

「かたち」のフェノーム解析

野下 浩司¹

¹九州大学大学院理学研究院

e-mail: noshita@morphometrics.jp

1 フェノーム解析における「かたち」

フェノーム (phenome) とは, ある生物の表現型 (phenotype) の総体のことである. 次世代シーケンサーの普及により, 遺伝子情報の総体であるゲノム (genome) や遺伝子発現データの総体であるトランスクリプトーム (transcriptome) は高速かつ安価に取得可能となった. しかし, フェノームデータの蓄積は進んでいない. ATGC からなる文字列としてモデル化されるゲノムに対して, 何をどこまで計測すればフェノームを得たと言えるのか (あるいはフェノームのモデル) が明らかでないことがその原因の一つと考えられる.

私は, 生物や生物のつくる「かたち」のフェノーム解析 (= 過不足のない「かたち」のモデル化・定量化) を目指し研究に取り組んでいる. 広義には, 「かたち」とは視覚・触覚を介して認識される対象の性質であり, 様々な側面をもつ. そのうち比較的扱いやすい性質については理論や解析方法が整備されている. 例えば, 形態 (form; 平行移動と回転に対する幾何学的不変量) や形状 (shape; 平行移動, 回転及び拡張に対する幾何学的不変量) の定量的な取り扱いは幾何学的形態測定学において発展している. 近年では, 比較的均一だが無数の要素からなる構造や分岐構造に対して位相的データ解析による定量化が活用され始めている. 一方, 生物の「かたち」は有限だが多様な種類の要素が階層的に組み合わさった複雑な構造を示すため, 従来のアプローチではモデル化や定量化が難しいことが多い.

本講演では, 葉の 3 次元輪郭を定量化する研究 [1] と葉脈をネットワークとして定量化した研究 [2] を紹介し, 従来定量化されていない表現型を過不足なく定量化し, データ空間の構造を調べ, モデルや定量化法の開発へ活かすことを議論したい.

2 三次元葉縁再構築

葉は, 植物の最も重要な器官の一つで, 光合成や呼吸, 蒸散など主要な生理学的プロセスを担う. そのため生息環境に応じた様々な機能的ニーズを満たす多様な形態学的特性を示す. しかし, 葉形態は 2 次元 (2D) 的に定量化されることが多く, 葉の機能の 3 次元 (3D) 側面を十分には捉えられていない.

そこで, 画像でのインスタンスセグメンテーションと曲線ベースの 3D 再構成を組み合わせることで 3D 葉縁定量化の方法を提案した [1]. まず, 多視点画像のそれぞれに対して葉一枚一枚を個別に認識するモデルを Mask R-CNN で作成した. 得られた葉のマスク画像からは簡単にその 2 次元輪郭が抽出できる. 同時に, Structure from Motion (SfM) によりカメラの位置と向きと疎な点群を推定する. また, 推定した個葉のマスク画像それぞれが多視点画像間でどう対応するのかが自明ではないため画像間での葉のマッチングをおこなう. その後, 2 次元輪郭のペアに対して 3 次元再構築 [3] をおこなうことで小さな曲線片 (曲線フラグメント) を多数再構築する. 最後に, B スプライン曲線フィッティングにより 3D 曲線フラグメントを葉縁モデルとして閉曲線に統合する.

提案手法を適用した結果をシミュレーション及び実データを用いて検証したところ, 1 枚の葉や個体を想定した複数の葉について再構築が可能であった. また, 複雑な葉形態にも対

応できる．例えば切れ込みのある葉や穴が空いている場合などでも再構築できた．ただし，現状ではセレーションのような細かい構造や細長い葉の先端部などの高い曲率を持つ部分などでは精度が低下する．

本研究では，対象の構造に注目した2D/3Dの解析を組み合わせることで，点ベースのアプローチでは計測が難しかった葉縁を捉えることに成功した．

3 葉脈ネットワークの多様性と制約

植物の葉脈は水や光合成産物の輸送に関わるネットワーク状の構造である．特に，被子植物の葉脈は階層的で複雑な葉脈構造を示し，分類の際にも注目する形質と考えられている．こうした葉脈構造の評価は，比較的シンプルな計測値（長さ，直径，分岐角度，areole面積，単位面積あたりの長さなど）でおこなわれるケースが多い．しかし，本質的には輸送網（ネットワーク構造）として定量化することが望ましい．そこで本研究では，葉脈構造をネットワークとして定量化するための手法を開発し，その有用性を示した [2]．提案手法は，画像の取得，U-Netによる葉脈の抽出，無向グラフへの変換，ネットワーク特徴量化，からなる．

デモンストレーションとして，まずネットワーク特徴量だけにに基づき5種の葉を見分けることができるかを検討したところ，およそ90%の精度で見分けることができた．さらに，葉脈構造特徴量の主成分分析の結果，PC1とPC3の空間に1次元的なU字型の分布を見出した．この曲線にそって葉脈の高次構造がツリー状からループ状に遷移していることがわかった．この分布パターンは先行研究 [4] で理論的に予測された輸送効率，形成効率，損傷に対するロバスト性の3つの機能的要請におけるパレート最適に対応する可能性が高い．

葉脈構造をネットワーク特徴量として定量的に評価したことで，データ駆動的にその潜在空間を特定し，「かたち」の多様性と制約の理解へつなげることができた．

4 「かたち」のフェノーム解析への挑戦

従来は定量化が困難であった表現型についても新たに手法を開発することで定量化できた．また，それによりはじめて観察・発見できる現象が存在することを示した．「かたち」のフェノーム解析が実現すれば，これまで見過ごされてきた現象や他のオミクスデータとの関連を見出すことができるかもしれない．「かたち」のフェノーム解析の実現を目指し，今後も理論・技術・ツールの開発に取り組む．そして，「かたち」の定量化を必要とするあらゆる分野での課題解決に貢献していきたい．

参考文献

- [1] Murata, H., Noshita, K., 2024. Three-Dimensional Leaf Edge Reconstruction Combining Two- and Three-Dimensional Approaches. *Plant Phenomics* 6, 0181.
- [2] Iwamasa, K., Noshita, K., 2023. Network feature-based phenotyping of leaf venation robustly reconstructs the latent space. *PLOS Comput. Biol.* 19,
- [3] Fabbri, R., Kimia, B., 2010. 3D curve sketch: Flexible curve-based stereo reconstruction and calibration, 2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. pp. 1538–1545.
- [4] Ronellenfitsch, H., Katifori, E., 2019. Phenotypes of Vascular Flow Networks. *Phys Rev Lett* 123, 248101.

深層学習による生物形態定量解析手法の開発

堤 真人¹, 齊藤 稔¹, 古澤 力^{2,3}

¹ 広島大学大学院統合生命科学研究科, ² 東京大学大学院理学系研究科, ³ 理化学研究所生命機能科学研究センター,
e-mail: masa10223@hiroshima-u.ac.jp

1 概要

本研究では、深層学習手法である Variational Autoencoder (VAE) を用いて生物形態を定量化する新たな手法、Morpho-VAE を開発した。提案手法は、従来の形態定量化手法と比較して、形態特徴量の抽出と欠損データへの対応に優れた汎用性を示した [1]。比較検証では、Morpho-VAE はランドマーク法と同等の性能を持ち、従来法では得られなかった特徴量の抽出にも成功した。これにより、Morpho-VAE は形態解析の新しい可能性を拓く有望な手法であることが示唆される。

2 これまでの形態定量化手法について

形態の多様性の要因を形態から読み解くためには、形態の分析が重要であり、それによって形態の変化を記述し、解釈することができる。しかしながら形態の違い万人には正確に伝えるためには、定量的な指標で表現する必要がある。Morphometrics は形態比較のために開発された定量的手法であり、特に計測対象のかたちを特定の点の集合に還元し、計測点同士の相対的な配置の情報を保持しながら解析を進める手法を Geometric Morphometrics (以下、GM) と呼ばれている。GM は図 1 に示すように構成される。まず、計測対象をそのまま使うのではなく、数値やベクトルに変換する (図 1 の #1)。そして、変換されたベクトルデータは高次元であるため、主成分分析などの次元削減手法を用いて形態空間を構築する (図 1 #2)。その形態空間では、各軸が特徴量を表し、特徴量の変化を見ることで、種などのグループを分ける特徴量を定量化することができる。

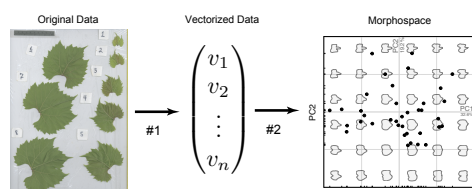


図 1. GM の概略図。葉の画像は [2] から引用。



図 2. ランドマークの配置例。対象となる生物はクイチガイサルボウガイ (*Anadara inaequalis*)

これまでに、#1 のプロセスについてさまざまな手法が提案された。その一つがランドマーク法と呼ばれるものである。ランドマークは解剖学的並びに生物学的に定義でき、かつ対象間で対応可能なもので定義される。図 2 は、*Anadara inaequalis* において定義されたランドマーク 14 個である。ランドマークの個数は位置については、解析する研究者によって定義されるため、異なる研究者間での解析結果を単純に比較することが困難であること [3]。系統的に離れた対象間ではランドマーク法が使えないこと [4]。さらに、欠損がある計測対象ではそもそも手法の適用が困難であるなどの問題点が挙げられていた。

3 提案する形態定量化手法と主結果

本研究では、これらの問題点を解決するために、変分オートエンコーダ（以下、VAE）を改良した深層学習モデル Morpho-VAE を提案する。VAE は、入力データを低次元成分に圧縮するエンコーダ (Encoder) と、圧縮された低次元成分から元のデータと同じサイズに再構築するデコーダ (Decoder) から構成されている。さらに本研究では、低次元成分からラベルを推定する分類器を追加した (図 3)。この改良により、形態の特徴量を抽出し、それを用いて分類を行うことが可能となる。

今回我々は、霊長目の下顎骨などを用いて本モデルの性能検証を行った。その結果、ランドマーク法に代表される他の GM 手法と同様またはそれ以上の性能を発揮した (図 4 B)。それだけでなく、人工的に欠損を加えたデータに対しても、どのラベルに属しているのかを高い精度で分類だけでなく欠損前のデータを復元することもできた (図 4 A)。また、解剖学的知見に則してラベルの判別することもあり (図 4 C)、形態解析の新しい可能性を拓く有望な手法であることが示唆された。

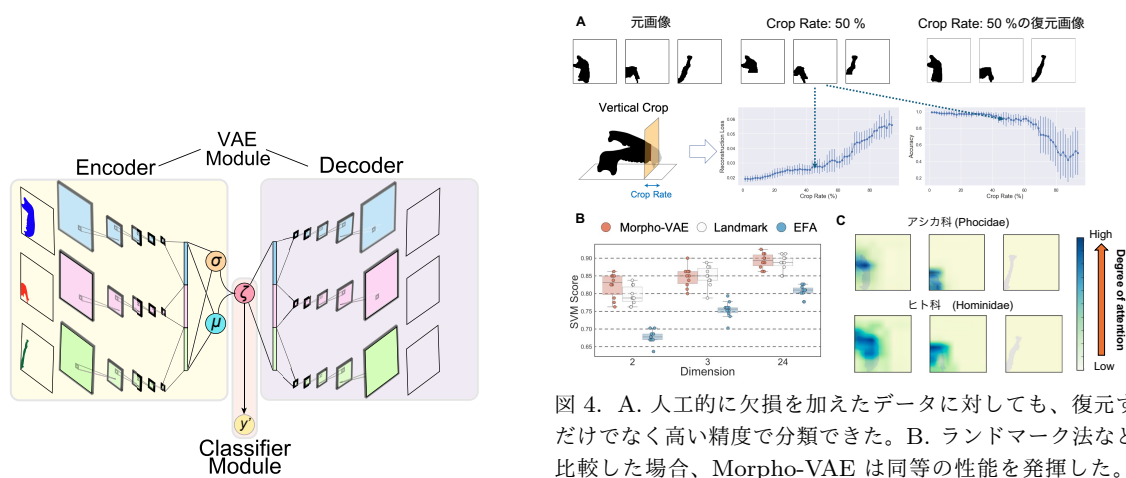


図 3. MorphoVAE の構成図。

図 4. A. 人工的に欠損を加えたデータに対しても、復元するだけでなく高い精度で分類できた。B. ランドマーク法などで比較した場合、Morpho-VAE は同等の性能を発揮した。C. Morpho-VAE が着目する部分は解剖学的知見に則している。

謝辞 本研究は、ExCELLS 共同研究 (No.21-319 および No.21-102)、JSPS KAKENHI (17H06389)、JST ERATO (JPMJER1902)、さらに理研 JRA の支援を受けたものである。

参考文献

- [1] Tsutsumi, M., Saito, N., Koyabu, D., Furusawa, C. A deep learning approach for morphological feature extraction based on variational auto-encoder: an application to mandible shape. *npj Syst Biol Appl.* **9** (2023).
- [2] Chitwood, D., Climate and developmental plasticity: interannual variability in grapevine leaf morphology, Harvard Dataverse, V1, (2015)
- [3] Fruciano, C., Celik, M. A., Butler, K., Dooley T., Weisbecker V, Phillips MJ. Sharing is caring? Measurement error and the issues arising from combining 3D morphometric datasets. *Ecol Evol.* **7** (2017)
- [4] Adams, D. C., Rohlf, F. J., Slice, D. E. Geometric morphometrics: Ten years of progress following the ‘revolution.’ *Italian Journal of Zoology*, **71**(1) (2004)

Sinkhorn MDS による形状汎関数の可視化

岡本 潤¹, 谷地村 敏明², カヴァッリーナ ロレンツォ³

¹ 京都大学高等研究院, ² 東北大学数理科学共創社会センター, ³ 東北大学大学院理学研究科
e-mail: okamoto.jun.8n@kyoto-u.ac.jp

1 概要

古代ローマの伝説アエネーイスに由来する「周長一定の形状の中で、面積が最大のものは何か？」という Dido の問題がある。この問題は、「形状空間 \ni 周長一定の形状 \mapsto 面積 $\in \mathbb{R}$ 」という形状汎関数の最適化問題として解釈できる。このような問題は、最適な「かたち」を探る問題として古来より研究されてきた。また、近年機械学習において非常に高次元であるロス関数の形状を可視化する研究が盛んである [1]。本講演では、無限次元空間である形状空間を次元削減により二次元空間に射影する方法を考察し、形状汎関数の可視化へ応用する。特に本研究では多次元尺度構成法 (MDS) に基づいた次元削減法を用いる。MDS とは、与えられた距離や類似度から、その構造を保存するように Euclid 空間に射影する方法である。この MDS を形状群に対して適用するために、かたち同士の適切な距離や類似度を導入する必要がある。そのための理論として、近年では最適輸送理論が注目されている。最適輸送理論とは、確率測度間の距離 (Wasserstein 距離) や最適マッチングを与える変分問題の理論である。この Wasserstein 距離を用いた MDS による次元削減法としては Wassmap [2] が知られているが、通常の Wasserstein 距離は計算コストが非常に高い。この問題を解決するために、本研究では Wasserstein 距離を緩和した Sinkhorn ダイバージェンスに基づく Sinkhorn MDS を提案する。この Sinkhorn MDS は Wassmap に比べて計算コストが低い利点がある。本講演ではまず Sinkhorn MDS と Wassmap との収束誤差評価を確立し、Sinkhorn MDS を形状汎関数の可視化へ応用する。

2 正則化最適輸送理論と Sinkhorn ダイバージェンス

離散確率測度 μ, ν に対する輸送多面体 $\Pi(\mu, \nu)$ およびコスト行列 C に対して、相互情報量 $H(\pi) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \pi_{ij} \log(\pi_{ij}/\mu_i \nu_j)$ に基づく正則化最適輸送は $OT_\varepsilon(\mu, \nu) := \min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \langle C, \pi \rangle + \varepsilon H(\pi)$ として定義される。ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は Frobenius 内積である。正則化最適輸送は Sinkhorn-Knopp アルゴリズムにより、高速な計算が可能となる。しかしながら、正則化最適輸送はエントロピーバイアス、すなわち $OT_\varepsilon(\mu, \mu) \neq 0$ となる現象が存在する。この問題を修正するために Sinkhorn ダイバージェンス [3] が導入された。Sinkhorn ダイバージェンスは $SD_\varepsilon(\mu, \nu) := OT_\varepsilon(\mu, \nu) - \frac{1}{2}OT_\varepsilon(\mu, \mu) - \frac{1}{2}OT_\varepsilon(\nu, \nu)$ として定められ、 $SD_\varepsilon(\mu, \mu) = 0$ を満たす。

3 Sinkhorn MDS

N 個の確率測度の組 $\{\mu_i\}_{i=1}^N$ に対して、Sinkhorn ダイバージェンスによる類似度行列を $A_\varepsilon := \{SD_\varepsilon(\mu_i, \mu_j)\}_{i,j=1}^N$ と定める。ここで、 $N \times N$ 単位行列を I_N 、全ての要素が 1 である N 次元の列ベクトルを $\mathbf{1}_N$ として、中心化行列を $H_N = I_N - \frac{1}{N}\mathbf{1}_N\mathbf{1}_N^T$ とする。さらに、 A_ε に対する Gram 行列を $B_\varepsilon := -\frac{1}{2}H_N A_\varepsilon H_N$ で定義する。 B_ε の固有値を $\lambda_{1,\varepsilon} \geq \dots \geq \lambda_{N,\varepsilon}$ として、対応する固有ベクトルを $v_{1,\varepsilon}, \dots, v_{N,\varepsilon}$ とする。また、 $\text{pr}(B_\varepsilon)$ を B_ε の重複度も含めた正の固有値の数とする。射影先の Euclid 空間の次元 $k \leq \text{pr}(B_\varepsilon)$ に対して、Sinkhorn MDS による写像 $\Phi_\varepsilon: \{\mu_i\}_{i=1}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$ を、

$$\Phi_\varepsilon(\mu_i) = \left(\lambda_{1,\varepsilon}^{1/2} v_{1,\varepsilon}(i), \dots, \lambda_{k,\varepsilon}^{1/2} v_{k,\varepsilon}(i) \right)$$

で定める. ここで, Φ_0 は Wassmap による写像に対応することに注意する.

4 主結果

本研究では以下の Sinkhorn MDS と Wassmap の収束誤差評価を得た.

定理 1. N 個の確率測度の組 $\{\mu_i\}_{i=1}^N$ の各要素 μ_i ($i = 1, \dots, N$) は n_i 個の点群からなる確率測度とする. 任意の $\varepsilon > 0$ および $\lambda_{k,0} > \lambda_{k+1,0}$ なる $k \leq \text{pr}(B_0)$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\Phi_\varepsilon(\mu_i) - \Phi_0(\mu_i)\|_{\mathbb{R}^k}^2 \leq \frac{64\lambda_{1,0}kN}{(\lambda_{k,0} - \lambda_{k+1,0})^2} \left\{ \log \left(\max_i n_i \right) \right\}^2 \varepsilon^2 + 4k \log \left(\max_i n_i \right) \varepsilon.$$

さらに本研究では, double-well type の形状汎関数を導入してその可視化の数値実験を行った. 形状 Ω_1, Ω_2 に対して, Ω_1 上一様分布に従う確率測度を μ_1 , Ω_2 上一様分布に従う確率測度を μ_2 としたとき, 形状距離 d を $d(\Omega_1, \Omega_2)^2 := \text{OT}(\mu_1, \mu_2)$ として導入する. このとき, 形状 A, B に対する double-well 型形状汎関数を $F(\Omega) := d(A, \Omega)^2 d(B, \Omega)^2$ で定義する. 本数値実験では, $A := \text{円}$, $B := \text{正三角形}$ として double-well 型形状汎関数の可視化を行った. 形状生成はまず, 円と三角形の McCann の変位補間による補間形状を生成する. 次に, それらの Fourier 級数展開による形状摂動を加えたランダムな形状群を生成する. 生成したそれぞれの形状に対して, Sinkhorn MDS を適用することで二次元 xy -平面上の点群に低次元化し, 形状汎関数の値を z 軸にプロットして可視化を行った. また, 円が最大元となることが知られている周長拘束条件下における面積汎関数についても, 円のランダムな Fourier 摂動によって同様に可視化を行った. 以下が面積汎関数および double-well 型形状汎関数の可視化数値実験の結果である.

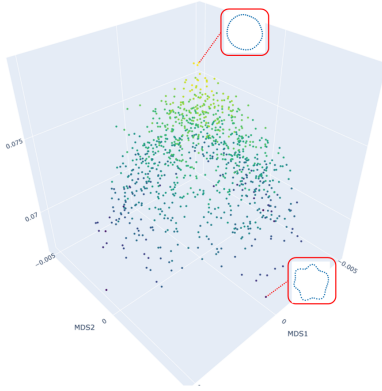


図 1. 周長拘束条件下における面積汎関数の可視化 ($\varepsilon = 0.01$)

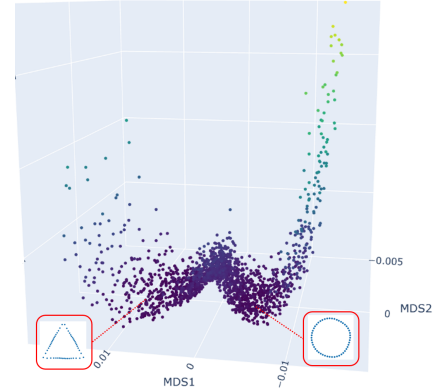


図 2. double-well 型形状汎関数の可視化 ($\varepsilon = 0.01$)

参考文献

- [1] H. Li, Z. Xu, G. Taylor, C. Studer, T. Goldstein, Visualizing the loss landscape of neural nets, Advances in neural information processing systems, 31 (2018), 6389–6399.
- [2] K. Hamm, N. Henscheid, Shujie Kang, Wassmap: Wasserstein isometric mapping for image manifold learning, SIAM J. Math. Data Sci, 5 (2023), 2, 475–501.
- [3] A. Ramdas, N. G. Trillos, M. Cuturi, On Wasserstein Two-Sample Testing and Related Families of Nonparametric Tests, Entropy, 19 (2017), 47, 15.

コンパクト曲面間の弱い比較について

古賀 一基¹¹ 東京工業大学 情報理工学院

e-mail : koga.k.ac@m.titech.ac.jp

1 概要

本講演では 3 次元 Euclid 空間に埋め込まれた 2 つのコンパクト曲面を定量的に比較するためのアルゴリズムを提案する. このために、曲面を対応する surface measure とみなし、それらの Fourier 変換を通じて定義される Sobolev ノルムによって曲面間の弱い距離を与える. また具体的な計算例として、単位球面の区分的にのみなめらかな近似が真の曲面に収束することを数値的に検証する.

2 定式化

いま 3 次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^3 上の有限 Borel 測度 μ が与えられたとき、その Fourier 変換 $\hat{\mu}$ は

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\mu(x), \quad \xi \in \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

で定義される. さらに、Fourier 変換は一般に緩増加超関数の全体 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ へ拡張され、(1) は有限 Borel 測度を $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ の元とみなした操作と考えてよい. このとき、実数 $s \in \mathbb{R}$ に対してノルム

$$\|f\|_{H_s(\mathbb{R}^3)} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

が有限となる $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ の全体を Sobolev 空間と呼び $H_s(\mathbb{R}^3)$ で表す. ここでパラメータ s は、 $s > 0$ のとき重み $(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$ が f に対する微分を、 $s < 0$ のとき f に対する正則化を意味する.

本研究では \mathbb{R}^3 上の Borel 測度のうち surface measure と呼ばれるクラスが重要な役割を果たす. 例えば、 \mathbb{R}^3 内における単位球面 \mathbb{S}^2 の surface measure σ とは、 \mathbb{S}^2 の面積要素 dS に関する積分

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x) d\sigma(x) = \int_{\mathbb{S}^2} f(x) dS, \quad (3)$$

を定め、その Fourier 変換は

$$\hat{\sigma}(\xi) = \int_{\mathbb{S}^2} e^{-2\pi i \xi \cdot x} dS = \frac{2\pi}{|\xi|^{\frac{1}{2}}} J_{\frac{1}{2}}(2\pi|\xi|). \quad (4)$$

で与えられる. ただし、ここで関数 J_ν は次数 ν の Bessel 関数であり、Gamma 関数 Γ を用いて

$$J_\nu(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{\Gamma(j + \nu + 1)} \left(\frac{t}{2} \right)^{2j + \nu}, \quad (5)$$

で書くことができる. このとき、測度 σ の Fourier 変換 (4) は級数表示 (5) により収束半径 ∞ のべき級数であり \mathbb{R}^3 全体でなめらかな関数である. またより一般にコンパクト台を持つ緩増加超関数、特にコンパクト曲面に対する surface measure の Fourier 変換は \mathbb{R}^3 全体でなめらかであることが知られている. この事実から、 \mathbb{R}^3 内に配置されたコンパクト曲面間の比較をそれらに対応するなめらかな関数で定義されるノルム (2) の計算として定式化することができる [1].

3 数値計算法

Sobolev ノルム (2) を計算するために \mathbb{R}^3 上の積分をある正方形 $D = [-\xi_{\max}, \xi_{\max}]^3$ 上の積分で近似することを考える. 本研究では特に等間隔の格子

$$\xi_{i,j,k} = (ih, jh, kh), \quad h = \frac{2\xi_{\max}}{M}, \quad i, j, k = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2}, \quad (6)$$

における関数値で定義される 3 次元の台形公式

$$\int_D f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} \sum_{j=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} f(\xi_{i,j,k}) w_{i,j,k} h^3, \quad (7)$$

によって D 上の積分を近似する. ここで、重み $w_{i,j,k}$ は正方形の内部で 1、各面の内部で $1/2$ 、各辺の内部で $1/4$ 、各頂点において $1/8$ である. このような有界領域上の積分による近似の打ち切り誤差および台形公式による離散化誤差は、サンプルサイズ M に加え正方形の直径を定めるパラメータ ξ_{\max} と Sobolev ノルム (2) の正則性を定める指数 s により決定される.

4 数値計算結果

講演では図 1 に示す単位球面 \mathbb{S}^2 の Icosahedral discretization [2] に対しその surface measure の Fourier 変換と厳密な結果 (4) とを Sobolev ノルム (2) の意味で比較し、このような区分的にのみなめらかな近似が真の曲面に弱い意味で収束することを数値的に観測可能であることを紹介する.

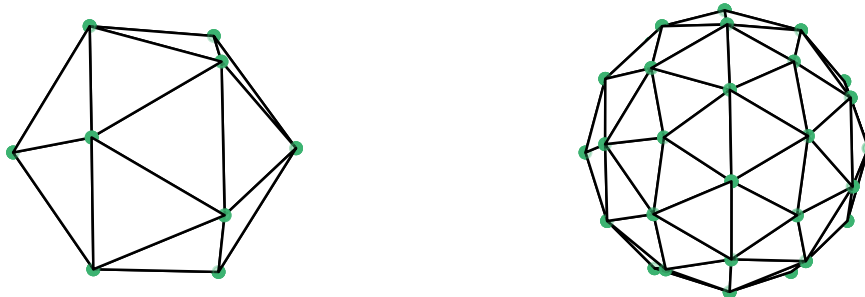


図 1. Icosahedral discretization による近似: 初期の正二十面体 (左) と各単体の細分によって生じる多面体 (右).

謝辞 本研究は JST CREST(課題番号:JPMJCR22P5)、JST ACT-X(課題番号:JPMJAX2106)、および科研費 (課題番号:21K20325) の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] K. Koga, Computing weak distance between the 2-sphere and its nonsmooth approximations, SIAM J. Sci. Comput., 46 (2024), A360–A375.
- [2] J. R. Baumgarnder and P. O. Frederickson, Icosahedral discretization of the two-sphere, SIAM J. Numer. Anal., 22 (1985), 1107–1115.