形状制約なし AND-OR 木に関する均衡値不等式の分離と崩壊

鈴木 登志雄 [1], 伊藤 風輝 [1,2]
[1] 東京都立大学，[2] サーバーワークス
e-mail：toshio-suzuki@tmu.ac.jp

1　AND-OR 木とアルゴリズム

[AND-OR 木はミニマックス木の一種である]　ゼロサム 2 人ゲームにおいて「対戦相手は十分賢いので毎回，自分に最大の損害を与える手を打ってくる」と想定し，自分の損害を最小化する手を選ぶやり方をミニマックス戦略という．ミニマックス木は，この戦略に基づくゲームの展開を抽象化した木である．根はゲーム開始の局面を表し，各ノードがゲームの局面を表す．各ノードの値を上げたいプレイヤー I のターンと，下げたいプレイヤー II のターンが交互に現れるため，ノード x の子ノードの値の最大値を x の値とする MAX レイヤーと，最小値とする MIN レイヤーが交互に現れる．ミニマックス木の葉に割り当てられる値を 0 と 1 の 2 値にしたものが AND-OR 木である．このとき最小値（最大値）をとる演算はブール演算としての AND（OR）になる．黎明期の研究（例，[1]）において，AND-OR 木はミニマックス木を研究するためのトイモデル（簡単な特殊ケース）であったと思われる．

[ブール決定木で AND-OR 木を探索する]　AND-OR 木 T を一つ固定し，根の値を求めるアルゴリズムとしてブール決定木 α を考える．α の内部ノードは T の葉（たとえば x とする）であり，α は x のブール値を質問する．α において x からはブール値（0，1）のラベルが付いた矢印が出ていく．T の根の値を求める情報がまだ揃っていないとき矢印の行き先は T の別の葉である．そうでないときは T の根の値を出力する，すなわち矢印の行き先は α の葉であり，α の葉に出力をラベル付けする．このようなブール決定木を，我々は決定性アルゴリズムと呼ぶ．決定性という修飾語は，乱数を使っていないという意味である．決定性アルゴリズムはクヌース・ムーアのアルファ・ベータ法 [2] と同様のカットを行うものとする．たとえば T の AND ノード x の子ノードの一つ z について，z の値が 0 であると α が知った時点を考える．ここでの「時点」とは，α のある内部ノードから出る矢印である．その時点で α は x の値が 0 であると判断し，それ以降は T における x の子孫を探索しない．ここでの「それ以降」とは，α における，上記「時点」にぶら下がる部分木のことである．T の OR ノードについても同様とする．

[質問回数で計算コストを測る]　AND-OR 木 T の葉をブール変数，T をブール式と見ると，T は論理記号として AND と OR のみを用い，各々のブール変数が高々 1 回しか現れない式である．決定性アルゴリズム α は乱数を使わずに T の葉の値について質問を繰り返しながら T の真理値を求める決定木である．T を固定し，T の葉への付値（真理値割り当て）ω を与えたとき，α のコストとは計算の途中で α が値を尋ねた T の葉の個数であると定める．

$$\mathrm{cost}(\alpha, \omega) := (\alpha \text{ が値を尋ねた } T \text{ の葉の個数}) \tag{1}$$

T を固定して ω と α を動かすとき, 以下に定義する量, T の決定木計算量（decision tree complexity）$D(T)$ に注目する．ω は T の葉への付値全体を走り，α は T の決定性アルゴリズム全体を走る．

$$D(T) := \min_{\alpha} \max_{\omega} \mathrm{cost}(\alpha, \omega) \tag{2}$$

[ブール決定木の確率分布を乱択アルゴリズムと呼ぶ]　T の決定性アルゴリズム全体を $\mathcal{A}(T)$ とする．$\mathcal{A}(T)$ 上の確率分布を T の乱択アルゴリズム（randomized algorithm）と呼ぶ．T の乱択アルゴリズムは無限個ある．乱択アルゴリズムについては，コストの期待値を単にコストと呼ぶ．以下に定義する T の乱択計算量（randomized complexity）$R(T)$ は，T の複雑さの目安であると考えられている．ω は T の葉への付値全体を走り，A は T の乱択アルゴリズム全体を走る．T によっては $R(T) < D(T)$ が成り立つ [3]．すなわち，ランダム性の導入によってアルゴリズムの効率がよくなる場合がある．

$$R(T) := \min_{A} \max_{\omega} \mathrm{cost}(A, \omega) \tag{3}$$

[均衡値の不等式についての先行研究]　T の決定性アルゴリズムを深さ優先（depth-first）探索に限り，それらから得られる乱択アルゴリズムのみを A が走るとき，$R(T)$ と同様に定義される量を $R_{\mathrm{DF}}(T)$ と表そう．A が走る範囲をさらに，Saks-Wigderson のディレクショナル・アルゴリズムというものに制限するとき，$R(T)$ と同様に定義される量を $d(T)$ と表す [3]．自明な不等式は $R(T) \leq R_{\mathrm{DF}}(T) \leq d(T)$ である．T が完全 2 分木で AND レイヤーと OR レイヤーが交互に現れるとき $R(T) = R_{\mathrm{DF}}(T) = d(T)$ が成り立つ [3]．Vereshchagin は $R(T) < d(T)$ が成り立つ木 T を発見した [4]．黎明期の研究が想定したよりも AND-OR 木の数学的性質は難しく奥深いようであり，ブール関数の複雑さという観点からチャレンジしがいのある研究対象である．

2　我々の結果

$R(T)$ と $d(T)$ の断層はどこにあるのだろうか．我々は木の形の対称性についての仮定なしで均衡値の自明でない等式 (4) を（数値実験によるのではなく，数学的に厳密に）証明した．この等式と先行研究 [4] により，プロパーな不等式 (5) が導かれる．本研究によって，AND-OR 木の深さ優先探索についてのより深い理解が得られた．本講演ではプレプリント [5] に基づき証明の着想を紹介する．

$$\text{すべての } T \text{ に対して } R_{\mathrm{DF}}(T) = d(T) \tag{4}$$

$$\text{ある } T \text{ に対して } R(T) < R_{\mathrm{DF}}(T) \tag{5}$$

謝辞　以下から部分的に援助を受けた．鈴木：日本学術振興会 科研費 21K03340．伊藤：科学技術振興機構 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業，JPMJFS2139.

参考文献

[1] M. Tarsi, Optimal search on some game trees, J. ACM 30 (1983) 389–396.

[2] D.E. Knuth, R.N. Moore, An analysis of alpha–beta pruning, Artif. Intell. 6 (1975), 293–326.

[3] M. Saks, A. Wigderson, Probabilistic Boolean decision trees and the complexity of evaluating game trees, In: Proc. 27th IEEE FOCS (1986) 29–38.

[4] N.K. Vereshchagin, Randomized Boolean decision trees: several remarks, Theoret. Comput. Sci., 207 (1998), 329–342.

[5] Fuki Ito, and Toshio Suzuki, Separation and collapse of equilibria inequalities on AND-OR trees without shape constraints, arXiv:2405.20138 [cs.AI] (2024).

三角形フリー 2 マッチング問題に対する $(1-\varepsilon)$-近似アルゴリズム

野口 貴志 [1], 小林 佑輔 [2]
[1,2] 京都大学
e-mail : [1]tnoguchi@kurims.kyoto-u.ac.jp, [2]yusuke@kurims.kyoto-u.ac.jp

1 概要と主結果

三角形フリー 2 マッチング問題とは，与えられた単純無向グラフ $G=(V,E)$ に対して，最大サイズの三角形フリー 2 マッチング $M \subseteq E$ の出力を目指す問題である．ここで三角形フリー 2 マッチングとは，各頂点の次数が 2 以下であり，かつサイズ 3 のサイクル（以降**三角形**と呼ぶ）を含まない辺集合を指す．三角形フリー 2 マッチング問題を厳密に解く多項式時間アルゴリズムは，1984 年に Hartvigsen が初めて提案しており，その論文の修正版が 2024 年に出版されている [1]．しかし，そのアルゴリズムと解析は難解であり，正当性の検証は困難であった．一方，三角形フリー 2 マッチング問題はサバイバルネットワークデザイン問題を近似的に解くアルゴリズムへの応用という文脈でも研究されており，その文脈では PTAS（任意の $\varepsilon > 0$ に対して多項式時間 $(1-\varepsilon)$-近似アルゴリズムを構成するスキーム）にも価値がある．そのような動機から Bosch-Calvo，Grandoni，Ameli によってシンプルな局所探索を用いた PTAS（アルゴリズム 1）が提案された [2]．しかし，このアルゴリズム自体は単純でありながらも，その正当性の証明には技巧的な補題が用いられている．

アルゴリズム 1 三角形フリー 2 マッチング問題に対する $(1-\varepsilon)$-近似アルゴリズム

$APX \leftarrow \emptyset$
while $\exists$ トレイル $P \subseteq E$ s.t. (1) $|P| \leq 2/\varepsilon$, (2) $APX \triangle P$ が $|APX|$ よりサイズが大きい三角形フリー 2 マッチング **do**
  $APX \leftarrow APX \triangle P$
end while
return APX

本研究の主結果は，三角形フリー 2 マッチングに関する以下の自然な分解定理を証明したことであり，アルゴリズム 1 の正当性はこの定理からも導くことができる．ここで，2 マッチングの組 (A_1, A_2) **に関する交互トレイル**とは，$A_1 \setminus A_2$ の辺と $A_2 \setminus A_1$ の辺を交互に通るトレイル (同じ頂点を通ることを許したパス）である．

定理 1 (三角形フリー 2 マッチングに関する分解定理)**.** G を単純グラフ，A_1，A_2 を G の三角形フリー 2 マッチングとする．このとき，$A_1 \triangle A_2$ の (A_1, A_2) に関する交互トレイルへの分割 $\mathcal{P}$ で，任意の $P \in \mathcal{P}$ と $i = 1, 2$ で $A_i \triangle P$ が三角形フリー 2 マッチングとなるようなものが存在する．

系 2. アルゴリズム 1 は三角形フリー 2 マッチング問題の $(1-\varepsilon)$-近似解を多項式時間で計算する．

証明. アルゴリズム中 APX が $(1-\varepsilon)$-近似解でないときを考える．定理 1 を APX と最適解の一つ OPT に適用して得られた分解から条件 (2) を満たす辺素なトレイルが $OPT \triangle APX$ 内に少なくとも $|OPT| - |APX| > \varepsilon|OPT|$ 本あることがわかる．その内最小のトレイルのサイズは高々 $|OPT \triangle APT|/\varepsilon|OPT| \leq 2/\varepsilon$ であるので，このトレイルは条件 (1) も満たしている． □

2 準備

三角形フリー制約のない場合の分解定理（補題 3）は以前からよく知られた結果である．

補題 3. A_1，A_2 を（単純とは限らない）無向グラフ上の 2 マッチングとする．このとき，$A_1 \triangle A_2$ の (A_1, A_2) に関する交互トレイルへの分割 $\mathcal{P}$ で，任意の $P \in \mathcal{P}$ と $i = 1, 2$ で $A_i \triangle P$ が 2 マッチングとなるようなものが存在する．

証明. (A_1, A_2) に関する交互トレイルへの分割 $\mathcal{P}$ で $|\mathcal{P}|$ が最小のものを一つとれば，それが補題 3 の条件を満たすことは簡単に確認できる． □

定理 1 の説明に先立ち，本研究における重要な概念である辺集合の $\mathcal{T}$**-フリー性**を導入する．$\mathcal{T}$ をグラフ $G = (V, E)$ に存在する三角形の部分集合として，辺集合 $F \subseteq E$ が $\mathcal{T}$**-フリー**であるとは，F がいずれの三角形 $T \in \mathcal{T}$ も部分集合として含まないことをいう．$\mathcal{T}$ をグラフ内の全ての三角形とすれば $\mathcal{T}$-フリー性と三角形フリー性は同値であり，$\mathcal{T}$-フリー性は三角形フリー性を一般化した概念と言える．

3 定理 1 の証明の概要

本研究ではより主張が強い定理 4 を証明しており．定理 4 を示すことで直ちに定理 1 が従う．

定理 4 ($\mathcal{T}$-フリー 2 マッチングに関する分解定理)**.** G を並列辺を含まない無向グラフ，$\mathcal{T}$ を G の三角形の部分集合，A_1，A_2 を G の $\mathcal{T}$-フリー 2 マッチングとする．このとき，$A_1 \triangle A_2$ の (A_1, A_2) に関する交互トレイルへの分割 $\mathcal{P}$ で，任意の $P \in \mathcal{P}$ と $i = 1, 2$ で $A_i \triangle P$ が $\mathcal{T}$-フリー 2 マッチングとなるようなものが存在する．

証明.（概要）$\mathcal{T}$ のサイズを用いた帰納法により証明する．$\mathcal{T} = \emptyset$ の場合は補題 3 より明らかである．$T \in \mathcal{T}$ が存在する場合については，G，$\mathcal{T}$，A_1．A_2 を変形して $\mathcal{T}$ のサイズが小さい場合に帰着する．帰納法の仮定から帰着したグラフ上では条件を満たす分割が見つかるので，それを基に元のグラフ上で条件を満たす分割を構成できることを示す． □

4 結論と今後の展望

$\mathcal{T}$-フリー性の導入により，三角形フリー 2 マッチングに関する自然な分解定理を単純な帰納法で示すことができた．この分解定理ををさらに詳しく解析することで，辺に重みを付けた場合の三角形フリー問題（辺の合計重みの最大化問題）に対するアルゴリズムについても新たな進展がありうると考えている．

謝辞　本研究は，京都大学とトヨタ自動車の共同研究プロジェクト「モビリティ基盤数理の研究」の支援を受けている．

参考文献

[1] D. Hartvigsen. Finding triangle-free 2-factors in general graphs. Journal of Graph Theory, 106(3):581–662, 2024.

[2] M. Bosch-Calvo, F. Grandoni, and A. J. Ameli. A PTAS for triangle-free 2-matching. arXiv preprint arXiv:2311.11869, 2023.

マトロイド制約下での劣モジュラ関数最大化に対する高速なアルゴリズム

寺尾 樹哉 [1], 小林 佑輔 [1]
[1] 京都大学数理解析研究所
e-mail : ttatsuya@kurims.kyoto-u.ac.jp

1 概要

本講演では, 劣モジュラ関数最大化問題を扱う. この問題は理論計算機科学において近年最も盛んに研究されている問題の一つである. これは, この問題が最大被覆問題や施設配置問題といった重要な問題の一般化となっていて, さらには, 機械学習や経済学やゲーム理論といった非常に幅広い分野に実応用がなされているためである. 本講演では, 特に, この問題のなかでも非常に重要でよく研究されているマトロイド制約下での単調劣モジュラ関数最大化問題について, 高速なアルゴリズムを設計した結果について扱う. 具体的には, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $(1 - 1/e - \varepsilon)$-近似アルゴリズムであって $\tilde{O}_\varepsilon(\sqrt{r}n)$ 回の独立性オラクルと関数値オラクルへのクエリを使用するようなアルゴリズムを設計した. ここで, n はマトロイドの台集合のサイズ, $r \leq n$ はマトロイドのランクである. これは, 最良の計算量であった, Buchbinder–Feldman–Schwartz [1] による $\tilde{O}_\varepsilon(r^2 + \sqrt{r}n)$ 回のクエリを使用するアルゴリズムから計算量を改善している. この改善のために, 本研究では Chekuri–Vondrák–Zenklusen [2] が提案した丸めアルゴリズムよりも高速な丸めアルゴリズムを設計した. なお, 本成果は ICALP 2024 に採択された結果であり [3], 詳細はそちらを参考にされたい.

2 劣モジュラ関数最大化

劣モジュラ関数最大化の研究は Nemhauser–Wolsey–Fisher [4] によって 1970 年代に初められた. 彼らは, サイズ制約の単調劣モジュラ関数最大化は簡単な貪欲アルゴリズムで $(1 - 1/e)$-近似が達成できることを示した. そして, この $1 - 1/e$ という値は $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ のもとで多項式時間で達成できる最適な近似比であることが知られている [5].

サイズ制約の重要な一般化であるマトロイド制約については, Calinescu–Chekuri–Pál–Vondrák [6] によって, 連続最適化と丸めアルゴリズムを組み合わせた新しい手法によって初めて, 最適な $(1 - 1/e)$-近似が達成された. 彼らのアルゴリズムは多項式時間ではあるが, 計算量は非常に大きかった. 劣モジュラ関数最大化は理論と応用両方の観点から非常に重要な問題なので, 近似比はほぼ最適化なままで, 高速なアルゴリズムを開発しようという研究が盛んに行われた. Badanidiyuru–Vondrák [7] はマトロイド制約に対してほぼ最適な近似比 $1 - 1/e - \varepsilon$ を達成するアルゴリズムであって, $\tilde{O}_\varepsilon(rn)$ 回の独立性オラクルと関数値オラクルへのクエリを使用するようなアルゴリズムを設計した. そして, この計算量は, Buchbinder–Feldman–Schwartz [1] によって $\tilde{O}_\varepsilon(r^2 + \sqrt{r}n)$ まで改善された.

3 主結果

本研究では, $(1 - 1/e - \varepsilon)$-近似アルゴリズムであって, Buchbinder–Feldman–Schwartz [1] によるアルゴリズムよりも高速な, $\tilde{O}_\varepsilon(\sqrt{r}n)$ 回の独立性オラクルと関数値オラクルへのクエリを使用するようなアルゴリズムを設計した. この改善は, Chekuri–Vondrák–Zenklusen [2] が提案した丸め

アルゴリズムよりも高速な丸めアルゴリズムを得ることによって達成した．丸めアルゴリズムにおいては, t 個の基の凸結合で表現されたマトロイド基多面体内の点が入力として与えられ, その関数値を悪化させることなく整数解に丸める．彼らのアルゴリズムは $O(r^2t)$ 回の独立性オラクルへのクエリを使用していたが、本研究ではこれを $\tilde{O}(r^{3/2}t)$ 回に改善した．これを達成するために, 彼らのアルゴリズムのように同時交換する 2 要素を用いるのではなく, 補助グラフ上の有向閉路を用いるという全く新しいアイデアを用いた．さらに, 高速に有向閉路を見つけるために, Nguyen [8] と Chakrabarty–Lee–Sidford–Singla–Wong [9] によって独立に発見された, 最近のマトロイド交叉問題の組合せ論的な高速化に用いられている技術を用いた．

謝辞　本研究は京都大学とトヨタ自動車による共同プロジェクト「モビリティ基盤数理」, JST ERATO プロジェクト JPMJER2310, JSPS 科研費 JP20K11692, JP22H05001, JP24KJ1494, JP24K02901 の助成を受けた．

参考文献

[1] Niv Buchbinder, Moran Feldman, and Roy Schwartz. Comparing apples and oranges: Query trade-off in submodular maximization. Mathematics of Operations Research, 42(2):308–329, 2017.

[2] Chandra Chekuri, Jan Vondrák, and Rico Zenklusen. Dependent randomized rounding via exchange properties of combinatorial structures. In Proceedings of the 51st Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2010), pages 575–584, 2010.

[3] Yusuke Kobayashi and Tatsuya Terao. Subquadratic Submodular Maximization with a General Matroid Constraint. In Proceedings of the 51st International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2024), Volume 297, pages 100:1-100:19.

[4] George L Nemhauser, Laurence A Wolsey, and Marshall L Fisher. An analysis of approximations for maximizing submodular set functions–I. Mathematical Programming, 14:265–294, 1978.

[5] Uriel Feige. A threshold of ln n for approximating set cover. Journal of the ACM (JACM), 45(4):634–652, 1998.

[6] Gruia Calinescu, Chandra Chekuri, Martin Pál, and Jan Vondrák. Maximizing a monotone submodular function subject to a matroid constraint. SIAM Journal on Computing, 40(6):1740–1766, 2011.

[7] Ashwinkumar Badanidiyuru and Jan Vondrák. Fast algorithms for maximizing submodular functions. In Proceedings of the 25th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2014), pages 1497–1514, 2014.

[8] Huy L Nguyen. A note on Cunningham’s algorithm for matroid intersection. arXiv preprint arXiv:1904.04129, 2019.

[9] Deeparnab Chakrabarty, Yin Tat Lee, Aaron Sidford, Sahil Singla, and Sam Chiu-wai Wong. Faster matroid intersection. In Proceedings of the 60th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2019), pages 1146–1168, 2019.

ジャイレータを含む回路の微分代数方程式モデルの解析

岩田 覚 [1]，高松 瑞代 [2]
[1] 東京大学・北海道大学，[2] 中央大学
e-mail : takamatsu@ise.chuo-u.ac.jp

1　はじめに

本研究では，ジャイレータを含む回路を記述する微分代数方程式 (DAE) を指数の観点から解析する．DAE の指数は数値的な難しさの指標であり，指数が大きくなるほど数値計算は困難になる．これまで修正節点解析 (MNA) および混合解析から導出される DAE の指数の解析が盛んに行われてきた．重要な結果として，MNA では DAE の指数が 2 以下になることが知られている [1, 2]．一方，混合解析では，RLC 回路を記述する DAE の指数が常に 1 以下であり，MNA から導出される DAE の指数を超えないことが証明されている [3]．

本研究で対象とするジャイレータの素子特性の式は，歪対称行列を用いて $\begin{pmatrix} i \\ \bar{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \bar{u} \end{pmatrix}$ と記述される．ここで，(i, u) と $(\bar{i}, \bar{u})$ は 2 つの端子対の電流と電圧のペアを表す．ジャイレータを含む場合，線形時不変回路であっても，混合解析から導出される DAE の指数が 2 になる例が存在する．歪対称行列を含む DAE モデルの解析では，既存研究でよく用いられる正定値性の仮定が成り立たないため，これまでとは異なる新しいアプローチが必要になる．

本研究では，ジャイレータを含む線形時不変回路を対象として，混合解析および MNA から導出される DAE の指数を回路構造によって特徴づける．この特徴づけにより，線形マトロイドパリティ問題を解くアルゴリズムを用いて DAE の指数を高速に判定することができる．

2　回路解析に対するマトロイド理論を用いたアプローチ

マトロイド理論の重要な応用のひとつは，回路の一意可解性に関するものである．回路の結線構造を表すグラフを G とする．グラフ G の全域森 F が各ジャイレータのペアをともに含むか，または，どちらも含まないとき，F を固有森という．固有森 F が 木 であるとき，F を固有木という．

定理 1（[4, 5]）　回路素子の物理特性値が独立パラメータであるという仮定のもとで，抵抗，キャパシタ，ジャイレータを含む回路が唯一つの解をもつ必要十分条件は，グラフ G に固有森が存在することである．

固有森を見つける問題は線形マトロイドパリティ問題に帰着することが知られている [5]．マトロイドパリティ問題は，マッチング問題とマトロイド交叉問題を一般化した問題である．特に，マトロイドが行列で表現可能な場合は線形マトロイドパリティ問題とよばれる．

線形マトロイドパリティ問題では，列集合を C とする行列 A と，集合 C のペアへの分割 Π が与えられたとき，行列 A において $X \subseteq C$ に対応する列ベクトルの集合が線形独立であり，X が Π のペアからなるような集合 X の中で大きさが最大のものを求める．一般のマトロイドパリティ問題は多項式時間可解ではないが，線形マトロイドパリティ問題を解く多項式時間アルゴリズムが知られている．近年では，重みつき線形マトロイドパリティ問題に対する多項式時間アルゴリズムも考案されている [6].

3　DAE モデルの指数に対する特徴づけ

本研究では，独立電源，キャパシタ，インダクタ，抵抗，ジャイレータを含む線形時不変回路を対象とする．回路の結線構造を表すグラフを G とし，抵抗とジャイレータの集合を Γ とおく．混合解析ではまず，独立電源以外の素子を E_y と E_z に分割する．ただし, キャパシタは E_y に, インダクタは E_z に含め，ジャイレータのペアは E_y または E_z のどちらかにまとめて含めるようにする．次に，G の全域木のうち，独立電圧源，キャパシタ, $E_y \cap \Gamma$，$E_z \cap \Gamma$，インダクタの順に枝を優先的に含む木 T を選ぶ．混合解析では，$E_y \cap T$ の電圧と $E_z \setminus T$ の電流を変数とする DAE（混合方程式）を導出する．

線形時不変 DAE

$$A\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} + E\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{q}(t) \tag{1}$$

のクロネッカー指数が 1 以下である必要十分条件は，行列 $A + EQ$ が正則であることである [2]．ただし，Q は $Q^2 = Q$, $\operatorname{im} Q = \ker A$ をみたす行列である．与えられた DAE を式 (1) の形で表現し，行列 $A + EQ$ を計算してその正則性を調べることで，指数に対する特徴づけが得られる．

グラフ G において独立電圧源とキャパシタに対応する枝を縮約し，インダクタと独立電流源に対応する枝を除去したグラフを G° とおく．また，インダクタと独立電流源からなるカットセットを LI カットセット，キャパシタと独立電圧源からなる閉路（ただし，キャパシタのみの閉路は除く）を CV ループとよぶ．回路素子の物理特性値が独立パラメータであるという仮定のもとで，混合解析と MNA から導出される DAE の指数は以下のように特徴づけられる．

定理 2　混合方程式の指数が高々 1 である必要十分条件は，G° に固有森が存在することである．

定理 3　MNA から導出される DAE の指数が高々 1 である必要十分条件は，G に CV ループと LI カットセットが存在せず，かつ，G° に固有木が存在することである．

謝辞　本研究は 2022 年度から 2023 年度の中央大学特定課題研究の助成を受けたものである．

参考文献

[1] D. E. Schwarz and C. Tischendorf, Structural analysis of electric circuits and consequences for MNA, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 28 (2000), pp. 131–162.

[2] R. Riaza, *Differential-Algebraic Systems: Analytical Aspects and Circuit Applications*, World Scientific, Singapore, 2008.

[3] S. Iwata, M. Takamatsu, and C. Tischendorf, Tractability index of hybrid equations for circuit simulation, *Mathematics of Computation*, 81 (2012), pp. 923–939.

[4] A. Recski, *Matroid Theory and Its Applications in Electric Network Theory and in Statics*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[5] K. Murota, *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[6] S. Iwata and Y. Kobayashi, A weighted linear matroid parity algorithm, *SIAM Journal on Computing*, 51 (2022), STOC17, pp. 238–280.