

メタ代数と双直交有理関数 - Hahn Case

辻本 諭¹, Vinet Luc^{2,3}, Zhedanov Alexei⁴

¹ 京都大学, ² IVADO, ³ モントリオール大学, ⁴ 中国人民大学
e-mail : tsujimoto.satoshi.5s@kyoto-u.jp

1 はじめに

近年, 特殊関数とその応用に関する研究は多岐にわたり, その中でも Askey スキームに基づく直交多項式と有理関数の理論は重要な位置を占めている。本講演では, この Askey スキームを双直交有理関数 (BRFs) に拡張する手続きを提案する [1]。ここでの手続きは, BRFs と直交多項式 (OPs) の両方を統一的に扱うことを目指しており, 特に Hahn 型関数, すなわち終端条件が課せられた超幾何級数 ${}_3F_2$ に焦点を当てる。このアプローチにより, Askey スキームの双スペクトル性を内包するメタ代数を導入し, その特性を明らかにすることができる。

本発表では, はじめに, メタ代数の導入とその 3 つの生成元に関する有限次元二重対角表現について紹介する。次に, これらの生成元を用いて一般化固有値問題 (GEVP) および通常の固有値問題 (EVP) を設定し, それらの解として得られる基底に注目する。ここで得られる複数の基底の間の変換を通じて, 対象とする特殊関数の双スペクトル性および直交性について議論する。特に, Hahn 型関数を中心に議論を展開し, 直交多項式および双直交有理関数を単純な代数から導出する方法を与える。

2 メタ代数

ここで扱うメタ代数は, 3 つの生成元 X, Z, V を持ち, 特に \mathbb{R} 上の $(N+1)$ 次元モジュール \mathcal{M} を有する。これには, すべての生成元が二重対角的に作用する基底 $\{|n\rangle, n=0, \dots, N\}$ と, 任意の二つのベクトル $|x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{M}$ に対する内積 $\langle x | y \rangle$ が備わっている。Askey 型代数とそれに関連する有理代数の埋め込みに対応して, メタ代数は, V と $W = X + \rho Z$ ($\rho \in \mathbb{R}$) によるレナード対 [2] および (X, Z) と V を含む GEVP-EVP 対応を包含する特徴を持つ。

■ Bases for \mathcal{M}

- GEVP 基底 $\{|d_n\rangle\}, \{|d_n^*\rangle\}, n=0, \dots, N$:

$$(X - \lambda_n Z) |d_n\rangle = 0, \quad (X^\top - \lambda_n Z^\top) |d_n^*\rangle = 0 \quad (1)$$

- EVP 基底 $\{|e_n\rangle\}, \{|e_n^*\rangle\}, \{|f_n\rangle\}, \{|f_n^*\rangle\}, n=0, \dots, N$:

$$V |e_n\rangle = \mu_n |e_n\rangle, \quad V^\top |e_n^*\rangle = \mu_n |e_n^*\rangle \quad (2)$$

$$W |f_n\rangle = \nu_n |f_n\rangle, \quad W^\top |f_n^*\rangle = \nu_n |f_n^*\rangle \quad (3)$$

このとき, $m, n=0, 1, \dots, N$ に対して, 次の直交関係式を満たすことが示される。

$$\langle e_m^* | e_n \rangle = \kappa_n^{-1} \delta_{m,n}, \quad \langle f_m^* | f_n \rangle = \zeta_n^{-1} \delta_{m,n}, \quad \langle d_m^* | Z | d_n \rangle = w_n^{-1} \delta_{m,n} \quad (4)$$

■ Overlaps 基底間の展開係数に現れる m によってラベル付けされた離散変数 n の関数を導入する。

$$S_m(n) = \langle e_m | f_n^* \rangle, \quad \tilde{S}_m(n) = \langle e_m^* | f_n \rangle \quad (5)$$

このとき、次の直交関係式を満たすことが示される。

$$\sum_{n=0}^N \tilde{S}_m(n) S_{m'}(n) \zeta_n = \kappa_m^{-1} \delta_{m,m'}, \quad \sum_{m=0}^N \tilde{S}_m(n) S_m(n') \kappa_m = \zeta_n^{-1} \delta_{n,n'} \quad (6)$$

さらに、GEVP と EVP の基底を用いて

$$U_m(n) = \langle e_m \mid d_n^* \rangle, \quad \tilde{U}_m(n) = \langle e_m^* \mid Z \mid d_n \rangle \quad (7)$$

を導入することで、自然に有理関数の間の双直交関係式を導く直交性

$$\sum_{n=0}^N \tilde{U}_m(n) U_{m'}(n) w_n = \kappa_m^{-1} \delta_{m,m'}, \quad \sum_{m=0}^N \tilde{U}_m(n) U_m(n') \kappa_m = w_n^{-1} \delta_{n,n'} \quad (8)$$

が得られる。メタ代数の特徴の一つは、Leonard 対の GEVP アナログを含んでいることであり、これは X および Z が V の固有基底において二重対角行列で与えられる。この事実を出発点にするこ
とで、 $U_m(n)$ が二つの二重対角行列に関する一般化固有値方程式を満たし、[3] で示されているよう
に、双直交パートナーが $\tilde{U}_m(n)$ に含まれる有理関数で構成されることがわかる。

本講演では、次のメタ Hahn 代数を取り上げ、Hahn 型関数を中心に議論を展開し、OPs と BRFs
を代数から具体的に構成する。

定義 1 X, Z, V を生成元とするメタ Hahn 代数 $m\mathfrak{H}$

$$[Z, X] = Z^2 + Z, \quad (9)$$

$$[X, V] = \{V, Z\} + V + \xi I \quad (10)$$

$$[V, Z] = 2X + \eta I. \quad (11)$$

ここで、 $[A, B] = AB - BA$, $\{A, B\} = AB + BA$ である。

ここでの成果は、Askey スキームの拡張と特殊関数理論の発展に寄与するものであり、Racah 型お
よびその q 類似への適用を可能とするものである。

参考文献

- [1] S. Tsujimoto, Luc Vinet, A. Zhedanov, Meta Algebras and Biorthogonal Rational Func-
tions: The Hahn Case, <http://arxiv.org/abs/2405.05692v1>.
- [2] P. Terwilliger, Introduction to Leonard pairs, J. Comput. Appl. Math., **153** (2003), 463–
475.
- [3] A. Zhedanov, Biorthogonal rational functions and the generalized eigenvalue problem,
J. Approx. Theory **101** (1999), 303–329.
- [4] S. Tsujimoto, Luc Vinet and A. Zhedanov, An algebraic description of the bispectrality
of the biorthogonal rational functions of Hahn type, Proc. Am. Math. Soc., **149** (2021)
715–728
- [5] Luc Vinet and A. Zhedanov, A unified algebraic underpinning for the Hahn polynomials
and rational functions, J. Math. Anal. Appl., **497** (2021) 124863.

定数係数ベルヌーイ方程式の不等間隔で高次精度な可積分差分

村 昌治¹, 近藤 弘一²

¹ 同志社大学, ² 同志社大学

e-mail : mmsk3053@outlook.jp

1 研究目的

可積分差分法とは、方程式と解の構造を保持したまま離散化する手法である。最初の可積分差分が提案された例は、ロジスティック方程式 $dx/dt = \lambda x(1-x)$, $x = x(t)$ の離散化であり、得られた方程式は森下差分 [1] と呼ばれている。森下差分の解のグラフは、差分間隔を変化させても、元の連続系の解のグラフと一致している。しかしながら、連続系に対する離散系の局所離散化誤差の精度は、可積分差分と言えども 1 次であり、数値的には十分小さいとはいえない。

可積分差分法の高次精度化は、長年に渡って課題であったが、[2] により新たな手法が提案された。この手法では、指数関数 e^t を有理式 $\eta_{l,l'}(t)$ で近似することが特徴である。 $\eta_{l,l'}(t)$ の分子を l 次多項式、分母を l' 次多項式とおく。 $\eta_{l,l'}(t) - e^t = O(t^{l+l'+1})$ ($t \rightarrow 0$) が成り立つとき、 $\eta_{l,l'}(t)$ を $[l/l']$ パデ近似 (参照 [3]) と呼ぶ。 e^t の $[l/l']$ パデ近似は、 $l \geq l'$ のときは

$$\begin{aligned} \eta_{0,0}(t) &= 1, & \eta_{1,0}(t) &= 1+t, & \eta_{2,0}(t) &= (2+2t+t^2)/2, & \eta_{1,1}(t) &= (2+t)/(2-t), \\ \eta_{3,0}(t) &= (6+6t+3t^2+t^3)/6, & \eta_{2,1}(t) &= (6+4t+t^2)/(6-2t), & \dots \end{aligned}$$

となり、 $l < l'$ のときは $\eta_{l,l'}(t) = (\eta_{l',l}(-t))^{-1}$ となる。離散点 $\{t_n | n \in \mathbb{Z}\}$ を連続座標 t のサンプリング点とすると、差分間隔は $\epsilon_n = t_{n+1} - t_n > 0$ であり不等間隔となる。前進差分を $\Delta x_n = (x_{n+1} - x_n)/\epsilon_n$ とおく。[2] では、同次線形方程式と、ロジスティック方程式に関する可積分差分を提案している。基本解 $e^{-\lambda t}$ を $[l/l']$ パデ近似すると $\eta_{l,l'}(-\lambda t)$ である。不等間隔で $l+l'$ 次の精度をもつ離散ロジスティック方程式は

$$\Delta x_n = \tilde{\lambda}_n x_{n+1}(1-x_n), \quad \tilde{\lambda}_n = -\frac{\eta_{l,l'}(-\lambda \epsilon_n) - 1}{\epsilon_n} \quad (1)$$

と導出される。(1) は連続極限でロジスティック方程式に近づく。また、実数 t に対して $t_n \leq t < t_{n+1}$ のとき、 $\text{floor}(t) = t_n$, $\text{index}(t) = n$ とおく。離散ロジスティック方程式 (1) の一般解は、

$$x_n = \frac{1}{1 + \phi(t_n)(x_0^{-1} - 1)}, \quad \phi(t) = \eta_{l,l'}(-\lambda(t - \text{floor}(t))) \prod_{n'=0}^{\text{index}(t)-1} \eta_{l,l'}(-\lambda \epsilon_{n'}) \quad (2)$$

と求まる。(2) は連続極限で連続系の一般解に近づく。(1) は高次精度な可積分差分といえる。

新たな高次精度可積分差分法 [2] では、同次線形方程式の可積分差分化ができる。残る課題は、非同次線形方程式に関する可積分差分化である。本発表では、定数係数ベルヌーイ方程式

$$-M \frac{dx}{dt} = px + qx^m, \quad M = m - 1 \quad (3)$$

について考える。ただし、未知関数 $x = x(t) \in \mathbb{R}$ であり、 m は 2 以上の整数で、 $p, q \in \mathbb{R}$ は非零な定数である。(3) は従属変数変換 $u = 1/x^M$ を用いると、非同次線形方程式 $du/dt = pu + q$ に変換される。この方程式とその一般解を同時に差分化し、従属変数変換で元に戻すことで、(3) の可積分差分を得ることができる。これらが、本発表の目的である。

2 主結果

定数変化法で $du/dt = pu + q$ の解を求め、従属変数変換 $u = 1/x^M$ を用いると、(3) の一般解は

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[M]{\left(\frac{1}{x(0)^M} + \frac{q}{p}\right)e^{pt} - \frac{q}{p}}} \quad (4)$$

と求めることができる. (3), (4) を同時に提案手法で離散化すると、ベルヌーイ方程式の不等間隔で高次精度な可積分差分として、次の定理が得られる.

定理 1. ベルヌーイ方程式 (3) の未知関数 $x(t)$ を離散点 $\{t_n\}$ で近似し、離散未知関数を x_n とおく. 指数関数 e^{pt} の $[l/l']$ パデ近似 $\eta_{l,l'}(pt)$ を用いて、離散関数 \tilde{p}_n , \tilde{M}_n を

$$\tilde{p}_n = \frac{\eta_{l,l'}(p\epsilon_n) - 1}{\epsilon_n}, \quad \tilde{M}_n = \frac{1 - (x_{n+1}/x_n)}{1 - (x_{n+1}/x_n)^M} \quad (5)$$

と導入する. 未知関数 x_n に関する差分方程式

$$-\tilde{M}_n \Delta x_n = \frac{\tilde{p}_n x_n + q x_n^m (\tilde{p}_n/p)}{1 + \epsilon_n \tilde{p}_n + \epsilon_n q x_n^M (\tilde{p}_n/p)} \Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt[M]{1 + \epsilon_n \tilde{p}_n + \epsilon_n q x_n^M (\tilde{p}_n/p)}}, \quad (6)$$

は一般解を求めることができ、その解は e^{pt} の離散点 $\{t_n\}$ における $[l/l']$ パデ近似 $\phi(t)$ を用いて、

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[M]{\left(\frac{1}{x_0^M} + \frac{q}{p}\right)\phi(t_n) - \frac{q}{p}}}, \quad \phi(t) = \eta_{l,l'}(p(t - \text{floor}(t))) \prod_{n'=0}^{\text{index}(t)-1} \eta_{l,l'}(p\epsilon_{n'}) \quad (7)$$

と表される. 連続極限において、(6) の第 1 式はベルヌーイ方程式 (3) へ近づき、一般解も (7) から (4) へ近づく. 離散系 (6) の連続系 (3) に対する局所離散化誤差の精度は $l + l'$ 次である.

$[l/l']$ パデ近似における離散関数 \tilde{p}_n を具体的に書くと、

$$\frac{\tilde{p}_n}{p} = 1 \text{ if } [1/0], \quad \frac{\tilde{p}_n}{p} = \frac{1}{1 - \epsilon_n p} \text{ if } [0/1], \quad \frac{\tilde{p}_n}{p} = 1 + \frac{\epsilon_n p}{2} \text{ if } [2/0], \quad \frac{\tilde{p}_n}{p} = \frac{1}{1 - \epsilon_n p/2} \text{ if } [1/1], \quad \dots$$

となる. また、時間発展において、(6) の第 2 式は陽的な離散方程式であり、第 1 式は陰的な差分方程式である. この (6) の第 1 式は、連続極限において、 $\epsilon_n \rightarrow 0$, $x_n \rightarrow x(t)$, $\tilde{M}_n \rightarrow M$, $\tilde{p}_n \rightarrow p$, となるので、(3) へ近づく. また、(7) は、 $\phi(t_n) \rightarrow e^{pt}$ となるので、(4) へ近づく.

離散指数関数 $\phi(t_n)$ の幾つかの性質については、本発表で示す. 方程式 $du/dt = pu + q$ における定数変化法や、その際の積分計算においても、可積分な差分化が可能であることを示す. 残る課題は、 p , q が関数係数の場合である. この課題の一部を議論する.

参考文献

- [1] M. Morishita, The fitting of the logistic equation to the rate of increase of population density, *Researches on Population Ecology*, **7** (1965), 52–55.
- [2] M. Mura, K. Kondo, Integrable discretization of linear and logistic equations under random intervals with higher-order accuracy, *JSIAM Letters* Vol.16(2024), 45–48.
- [3] G. A. Baker, Jr. and P. Graves-Morris, *Padé Approximants* 2nd ed., Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1996.

データ駆動型の偏微分方程式の推定～可積分系を用いた実験

上岡 修平, 小山田 耕二, 夏川 浩明, 劉 継紅
大阪成蹊大学データサイエンス学部
e-mail : kamioka@osaka-seikei.ac.jp

1 偏微分方程式の推定

現象の観測結果から、その現象を支配する偏微分方程式 (PDE) を推定することは、物理学における基本問題である。PDE の推定では、近年、計算機資源の増大やデータ科学技術の発展を受けてデータ駆動型の手法が注目を集めている。データ駆動型の手法では、収集した観測データに適合する PDE を何らかの方法で推定する。方程式の推定の過程では、スパース回帰や深層学習などデータ科学の様々な技法が活用される [1, 2, 3]。

本稿で扱う推定問題について説明する。観測する物理量を $u = u(t, x)$ とする。(簡単のため $1 + 1$ 次元の場合を考える。) 設定したライブラリ Λ に対して、次の形式の PDE を想定する。

$$u_t = \sum_{\tau \in \Lambda} c_\tau \tau \quad (c_\tau : \text{定数}) \quad (1)$$

例えば、PDE の形式として $u_t = c_1 + c_2 u + c_3 u_x + c_4 u^2 + c_5 u u_x + c_6 u_x^2$ を想定する場合、ライブラリは $\Lambda = \{1, u, u_x, u^2, u u_x, u_x^2\}$ と設定する。

PDE の推定問題. 与えられたデータセット

$$(t_i, x_i) \quad \text{and} \quad u(t_i, x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_D \quad (2)$$

に対して、それに適合する PDE (1) を (すなわち係数 c_τ を) 推定せよ。

本稿で着目するのは PDE の推定精度である。特に、機械学習に基づく推定手法について、可積分系を用いた数値実験を通して、データセットの違いが推定精度に与える影響について報告する。

機械学習に基づく PDE の推定手法として、本稿では、構成が単純な DL-PDE [3] を採用する。DL-PDE は (人工) ニューラルネットワークとスパース回帰の技法を組み合わせた手法であり、次の流れで PDE を推定する。

- 教師あり学習により、与えられたデータセット (2) に適合する (すなわちデータセットを補間する) ニューラルネットワークモデル $\hat{u} = \hat{u}(t, x)$ をつくる。
- ニューラルネットワークモデル \hat{u} を用いて、偏微分を含む新たなデータセット

$$(t'_j, x'_j) \quad \text{and} \quad \hat{u}(t'_j, x'_j), \hat{u}_t(t'_j, x'_j), \hat{u}_x(t'_j, x'_j), \hat{u}_{xx}(t'_j, x'_j), \dots, \quad j = 1, 2, \dots, N_R \quad (3)$$

をつくる。偏微分の計算にはニューラルネットワークの自動微分を用いる。

- STRidge 法 [2] を用いたスパース回帰により、データセット (3) から PDE (1) の係数 c_τ を推定する。

2 可積分系を用いた数値実験

可積分系のひとつである Korteweg-de Vries (KdV) 方程式

$$u_t = -u_{xxx} - 6uu_x \quad (4)$$

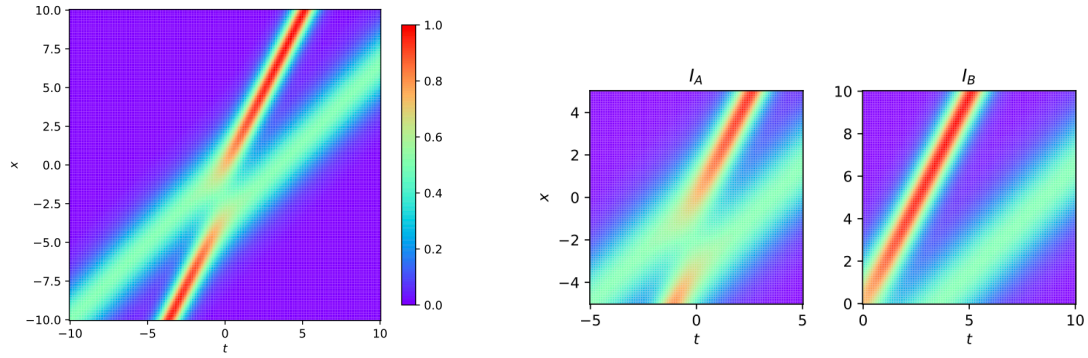


図 1. KdV 方程式の 2 ソリトン解 (ヒートマップ). 異なる領域 I_A, I_B で解の挙動が異なる.

を考える. KdV 方程式には N ソリトン解とよばれる初等的な厳密解がある [4]. KdV 方程式のような厳密解を持つ可積分系は, PDE の推定精度を実際に測ることができるため便利である.

図 1 は KdV 方程式の 2 ソリトン解である. 2 ソリトン解の中に異なる領域 I_A, I_B を考えている. 数値実験では, 2 つの領域から収集した同サイズのデータセットのそれぞれから, DL-PDE を用いて PDE を推定した. ただしライブラリ Λ は, 3 階以下の偏導関数 u, u_x, u_{xx}, u_{xxx} のつくる 2 次以下の単項式をすべて集めたものとした. 結果として得られた PDE は次の通りである.

$$\begin{aligned} I_A : \quad u_t &= -5.780u_{xxx} - 0.9219uu_x \\ I_B : \quad u_t &= -5.999u_{xxx} - 0.9911uu_x \end{aligned} \tag{5}$$

明らかに, 推定精度は I_A よりも I_B の方がよい.

このような, データセットの取り方の違いに起因する推定精度の違いは, 他の場合でも現れる. 詳細は講演内で報告する.

謝辞 本研究は, 国立研究開発法人日本原子力研究開発機構「廃炉・汚染水・処理水対策事業費補助金 (原子炉建屋内の環境改善のための技術開発 (被ばく低減のための環境・線源分布のデジタル化技術の高機能化開発))」の一部として行われたものである.

参考文献

- [1] S. L. Brunton, J. L. Proctor and J. N. Kutz, *Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems*, Proc. Natl. Acad. Sci. **113** (2016), 3932–3937.
- [2] S. H. Rudy, S. L. Brunton, J. L. Proctor and J. N. Kutz, *Data-driven discovery of partial differential equations*, Sci. Adv. **3** (2017), e1602614.
- [3] H. Xu, H. Chang and D. Zhang, *DL-PDE: Deep-learning based data-driven discovery of partial differential equations from discrete and noisy data*, Commun. Comput. Phys. **29** (2021), 698–728.
- [4] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1095.

二次元格子上的吸脱着付き非対称単純排他過程の厳密解

石黒 裕樹^{1,2}, 佐藤 純¹

¹ 東京工芸大学, ² 東京大学 物性研究所

e-mail: yk.14guro@gmail.com

1 概要

相互作用する多体系を解析することは一般に難しい。厳密に解ける可解模型は、多体系の物理を探索する基盤的役割を担っている。また、可解性の背後には奥深い構造が潜んでおり、新しい数学を生み出す契機を与えている。しかし、可解模型の研究の多くは、空間一次元系（1+1次元系）に限られている。より多様な現象を捉えるためには、高次元系へ可解模型の理論を拡大する必要がある。

我々は、非対称単純排他過程（ASEP）とよばれる可解模型を例として、高次元可解模型の理論を研究してきた。ASEP とは、排他的相互作用する粒子の非対称ランダムウォークを記述する格子模型である。単純な模型でありながら、渋滞への流れの相転移や KPZ 普遍クラスなど、豊かな非平衡物理を含み、交通流を始めとした幅広い分野に応用されている。一次元系の場合には、量子群や行列積仮説、ベータ仮説等の手法により、厳密に解けることが知られている。

論文 [1] では、我々は高次元格子上的 ASEP を考え、「遷移の分離」という概念を導入することで、定常状態が任意の次元で厳密に解けることを明らかにした。ただし、ここでは境界条件として、閉・周期境界条件とその組み合わせを考えており、系全体の粒子数が保存する状況であった。

本講演では、二次元格子上的 ASEP に粒子の吸着・脱着を導入して、粒子数の保存が成立しない状況を考える [2]。このような状況下でも、特定の条件下では定常状態を厳密に構成できることを示す。更に、その結果を応用して、準一次元流れの解析を行い、二次元性による流れの性質の変化を明らかにする。

2 模型

本講演では、二次元 ASEP に粒子の吸脱着効果 (Langmuir kinetics) を導入した確率過程模型 (ASEP-LK) を考える。ASEP-LK は次のように定義する。図 1 に示すように、二次元格子上的多体系を考える。各セルは粒子がいる・いないの二状態をとる。各粒子は、レート $p_x \cdot q_x \cdot p_y \cdot q_y$ で右・左・上・下のセルへ移動する。ただし、排他的相互作用により、既に粒子がいるセルには移動できない。更に、レート $\omega_a \cdot \omega_d$ で粒子がセルに吸着・脱着する。

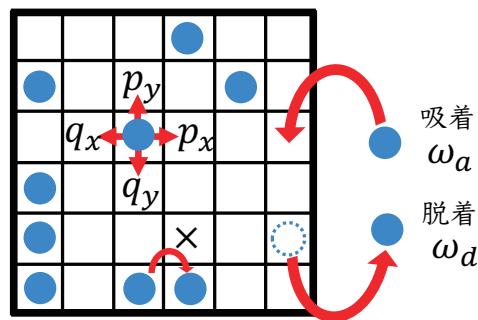


図 1. 二次元 ASEP-LK の模式図

ASEP-LK の時間発展は、以下に示すマスター方程式によって記述される。

$$\frac{d}{dt}|P(t)\rangle = \mathcal{H}|P(t)\rangle \quad (1)$$

ただし、 $|P(t)\rangle$ は時刻 t における状態を記述するベクトルであり、粒子配置 n に対応するベクトル $|n\rangle$ とその実現確率 $P(n, t)$ により $|P(t)\rangle = \sum_n P(n, t)|n\rangle$ と表される。マルコフ行列 \mathcal{H} は、位置 \mathbf{r}

のセルに作用するパウリ行列 $\sigma_{\mathbf{r}}^{x,y,z}$ ($\hat{S}_{\mathbf{r}}^{\pm} := (\sigma_{\mathbf{r}}^x \pm i\sigma_{\mathbf{r}}^y)/2$, $\hat{n}_{\mathbf{r}} := (1 - \sigma_{\mathbf{r}}^z)/2$) を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{i \in \{x,y\}} \sum_{x,y} \left[p_i \left\{ \hat{S}_{\mathbf{r}}^+ \hat{S}_{\mathbf{r}+\mathbf{e}_i}^- - \hat{n}_{\mathbf{r}} (1 - \hat{n}_{\mathbf{r}+\mathbf{e}_i}) \right\} + q_i \left\{ \hat{S}_{\mathbf{r}}^- \hat{S}_{\mathbf{r}+\mathbf{e}_i}^+ - (1 - \hat{n}_{\mathbf{r}}) \hat{n}_{\mathbf{r}+\mathbf{e}_i} \right\} \right] \\ & + \sum_{\mathbf{r}} \left[\omega_a \left\{ \hat{S}_{\mathbf{r}}^- - (1 - \hat{n}_{\mathbf{r}}) \right\} + \omega_d \left\{ \hat{S}_{\mathbf{r}}^+ - \hat{n}_{\mathbf{r}} \right\} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

と与えられる。マスター方程式 (1) は虚時間 Schrödinger 方程式と等価であり、ASEP-LK は非対角磁場つき非エルミートハイゼンベルグ模型とみなすことができる。

3 主結果

ASEP-LK では、初期状態からの時間発展を考えると、しばらく状態が変化した後、必ず定常状態が実現される。そのため、その性質を理解することは重要であり、本講演では定常状態に焦点を当てて議論を行う。

定常状態では $\frac{d}{dt}|P(t)\rangle = 0$ が成り立つため、マスター方程式 (1) は

$$\mathcal{H}|P(t)\rangle = 0 \quad (3)$$

となる。したがって、定常状態はマルコフ行列 \mathcal{H} の固有値ゼロの固有ベクトルに対応する。我々は、その厳密な表式を得ることに成功した [2]。

ASEP-LK では粒子数が保存しないため、[1] と同様の方法から直ちに定常状態を構成することはできない。しかし、周期境界条件の場合は、[1] の結果を応用することで、定常状態を厳密に構成できることが明らかになった。また、閉境界条件やマルチレーン境界条件（閉・周期境界条件の複合）の場合には、吸脱着レートの大きさ ($\omega := \omega_a + \omega_d$) を無限小とする極限（吸脱着比 ($\alpha := \omega_a/\omega_d$) は固定）における定常状態の解の予想を得た。更に、これらの成果を応用して、マルチレーン境界条件における ASEP-LK の解析を行い、準一次元流れの性質が二次元性によってどのように変化するかを解明した。講演では、以上の成果について紹介する。

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP24K16976 の助成を受けたものです。.....

参考文献

- [1] Yuki Ishiguro, Jun Sato, Exact steady states in the asymmetric simple exclusion process beyond one dimension, *Physical Review Research*, **6**, 033030 (2024).
- [2] Yuki Ishiguro, Jun Sato, Exact analysis of the two-dimensional asymmetric simple exclusion process with attachment and detachment of particles, arXiv: 2405.09261 (2024).