  $w \neq w_p$ , かつ  $Z((T_{\max})^{\frac{1}{p}} v_0(\cdot) - w_p(\cdot)) > 2$ .

ここで,  $Z(f(\cdot))$  は関数  $f(\cdot)$  の零点数.

## 参考文献

- [1] Anada, K., Ishiwata, T., Ushijima, T.: Upper estimates for blow-up solutions of a quasi-linear parabolic equation, Japan J. Indust. Appl. Math. **41** (2024) 381–405.
- [2] Angenent, S. B.: On the formation of singularities in the curve shortening flow, J. Diff. Geo. **33** (1991) 601–633.
- [3] Angenent, S. B. and Velázquez, J. J. L.: Asymptotic shape of cusp singularities in curve shortening, Duke Math. J. **77** (1995) 71–110.
- [4] Winkler, M.: Blow-up of solutions to a degenerate parabolic equation not in divergence form, J. Diff. Eq. **192** (2003) 445–474.

## 離散半線形波動方程式の解の lifespan 評価

坪田 凌輔<sup>1</sup>, 松家 敬介<sup>2</sup>, 東 康平<sup>2</sup>, 佐々木 多希子<sup>2</sup>, 時弘 哲治<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 武蔵野大学大学院 工学研究科 数理工学専攻

<sup>2</sup> 武蔵野大学 工学部 数理工学科

e-mail : <sup>1</sup>g2386004@stu.musashino-u.ac.jp

### 1 はじめに

半線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = |u|^p & \text{in } \mathbb{R}^d \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = \varepsilon f(x), \quad u_t(x, 0) = \varepsilon g(x) & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (1)$$

を考える. ここで,  $p > 1$  とし,  $f, g$  は台コンパクトで滑らかな  $\mathbb{R}^d$  上の関数とする.  $\varepsilon > 0$  は十分小さなパラメータである. (1) の解の lifespan,  $T(\varepsilon)$  を

$$T(\varepsilon) = \sup \{ t > 0 \mid \text{任意に固定された } (f, g) \text{ に対して, (1) の解 } u(x, t) \text{ が存在する} \}$$

で定義する.

$d = 1$  のとき, Zhou (1992) により任意の  $p > 1$  に対し, ある正定数  $c, C$  が存在し,

$$\begin{cases} c\varepsilon^{-(p-1)/2} \leq T(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-(p-1)/2} & \text{if } \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \neq 0, \\ c\varepsilon^{-p(p-1)/(p+1)} \leq T(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-p(p-1)/(p+1)} & \text{if } \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 0 \end{cases}$$

が得られている.  $1 < p < p_c(d)$  ( $d \geq 3$ ), または,  $2 < p < p_c(d)$  ( $d = 2$ ) のときは, 次の結果が Zhou (1993), Lindblad (1990), Lai-Zhou (2014), Sideris (1984) らにより得られている.

$$c\varepsilon^{-2p(p-1)/\gamma(p,d)} \leq T(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{-2p(p-1)/\gamma(p,d)}.$$

ここで,  $\gamma(p, d) = 2 + (d+1)p - (d-1)p^2$  で,  $p_c(d)$  は  $\gamma(p, d) = 0$  の正根である.

本講演では, Matsuya [1] により提案された以下の差分方程式を考える.

$$u_n^{\tau+1} + u_n^{\tau-1} = \frac{4v_n^\tau}{2 - \delta^2 v_n^\tau |v_n^\tau|^{p-2}} \quad (n \in \mathbb{Z}^d, \tau \in \mathbb{Z}_{>0}). \quad (2)$$

ここで  $\delta > 0$ ,  $v_n^\tau = \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^d (u_{n+e_k} + u_{n-e_k})$  ( $e_k$  は第  $k$  成分が 1 の単位ベクトル) とする. Matsuya [1] により (2) は (1) の離散類似であることが報告された.

**定義 1** (2) の解  $u_n^\tau$  に対し, ある  $\tau_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$  が存在し,  $v_n^\tau \leq (2\delta^{-2})^{1/(p-1)}$  ( $\tau < \tau_0$ ,  $n \in \mathbb{Z}^d$ ) かつ, ある  $n_0 \in \mathbb{Z}^d$  が存在し,  $v_{n_0}^{\tau_0} \geq (2\delta^{-2})^{1/(p-1)}$  が成り立つとき,  $u_n^\tau$  は時刻  $\tau_0$  で爆発するといい,  $\tau_0$  を  $u_n^\tau$  の lifespan という.

Matsuya [1] では, 以下の結果が得られている.

**定理 2** (Theorem 2.2 in Matsuya [1])  $u_n^\tau$  を (2) の解とし,  $p > 1$  ( $d = 1$ ),  $1 < p \leq \frac{d+1}{d-1}$  ( $d \geq 2$ ) とする. また, 以下を仮定する.



$$(A1) \quad \{n \in \mathbb{Z}^d \mid u_n^j \neq 0\} \subset \{n \in \mathbb{Z}^d \mid \|n\| \leq K\} \quad (j = 0, 1, K > 0).$$

$$(A2) \quad \sum_n u_n^1 > \sum_n u_n^0.$$

ここで,  $\|n\| = |n_1| + \cdots + |n_d|$  ( $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ ) である. このとき, ある  $\tau_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$  が存在し,  $u_n^\tau$  は  $\tau_0$  で爆発する.

**注意 3**  $d \geq 2$  の場合,  $\frac{d+1}{d-1} < p \leq p_c(d)$  で (1) の解は有限時間で爆発することが示されているが, (2) の解が有限時間で爆発するかどうかは不明である.

## 2 主結果

Matsuya [1] では, 解の lifespan の評価は行われていなかった. そこで我々は, [2] の解析手法を離散化することで, (2) の解の lifespan の上からの評価を行い, 以下の結果を得た. (2) の初期条件は十分小さいパラメータ  $\varepsilon > 0$  を用いて,

$$u_n^0 = \varepsilon f_n, \quad u_n^1 = \varepsilon g_n \quad (n \in \mathbb{Z}^d) \quad (3)$$

と表せるとする. ここで,  $f_n, g_n$  は  $\mathbb{Z}^d$  上で定義された既知関数とする.

**定理 4**  $u_n^\tau$  を (2) の解とし,  $p > 1$  ( $d = 1$ ),  $1 < p \leq \frac{d+1}{d-1}$  ( $d \geq 2$ ) とする. また, (3), 定理 3 の (A1) および以下を仮定する.

$$(A2') \quad \sum_n g_n > \sum_n f_n > 0$$

このとき, (2) の解  $u_n^\tau$  の lifespan  $\tau_0(\varepsilon, \delta)$  は以下の不等式を満たす.

$$\tau_0(\varepsilon, \delta) \leq C \varepsilon^{-(p-1)/(d+1-(d-1)p)} \delta^{-2/(-d(p-1)+p+1)}.$$

ここで,  $C$  は  $\varepsilon, \delta$  に依存しない正定数である.

**注意 5**  $\tau_0(\varepsilon, \delta)$  の下からの評価や, (A2) の仮定の代わりに

$$\sum_n g_n = \sum_n f_n > 0$$

を仮定した場合の評価は得られていない.  $\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx = 0$  に対応する.

**注意 6**  $d = 1$  では, (1) と (2) の lifespan の上からの評価は一致する. しかし,  $d \geq 2$  の場合, 十分小さな  $\varepsilon > 0$  に対し,

$$\varepsilon^{-2p(p-1)/\gamma(p,d)} < \varepsilon^{-(p-1)/(d+1-(d-1)p)}$$

となり, (1) の lifespan 評価の方がシャープな評価となっている. これは離散線形波動方程式の解の漸近挙動の評価をすることで, (2) でも類似した評価が得られることが期待される.

## 参考文献

- [1] K. Matsuya, *A blow-up theorem for a discrete semilinear wave equation*, 19(3), Journal of Difference Equations and Applications (2013), 457-465.
- [2] H. Takamura, *Improved Kato's lemma on ordinary differential inequality and its application to semilinear wave equations*, TMA 125, Nonlinear Analysis (2015), 227-240.