

参照型の意見形成問題について

矢野 良輔¹

¹ 東京海上ディーアール (株)

e-mail : ryosuke.yano@tokio-dr.co.jp

1 はじめに

意見形成は、社会の様々なスケール (家庭内から国家間まで) で観察される興味深い問題である。これまで、様々な数理モデルが提案され、物理現象とのアナロジーを含め多くの議論がなされている [1] [2]。ソーシャルネットワークの台頭により、容易に他人の意見を参照することが可能である。故に、昨今の意見形成は、2 者間で意見交換 (議論) を行い意見形成をするというより、寧ろ他者の意見を参照して、各自が意見を形成するという過程が主たるものと言えそうである。これを此处では、参照型意見形成と呼ぶことにする。ソーシャルネットワーク上で、他者の意見を参照する場合、Follow, Follower の関係にある際、特に積極的な意見参照を行うと考えられる。一方で、Follow-Follower 関係は、肯定的な意味での関係には限定できず、あえて、好意的でない相手を Follow し合うということも現実にはありうる。本講演では、このようなネットワーク上でつながった相手に対して、いかほど好意的であるかという指標を、親和性パラメタ (α) によって記述する。加えて、この親和性パラメタは、時間で変化する t として、ドリフトを持つ、ブラウン運動により記述されるものとする。最終的に、相互参照による意見変化は、2 つの意見が一定の距離以下にある時に起こるものとする。

2 モデル

参照型意見形成を考える上では、以下の仮定を置くものとする。(i) 他者の意見参照は、ネットワーク上でつながった 2 者間のみで起こる。つまり相互参照を仮定する。(ii) ネットワーク上での相互参照が起こる時刻は、同時である。すなわち、連続時間での相互参照を仮定する。(iii) 親和性パラメタ α_{ij} (エージェント- i のエージェント- j への親和性) は、親和性パラメタ α_{ji} (エージェント- j のエージェント- i への親和性) が等しい場合と、独立な確率過程である場合を考える。ここで、 α_{ij} は、次式の確率過程に従う。

$$d\alpha_{ij}(t) = \nu(\bar{\alpha} - \alpha_{ij}(t))dt + \xi dB_t \quad (1)$$

$\bar{\alpha}$ は、親和性パラメタの平均値であり、此处では、定数である。 $\nu \in \mathbb{R}_+$ は、緩和率であり、これは正の定数とする。 $\xi \in \mathbb{R}_+$ は、ブラウン運動の振幅であり、 dB_t がブラウン運動を表している。(iv) 相互参照による意見変化は、2 つの意見 (m_i, m_j) が距離 $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ 以下の時に起こるものとする (即ち、 $|m_i - m_j| \leq \epsilon$)。 (i)-(iv) を踏まえて、エージェント- i ($i = 1, 2, \dots, N$) の時間発展方程式は、次式で書かれる。

$$d_t m_i(t) = \zeta L_{ij} m_j(t), \quad (2)$$

ここで、 $\zeta \in \mathbb{R}_+$ 、 L は、以下に定義される $N \times N$ の行列である。

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \alpha_{ij}, \quad \text{if } |m_i - m_j| \leq \epsilon \cap A_{ij} = 1, \\ &= 0, \quad \text{else (for } i \neq j) \\ L_{ii} &= - \sum_{j=1, j \neq i}^N L_{ij}, \end{aligned} \quad (3)$$

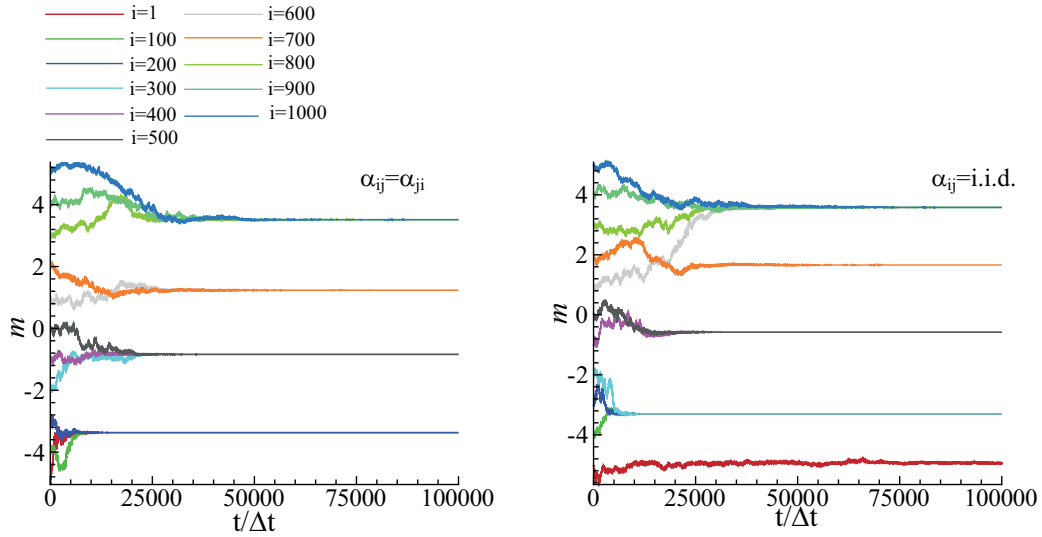


図 1. バラバシアルベルトネットワークにおける、 m_i ($i = 1, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000$) の時間発展 ($\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$: 左図、 $\alpha_{ij} = \text{i.i.d.}$: 右図).

ここで、 A_{ij} は、隣接行列である． $\alpha_{ij} = 1$ の時、式 (3) は、連続時間での Hegselmann-Krause モデル [3] に一致し、 L_{ij} は、ラプラス行列となる．

3 数値計算結果

図 1 は、ネットワーク構造が、バラバシアルベルトネットワークで記述され、エージェント総数を $N = 1000$ 、 $\epsilon = 1$ とした時の m_i ($i = 1, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000$) の時間発展を、 $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ (左図) と α_{ij} が独立な確率過程 (右図) に対して示している．初期状態は、 $m_i(t = 0) = -5 + i/100$ ($i = 1, 2, \dots, 1000$) である．意見がクラスタを形成する速度は、両ケースで同程度であるが、クラスタの値や、各エージェントが収束するクラスタのグループは、両ケースに顕著な差異がみられる．即ち、参照型意見形成問題において、各自の意見がどのクラスに収束するかは、親和性パラメタの挙動に強く依存すると言える．

参考文献

- [1] Frahm, K. M., & Shepelyansky, D. L., Ising-PageRank model of opinion formation on social networks, *Physica A*, 526, 121069 (2019).
- [2] Yano, R., Characteristics of isothermal Fokker–Planck equation for opinion-cluster involved with self-thinking. *J. Stat. Mech.*, 2017(3), 033401 (2017).
- [3] Hegselmann R., & Krause U., Opinion dynamics and bounded confidence: models, analysis and simulation. *JASSS*, 5(3), (2002).

成長する領域上での Proneural wave の数理モデリング

平岡 聡佑¹, 田中 吉太郎²

¹ 公立はこだて未来大学大学院情報科学研究科, ² 公立はこだて未来大学システム情報科学部
e-mail: g2123052@fun.ac.jp

1 導入

Proneural wave(PW) とはショウジョウバエ幼虫期の視覚中枢上で観察される神経上皮細胞 (NE) から神経幹細胞 (NB) への分化が規則的に伝播する現象である. 拡散性のシグナルである EGF と細胞間伝達経路である Delta-Notch シグナルとの相互作用を調べるため, 実験と理論の融合的な研究が行われている [1,2]. 細胞増殖を制御する Hippo シグナルがノックアウトされた視覚中枢は異常に肥大化することが知られている. この肥大化した視覚中枢上における PW は, 部分的に NB への分化が遅れ, NE が折り畳まれた構造となることが報告された [3]. しかしながら, 未だにこのような不安定化が起こる理由は明らかになっておらず, 生命科学実験だけでは Hippo シグナルと PW を制御しているシグナル間の相互作用を調べることは困難であると考えられる. そこで, 本研究では Hippo シグナルの働きを領域の成長とみなし, Hippo シグナルを考慮した PW の数理モデルを定式化, 数値計算を行った. そして, その結果から得られた Hippo シグナルの働きに関する考察を発表する.

2 成長する 2 次元領域上の熱方程式

$L_{X_1}(t), L_{X_2}(t)$ を $x_1(t), x_2(t)$ の領域の長さとし, $x_1(0) = X_1, x_2(0) = X_2$ とおく. 速度ベクトル $\mathbf{a}(x_1(t), x_2(t), t) = (dx_1/dt, dx_2/dt)^\top$, 濃度 $u = u(x_1(t), x_2(t), t)$, $\Omega(t) = (0, L_{x_1}(t)) \times (0, L_{x_2}(t))$ とすると成長する領域上の熱方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{a}u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \text{ in } \Omega(t). \quad (1)$$

と記述できる [4]. (1) 式に対して, 次の写像を構成する.

$$\Phi \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1(X_1, X_2, \tau) \\ \Gamma_2(X_1, X_2, \tau) \\ I(X_1, X_2, \tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \end{pmatrix}$$

ただし, G は $\partial x_i / \partial X_j (i, j = 1, 2)$ を成分とするヤコビ行列とし, $\Gamma_1(X_1, X_2, t), \Gamma_2(X_1, X_2, t)$ は t についてなめらかで, $\det G \neq 0$ を満たす関数とする. ここで, $U(X_1, X_2, t) := u(x_1, x_2, t)$ と変数変換し, 逆写像定理と連鎖律から領域成長の効果を組み込んだ固定座標系の熱方程式が得られる:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^2 \left\{ (-1)^{j+1} \frac{(\Gamma_i)_{X_2}}{\det G} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{(\Gamma_i)_{X_2}}{\det G} \frac{\partial U}{\partial X_1} \right) + (-1)^j \frac{(\Gamma_i)_{X_1}}{\det G} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{(\Gamma_i)_{X_1}}{\det G} \frac{\partial U}{\partial X_2} \right) \right\} - \frac{(\det G)_t}{\det G} U, \text{ in } \Omega(0). \quad (2)$$

3 領域成長を組み込んだ PW の数理モデリング

PW について 2016 年に離散モデルが提案され, 生物実験の結果に対して良い再現性を持つことが報告された [2]. その後, 細胞のサイズといった離散構造を保存しながら連続化したモデルが提案され, 連続モデルの数値計算結果が離散モデルで確認される結果を再現することを示した [3]. 本研究ではこの PW の連続モデルに領域成長の効果を組み込んだ PW の数理モデルを提案する:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial t} = d_e \sum_{i,j=1}^2 \left\{ (-1)^{j+1} \frac{(\Gamma_i)_{X_2}}{\det G} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{(\Gamma_i)_{X_2}}{\det G} \frac{\partial U}{\partial X_1} \right) \right. \\ \quad \left. + (-1)^j \frac{(\Gamma_i)_{X_1}}{\det G} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{(\Gamma_i)_{X_1}}{\det G} \frac{\partial U}{\partial X_2} \right) \right\} - k_e E + a_e A(A_0 - A) - \frac{(\det G)_t}{\det G} E, \\ \frac{\partial N}{\partial t} = -k_n N + d_t \tilde{K} * D - d_c N D - \frac{(\det G)_t}{\det G} N, \\ \frac{\partial D}{\partial t} = -k_d D + a_d A(A_0 - A) - \frac{(\det G)_t}{\det G} D, \\ \frac{\partial A}{\partial t} = e_a (A_0 - A) \max\{E - N, 0\} - \frac{(\det G)_t}{\det G} A, \end{array} \right. \quad \text{in } \Omega(0) \times \{t > 0\}.$$

ここで, $E = E(X_1, X_2, t)$, $N = N(X_1, X_2, t)$ は EGF と Notch の濃度を表し, $D = D(X_1, X_2, t)$, $A = A(X_1, X_2, t)$ は Delta と分化の指標である AS-C の発現量とする. また, $K(x_1(t), x_2(t), t)$ を適当な積分核として, $\tilde{K}(X_1, X_2, t)$ は積分核 K を固定座標系に変数変換した関数である. 領域成長の

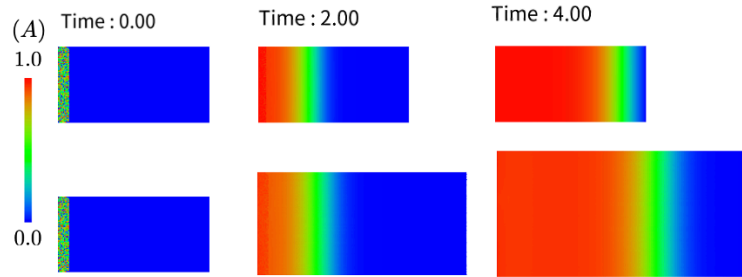


図 1. 分化の発現量である AS-C(A) の数値計算結果
上図は固定領域上の各時刻における PW, 下図は成長する領域上の PW の数値計算結果を表している.

効果を組み込むと PW の伝播が速くなることが数値計算からわかる. すなわち, Hippo シグナルは PW の伝播を促進する EGF シグナルを抑制する働きがあることが示唆される.

参考文献

- [1] M. Sato, et al, Notch-mediated lateral inhibition regulates proneural wave propagation when combined with EGF-mediated reaction diffusion, Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 113, pp. E5153-E5162, 2016.
- [2] Y.Tanaka, et al, A continuation method spatially discretized models with nonlocal interactions conserving size and shape of cells and lattices, Journal of Mathematical Biology, 81, pp. 981-1028, 2020.
- [3] H. Kawamori, et al, Fat/Hippo pathway regulates the progress of neural differentiation signaling in the Drosophila optic lobe, Development Growth Differentiation, 53, pp. 653-667, 2010.
- [4] E. J. Crampin, et.al, Reaction and Diffusion on Growing Domains: Scenarios for Robust Pattern Formation, Bulletin of Mathematical Biology, 61, pp. 1093-1120, 1999.

条件付ファジィ測度とその応用

加藤寛之

嘉悦大学 経営経済学部

e-mail : hiroyuki-kat0@kaetsu.ac.jp

1 概要

加法性を必ずしも満たさない測度をファジィ測度と呼ぶ。ファジィ測度における積分は、Choquet 積分と菅野積分がよく知られている。条件付測度を自然に定義すると一般に逐次積分の法則（フビニの定理に相当するもの）が成り立たない。本論文は、新たな条件付ファジィ測度を考え、逐次積分の法則の十分条件を提示する。また、加法性の下で見られがちな Simpson のパラドックスについても考察する。

2 定義

一般に $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ 上のファジィ測度 $v : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$ は、 $v(\emptyset) = 0, v(\Omega) = 1, v(A) \leq v(B), A \subset B, A, B \in 2^\Omega$ を満たすものとして定義される。 $A \subset \Omega$ の重みづけは、与えられた関数 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ に依存して、以下のように定義される。

$$\tilde{v}_f(A) := v\left(A \cup \{\omega' \in \Omega \setminus A \mid f(\omega') \geq f(\omega) \omega \in A\}\right) - v(\{\omega' \in \Omega \setminus A \mid f(\omega') \geq f(\omega) \omega \in A\}).$$

$f(A)$ 以上の f になっている事象を A と合わせた重みから、それらの事象の重みを引いたもので、加法性がない場合は $\tilde{v}_f(A) = v(A)$ が成り立たない。Choquet 積分は次のように定義される。

$$(C) \int_{\Omega} f(\omega) v(d\omega) = \sum_{i=1}^N f(\omega_i) \tilde{v}_f(\omega_i) \quad (1)$$

ここで、 $\{E_i\}_{i=1, \dots, n}$ を分割（partition, $\sum_{i=1}^n \#E_i = N$ ）とする。条件付ファジィ測度は、上記の考え方に沿って、Sarin and Wakker [1] において以下のように定義され、その後の文献でもこれを採用するのが一般である。

$$\tilde{v}_f(B|E_i) := \frac{\tilde{v}_f(B \cap E_i)}{\tilde{v}_f(E_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{定義 I})$$

\mathcal{F}_1 を分割が生成する代数とすると、逐次積分は以下のように書ける。

$$(C) \int_{\Omega} \int_{\Omega} f(\omega) v(d\omega | \mathcal{F}_1)(\omega) v(d\omega) = \sum_{h=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^N f(\omega_i) \tilde{v}_f(\omega_i | E_h) \right\} \tilde{v}_{\sum_{i=1}^N f(\omega_i) \tilde{v}_f(\omega_i | \cdot)}(E_h). \quad (2-I)$$

加法性がない場合、必ずしも $\tilde{v}_{\sum_{i=1}^N f(\omega_i) \tilde{v}_f(\omega_i | \cdot)}(E_h) = \tilde{v}_f(E_h)$ ではないため、一般に逐次積分の法則（フビニの定理）と呼ばれる (1)=(2-I) が成立しない。

3 諸結果

置換 $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ を考える。この σ を用いて、新たな条件付ファジィ測度を以下のように定義する。

$$\tilde{v}_f^{\sigma}(B|E_{\sigma(i)}) := \frac{\tilde{v}_f(B \cap E_{\sigma(i)})}{v(E_{\sigma(i)} \cup \bigcup_{h=1}^{i-1} E_{\sigma(h)}) - v(\bigcup_{h=1}^{i-1} E_{\sigma(h)})}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{定義 II})$$

但し, $\cup_{h=1}^0 E_{\sigma(h)} := \emptyset$. (定義 II) の下での (2-I) を (2-II) とする. f の値域を \mathbb{Z} とし, v に強い凸性を課すと, $\{\sum_{i=1}^N f(\omega_i) \tilde{v}_f^\sigma(\omega_i | E_h)\}_{h=1, \dots, n}$ を大きい順とする σ の下で, (1)=(2-II) が成立する (Kato[2]).

一方で, 菅野 (sugeno) 積分は, 次式で定義される (\wedge は \min , \vee は \max を表す).

$$(S) \int_{\Omega} f(\omega) v(d\omega) = \bigvee_{i=1, 2, \dots, N} [v(\{\omega_{\sigma(1)}, \omega_{\sigma(2)} \cdots \omega_{\sigma(i)}\}) \wedge f(\omega_{\sigma(i)})].$$

$f|_E$ を f の定義域を E 上に制限した関数とする. この場合は, より自然な条件付ファジィ測度である,

$$\tilde{v}_{f|E_i}(B|E_i) := \frac{\tilde{v}_{f|E_i}(B \cap E_i)}{v(E_i)}, \quad i = 1, 2 \cdots n. \quad (\text{定義 III})$$

の下での (2) を (2-III) とすると, 菅野積分では, ある条件のもとで, (1)=(2-III) が成立する.

4 Simpson のパラドックス

以下のような例を考える. ある大学を, 男性と女性がそれぞれ N 人が受験しそれぞれ m 人が合格した (つまり男女とも合格率は m/N で同じ). この大学は A 学部, B 学部の 2 つの学部があり, 男性は n_1 人が A 学部を受験し a 人が合格し, $N - n_1$ 人が B 学部を受験し, $m - a$ 人が合格, 女性は n_2 人が A 学部を受験し b 人が合格し, $N - n_2$ 人が B 学部を受験し, $m - b$ 人が合格した. 男性の分割を $\{E_1, \Omega \setminus E_1\}$ $\#E_1 = n_1$, $\#(\Omega \setminus E_1) = N - n_1$ とし, 女性の分割を $\{E_2, \Omega \setminus E_2\}$, $\#E_2 = n_2$, $\#(\Omega \setminus E_2) = N - n_2$ とする. $f: \Omega \rightarrow [0, 1]$ を ω が合格者なら, $f(\omega) = 1$, 不合格者なら, $f(\omega) = 0$ と定義する. v の加法性のもとで,

$$\begin{aligned} \text{A 学部} \quad \text{男性の合格率} \int_{\Omega} f(\omega) v(d\omega|E_1) &= \frac{a}{n_1} > \text{女性の合格率} \int_{\Omega} f(\omega) v(d\omega|E_2) = \frac{b}{n_2} \\ \text{B 学部} \quad \text{男性の合格率} \int_{\Omega} f(\omega) v(d\omega|\Omega \setminus E_1) &= \frac{m-a}{N-n_1} > \text{女性の合格率} \int_{\Omega} f(\omega) v(d\omega|\Omega \setminus E_2) = \frac{m-b}{N-n_2} \end{aligned}$$

が成立するとき (例えば, $N = 110, m = 61, n_1 = 10, n_2 = 100, a = 9, b = 60$ など), 全体の合格率も男性の方が高いと錯覚することから, このような状況は Simpson のパラドックスと呼ばれる.

v に, 例えば, 以下のような強い凸性を仮定する. $v(A) = \frac{\#A}{N} \varepsilon^{N+1-\#A}, 0 < \varepsilon < 1, A \neq \Omega$. $n_2 > n_1$ とする. $a/n_1 > b/n_2$ であることから, $n_2 - b > n_1 - a$ が分かる. よって, $\tilde{v}_{f|E_1}(A|E_1) = a\varepsilon^{n_1-a}/n_1 > \tilde{v}_{f|E_2}(B|E_2) = b\varepsilon^{n_2-b}/n_2$. 一方, $N - n_1 - (m - a) > N - n_2 - (m - b)$ より, ε が十分小さい (凸性が十分強い) と, $\tilde{v}_{f|\Omega \setminus E_1}(M \setminus A|\Omega \setminus E_1) = (m - a)\varepsilon^{N-n_1-(m-a)}/(N - n_1) < \tilde{v}_{f|\Omega \setminus E_2}(M \setminus B|\Omega \setminus E_2) = (m - b)\varepsilon^{N-n_2-(m-b)}/(N - n_2)$ がいえる. よって菅野積分においては, A 学部では, 男性の合格率 $(S) \int_{\Omega} f(\omega) v(d\omega|E_1) > \text{女性の合格率} (S) \int_{\Omega} f(\omega) v(d\omega|E_2)$, B 学部では, 男性の合格率 $(S) \int_{\Omega} f(\omega) v(d\omega|\Omega \setminus E_1) < \text{女性の合格率} (S) \int_{\Omega} f(\omega) v(d\omega|\Omega \setminus E_2)$ となり, パラドックスは生じない.

参考文献

- [1] Sarin, R. and Wakker, P. Revealed likelihood and Knightian uncertainty, Journal of Risk and Uncertainty 16, (1998), 223-250.
- [2] Kato, H. The Law of Iterated Choquet Expectations without Consequentialism, mimeo (2023).