分数調波メルニコフ関数による平面上の近可積分系の可積分性の特徴づけ

本永 翔也
立命館大学理工学部数理科学科
e-mail : motonaga@fc.ritsumei.ac.jp

1　力学系の可積分性

微分方程式の可積分性とは，微分方程式が求積法により解けることを意味する．与えられた微分方程式の可積分性の判定の研究は 19 世紀末の Poincaré の時代にまで遡るが，最近，近可積分系（可積分系の摂動問題）の可積分性とダイナミクスの関係について，いくつかの進展があった（例えば [1] やその参考文献を参照せよ）．本報告では，平面上の近可積分系を取り上げ，[1] を改良して得られた非可積分性の十分条件 [2] について述べる．

滑らかな n 次元多様体 N 上のベクトル場 X が与える力学系を考える：

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in N. \tag{1}$$

定義 1 ([3]) 式 (1) が **Bogoyavlenskij の意味で** $(q, n-q)$**-可積分**（あるいは単に可積分）であるとは，稠密な開集合上一次独立かつ互いに可換な q 個のベクトル場 $Y_1(:= X), Y_2, \ldots, Y_q$ および，$dF_1, ..., dF_{n-q}$ が稠密な開集合上一次独立な, ベクトル場 Y_i に共通の $n-q$ 個の第一積分 $F_1, ..., F_{n-q}$ が存在することをいう．特に，すべての Y_i, F_j が解析的なとき式 (1) は**解析的可積分**という．

定義 1 は，ハミルトン系に対してよく知られている Liouville 可積分性の一般化になっており，Liouville 可積分系についての Liouville-Arnold の定理と同様に，Bogoyavlenskij 可積分なベクトル場 X は適当な条件のもとでトーラス上の直線的な流れを定めることが知られている [4].

2　周期外力を受ける 1 自由度系

本節では，周期外力を受ける 1 自由度系に対して [1] を改良して得られた結果 [2] を述べる．まず，周期外力を受ける 1 自由度系を考える：

$$\dot{x} = J\nabla H(x) + \varepsilon g(x, \nu t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{2}$$

等価的に,

$$\dot{x} = J\nabla H(x) + \varepsilon g(x, \phi), \quad \dot{\phi} = \nu, \quad (x, \phi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}. \tag{3}$$

ここで， $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ および $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ は解析的であり，J はシンプレクティック行列

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．$\varepsilon = 0$ のとき式 (2) に対して次の (M1)-(M3) を仮定する．

(M1) 周期 T^α の周期軌道の 1 パラメータ族 $\{x^\alpha(t)\}_{\alpha \in (0,1)}$ が存在する．

(M2) $x^\alpha(t)$ は $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ に関して解析的である．

(M3) ある $\alpha_* \in (0, 1)$ に対して，$\frac{dT^\alpha}{d\alpha}(\alpha_*) \neq 0$ が成り立つ．

 Copyright (C) 2024 一般社団法人日本応用数理学会

$\alpha=\alpha^{l/m}$ において共鳴条件 $T^{\alpha^{l/m}}=\frac{2\pi l}{m\nu}$ ($l,m\in\mathbb{N}$ は互いに素) が成立するものとし，**分数調波メルニコフ関数**を次式で定める：

$$M^{l/m}(\tau)=\int_0^{2\pi l/\nu}\nabla H(x^\alpha(t))\cdot g(x^\alpha(t),\nu t+\tau)dt.$$

分数調波メルニコフ解析によって，$M^{l/m}(\tau)$ が単純零点を持つとき，式 (2) は十分小さな $\varepsilon>0$ に対し $2\pi l/\nu$-周期軌道を持つことが知られていることに注意せよ [5]. 今，集合 R を次のように定める：

$$R=\{\alpha\in(0,1);\ \text{ある互いに素な整数 } l,m \text{ に対し，} T^\alpha=2\pi l/m\nu\}.$$

定理 2　集合 R の部分集合 R' が存在して，次の条件が成立するとする：(i) α_* は R' における集積点であり，(ii) 任意の $\alpha^{l/m}\in R'$ に対して，$M^{l/m}(\tau)$ は τ に関して恒等的零ではない．このとき，式 (3) は，第一積分や可換なベクトル場が ε にも解析的に依存した実解析的可積分ではない.

次に，$g(x,\nu t)=g(x)$ の場合（自律的な摂動）を考える．このとき，$\alpha\in(0,1)$ に対して，

$$M(\alpha)=\int_0^{T^\alpha}\nabla H(x^\alpha(t))\cdot g(x^\alpha(t))dt \qquad \text{とおく．}$$

定理 3　$g(x,t)=g(x)$ のとき，もし $M(\alpha)$ が $\alpha=\alpha_*$ の近傍で恒等的零ではないのならば，式 (2) は，第一積分や可換なベクトル場が ε にも解析的に依存した実解析的可積分ではない.

系 4　$g(x,t)=g(x)$ かつ $\mathbb{R}^2$ 上 div $g(x)>0$（または div $g(x)<0$）ならば，式 (2) は，第一積分や可換なベクトル場が ε にも解析的に依存した実解析的可積分ではない.

系 4 より，摩擦を受けるポテンシャル系

$$H(x)=\frac{1}{2}x_2^2+V(x_1),\quad g(x)=\begin{pmatrix}0\\-x_2\end{pmatrix},\quad V:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \ \text{解析関数}$$

は仮定 (M1)-(M3) を満たすとき，系 4 の意味で非可積分である．これは，非摂動系においてホモ/ヘテロクリニック軌道がない場合でも摂動系は実解析的非可積分になりうることを意味する.

謝辞　本研究は科研費 (課題番号:22H01138) の助成を受けたものである.

参考文献

[1] S. Motonaga and K. Yagasaki, Obstructions to integrability of nearly integrable dynamical systems near regular level sets, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **247** (2023), 44.

[2] S. Motonaga, Subharmonic Melnikov functions and nonintegrability for autonomous and non-autonomous perturbations of single-degree-of-freedom Hamiltonian systems near periodic orbits, *Phys. D*, **460** (2024), 134088.

[3] O.I. Bogoyavlenskij, Extended integrability and bi-hamiltonian systems, *Comm. Math. Phys.*, **196** (1998), 19–51.

[4] N.T. Zung, A conceptual approach to the problem of action-angle variables, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **229** (2018), 789–833.

[5] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York, 1983.

遅延系のダイナミクスと発展方程式表現

西口 純矢 [1]
[1] 東北大学材料科学高等研究所 (AIMR) 数学連携グループ
e-mail : junya.nishiguchi.b1@tohoku.ac.jp

1 イントロダクション

未知関数の時間微分が未知関数の過去の情報にも依存する**遅延微分方程式** (delay differential equation; DDE) のような**連続時間の遅延系**の特徴は，その解の振る舞いであるダイナミクスを解の履歴切片と呼ばれる関数の時間発展として捉えなければならないことにある．このことにより，連続時間の遅延系は（物理的・生物学的な）状態変数が有限次元であるか無限次元であるかにかかわらず，履歴切片のある関数空間における時間発展として無限次元力学系を定める．

DDE は，1960 年代初めの J. Hale による**遅れ型関数微分方程式** (retarded functional differential equation; RFDE) としてその数学的定式化が与えられて以降，上に述べた「解の履歴切片の関数空間における時間発展」としての見方に基づいた微分方程式・無限次元力学系研究が急速に発展した．一方で，解の値そのものではなく解が作り出す履歴切片の時間発展を考えなくてはならないということは，RFDE 研究のさまざまな困難さを生み出した．その困難さの 1 つが非斉次線型 RFDE に対する定数変化法公式にある．RFDE 自体は連続関数が定める履歴関数空間に基づいて定式化されるものの，定数変化法公式を得ようとすると必然的に連続関数の枠組みからはみ出してしまう．

上記の困難さに関連する研究にはさまざまな方向性のものがある．定数変化法公式と直接関係するのは，Chow and Mallet-Paret [1] の研究である．この研究では，履歴関数の右端点での不連続性を許すことで連続関数の空間を拡張している．しかし，この空間は RFDE の解の履歴切片の時間発展に関して不変ではなく，この意味では自然ではない．2 つ目の方向性は，$p \in [1, \infty)$ に対する M^p という関数空間を用いるという Delfour and Manitius [2] の研究である（関連する文献はその引用文献を参照されたい）．これらの研究は定数変化法公式における困難さを解消しようというものではないが，連続関数の枠組みを越えるという意味では関係がある．3 つ目の方向性は Diekmann [3] が推進している関数解析的方法 (sun-star 解析) である．この方法は，$\dot{x} = 0$ という自明な方程式を RFDE として考え，一般の RFDE をこの自明な方程式に対する摂動と考えるというものである．そのメリットは M^∞ という関数空間が関数解析的方法により得られるということにあるが，この空間上では線型作用素の半群の強連続性が成り立たないというデメリットがある．

本講演では，[4] において導入された自励系の線型 RFDE に対する軟解概念を用いて，上に述べた非斉次線型 RFDE に対する定数変化法公式の困難さを解消する．この講演を通して，$r > 0$ を定数とし，$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．また，正の整数 $n \geq 1$ に対して，$C \coloneqq C([-r, 0], \mathbb{K}^n)$ で $[-r, 0]$ から $\mathbb{K}^n$ への連続関数全体のなす $\mathbb{K}$ 上の線型空間に，上限ノルム $\|\cdot\|$ を入れた Banach 空間を表す．有界線型作用素 $L\colon C \to \mathbb{K}^n$ と連続関数 $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{K}^n$ に対する非斉次線型 RFDE

$$\dot{x}(t) = Lx_t + f(t) \quad (t \geq 0), \tag{1.1}$$

およびその斉次方程式

$$\dot{x}(t) = Lx_t \quad (t \geq 0) \tag{1.2}$$

を考える．ここで，連続な未知関数 $x\colon [-r,\infty) \to \mathbb{K}^n$ と $t \geq 0$ に対して，x_t は $x_t(\theta) \coloneqq x(t+\theta)$ で定義される連続関数を表す．これを x の t における**履歴切片** (history segment) と呼ぶ．

2 主結果

[4] における「軟解」概念の鍵は，$x \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}([-r,\infty),\mathbb{K}^n)$ に対する次の積分概念であった：

$$\left(\int_0^t x_s \,\mathrm{d}s\right)(\theta) \coloneqq \int_0^t x(s+\theta)\,\mathrm{d}s \qquad (\theta \in [-r,0]).$$

この講演では，上記のような積分を**遅延積分** (retarded integral) と呼ぶ．$\theta \in [-r,0]$ に対して $\int_0^t x(s+\theta)\,\mathrm{d}s = \int_\theta^{t+\theta} x(s)\,\mathrm{d}s$ であるので，$\int_0^t x_s\,\mathrm{d}s \in C$ である．

(1.2) の初期条件 $x_0 = \phi \in C$ の下での解 $x\colon [-r,\infty) \to \mathbb{K}^n$ は，積分方程式

$$x(t) = \phi(0) + \int_0^t Lx_s\,\mathrm{d}s \qquad (t \geq 0)$$

を満たす．[4] における (1.2) に対する「軟解」概念導入のアイデアは，上の方程式における積分 $\int_0^t Lx_s\,\mathrm{d}s$ を遅延積分を用いた $L\int_0^t x_s\,\mathrm{d}s$ に取り替えることであった．この考察の下で，初期履歴関数が属する集合は次の集合 $\mathcal{M}^p$ へと拡張される：

$$\mathcal{M}^p \coloneqq \mathcal{M}^p([-r,0],\mathbb{K}^n) \coloneqq \{\phi \in \mathcal{L}^p([-r,0],\mathbb{K}^n) : \phi \text{ は } 0 \text{ で定義されている}\}.$$

$\mathcal{M}^p$ には，“ほとんどすべての $\theta \in [-r,0)$ に対して $\phi(\theta) = \psi(\theta)$ かつ $\phi(0) = \psi(0)$”という同値関係を考えることができる．また，その同値関係による商集合 M^p は，$\|[\phi]\|_{M^p} \coloneqq \left\|\left(\|\phi\|_p, |\phi(0)|\right)\right\|_p$ による定まるノルム $\|\cdot\|_{M^p}$ に関して Banach 空間となる．

定理 2.1 $p \in [1,\infty)$ とする．このとき，任意の $\phi \in M^p$ に対して，初期条件 $x_0 = \phi$ の下での (1.1) の軟解 $x(\cdot;\phi,f)$ の履歴切片は

$$x(\cdot;\phi,f)_t = T^p(t)\phi + \int_0^t T^p(t-s)X_0 f(s)\,\mathrm{d}s \qquad (t \geq 0) \tag{2.1}$$

を満たす．ここで，$(T^p(t))_{t\geq 0}$ で (1.2) の軟解が M^p 上に生成する C_0-半群を表す．また，$X_0 f(s)\colon [-r,0] \to \mathbb{K}^n$ は，0 のとき $f(s)$，それ以外の値では 0 となるような関数を表す．

証明の方法は，遅延積分および関連する畳み込みが Banach 空間 M^p 上の Riemann 積分に等しいことを示した上で，[4] で得られた (1.1) の解の表示式を変形することにある．定数変化法公式 (2.1) を用いた，具体的な非線型 DDE に対する平衡点の中心多様体の近似計算についても紹介したい．

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP23K12994 による支援を受けたものです．

参考文献

[1] S. N. Chow and J. Mallet-Paret, J. Differential Equations **26** (1977), no. 1, 112–159.

[2] M. C. Delfour and A. Manitius, J. Math. Anal. Appl. **73** (1980), no. 2, 466–490.

[3] O. Diekmann, in: Dynamics of infinite-dimensional systems (Lisbon, 1986), 67–73, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. F: Comput. Systems Sci., Vol. 37, Springer, Berlin, 1987.

[4] J. Nishiguchi, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **2023**, Paper No. 32, 77 pp.

オイラー・ポアンカレリダクションによる underwater vehicle ダイナミクスの定式化

小野 悠介 [1], FIORI Simone[2], 彭 林玉 [3]
[1] 慶應義塾大学理工学研究科, [2]Marche Polytechnic University, Italy, [3] 慶應義塾大学理工学部
e-mail : [1]yuu555yuu@keio.jp, [2]s.fiori@staff.univpm.it, [3]l.peng@mech.keio.ac.jp

1 Abstract

The dynamics of underwater vehicles is formulated by the Euler–Poincaré reduction for Lagrangians which include advected parameters, in addition to rotational and translational motions. Based on reduced discrete Lagrangians, discrete Euler–Poincaré equations are further derived that yield efficient numerical methods.

2 The discrete Euler–Poincaré equations with advected parameters

Consider mechanical systems on a configuration space $Q \times G$ with Q a manifold and G a Lie group. The invariance of a Lagrangian under the group G acting on $Q \times G$ allows one to perform a reduction leading to the Euler–Poincaré equations [1]. Let $\tau : \mathfrak{g} \to G$ be a group difference map such that $\tau(0) = e$ and $\tau^{-1}(\xi) = \tau(-\xi)$ (locally), where $\mathfrak{g}$ is the corresponding Lie algebra [2]. Consider an increasing sequence $\{(q_k, g_k)\}_{k=0}^{N} \in Q^{N+1} \times G^{N+1}$. Assuming the invariance of a Lagrangian with advected parameters, the reduced discrete functional reads

$$\sum_{k=0}^{N-1} \ell^d(n_k, \nu_k, \xi_k, a_k)h := \sum_{k=0}^{N-1} \ell_k^d h, \tag{1}$$

where h is a step size, $n_k = g_k^{-1} q_k$, $\nu_k = \frac{1}{h}(\tau(h\xi_k)\, n_{k+1} - n_k)$, $\xi_k = \frac{1}{h}\tau^{-1}(g_k^{-1} g_{k+1}) \in \mathfrak{g}$ and the advected parameter is given by $a_k = g_k^{-1} a_0$ in a vector space V^*. Subject to fixed endpoint conditions $\delta g_0 = \delta g_N = 0$ and $\delta q_0 = \delta q_N = 0$, in the following we will show the discrete Euler–Poincaré equations. A continuous version is available in, for instance, [3].

Assume the discrete Lagrangian $L^d : (Q \times G) \times (Q \times G) \times V^* \to \mathbb{R}$ is (left) G-invariant, and then the (left) reduced discrete Lagrangian $\ell^d : Q \times Q \times \mathfrak{g} \times V^* \to \mathbb{R}$ is given by Eq. (1). From the variations

$$\begin{aligned} &\delta n_k = w_k - \eta_k n_k, \quad \delta \nu_k = -\frac{1}{h}\eta_k \tau(h\xi_k) n_{k+1} + \frac{1}{h}\tau(h\xi_k) w_{k+1} - \frac{1}{h}\delta n_k, \\ &\delta \xi_k = -d\tau^{-1}_{h\xi_k}(\eta_k) + d\tau^{-1}_{-h\xi_k}(\eta_{k+1}), \quad \delta a_k = -\eta_k a_k, \end{aligned} \tag{2}$$

where $w_k = g_k^{-1}\delta q_k \in T_{q_k}Q$, $\eta_k = g_k^{-1}\delta g_k \in \mathfrak{g}$, and $d\tau^{-1} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ is the inverse right-trivialized tangent of τ [2], the (left) discrete Euler–Poincaré equations with the advected parameter a_k are given by

$$\begin{aligned} &g_k = g_{k-1}\tau(h\xi_{k-1}), \quad a_k = \tau(-h\xi_{k-1})a_{k-1}, \\ &\left(d\tau^{-1}_{h\xi_k}\right)^* \frac{\partial \ell_k^d}{\partial \xi_k} - \left(d\tau^{-1}_{-h\xi_{k-1}}\right)^* \frac{\partial \ell_{k-1}^d}{\partial \xi_{k-1}} - h\frac{\partial \ell_k^d}{\partial a_k} \diamond a_k - h\frac{\partial \ell_k^d}{\partial n_k} \diamond n_k - h\frac{\partial \ell_k}{\partial \nu_k} \diamond \nu_k = 0, \\ &h\frac{\partial \ell_k^d}{\partial n_k} + \mathcal{L}^*_{\tau(h\xi_{k-1})}\frac{\partial \ell_{k-1}}{\partial \nu_{k-1}} - \frac{\partial \ell_k}{\partial \nu_k} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

where the adjoint operator $\left(d\tau^{-1}\right)^*$ is defined by the pairing

$$\left\langle \left(d\tau^{-1}_{h\xi_k}\right)^* \frac{\partial \ell^d_k}{\partial \xi_k}, \eta_k \right\rangle := \left\langle \frac{\partial \ell^d_k}{\partial \xi_k}, d\tau^{-1}_{h\xi_k}(\eta_k) \right\rangle, \text{ for } \eta_k = g_k^{-1}\delta g_k \in \mathfrak{g}, \tag{4}$$

the diamond operator $\diamond : V \times V^* \to \mathfrak{g}^*$ is a bilinear operator defined by

$$\left\langle \eta_k a_k, \frac{\partial \ell^d_k}{\partial a_k} \right\rangle_{V^*\times V} := -\left\langle \frac{\partial \ell^d_k}{\partial a_k} \diamond a_k, \eta_k \right\rangle_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}}, \text{ for } \frac{\partial \ell^d_k}{\partial a_k} \in V,\ a_k \in V^* \text{ and } \eta_k \in \mathfrak{g}, \tag{5}$$

and the operator $\mathcal{L}^* : G \times Q \to Q$ is defined by the pairing

$$\left\langle \frac{\partial \ell_{k-1}}{\partial \nu_{k-1}}, \tau\left(h\xi_{k-1}\right) w_k \right\rangle := \left\langle \mathcal{L}^*_{\tau(h\xi_{k-1})} \frac{\partial \ell_{k-1}}{\partial \nu_{k-1}}, w_k \right\rangle, \text{ for } w_k = g_k^{-1}\delta q_k \in T_{q_k}Q. \tag{6}$$

3 The formulation of underwater vehicle dynamics

The reduced Lagrangian for underwater vehicle dynamics is defined in the configuration space $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{so}(3) \times V^*$ with $V^* = \mathbb{R}^3$. This can be rewritten in the form $\ell^d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times V^* \to \mathbb{R}$:

$$\ell^d\left(n_k, \nu_k, \omega_k, a_k\right) = \frac{m}{2}\langle \nu_k, \nu_k \rangle + \frac{1}{2}\langle \omega_k, J\omega_k \rangle + (m\mathrm{g} - \rho|\mathcal{V}|\mathrm{g}) n_k^\top a_k - \rho|\mathcal{V}|\mathrm{g}\langle r, a_k \rangle, \tag{7}$$

where $n_k \in \mathbb{R}^3$ is the reduced position, $\nu_k \in \mathbb{R}^3$ is the reduced velocity, $a_k = g_k^{-1} e_z$ is the advected parameter for $e_z = (0,0,1)^\top$, and $m, J, \mathrm{g}, \rho, |\mathcal{V}|, r$ are constants. The isomorphism between $(\mathbb{R}^3, \times)$ and $(\mathfrak{so}(3), [\cdot,\cdot])$ is applied here. In more details, an angular velocity ω_k corresponds to a 3-dimensional skew-symmetric matrix in $\mathfrak{so}(3)$ as follows:

$$\mathbb{R} \ni \omega = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)^\top \mapsto \omega^\times = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3). \tag{8}$$

When the Cayley map $\tau\left(\omega^\times\right) = \left(I - \frac{1}{2}\omega^\times\right)^{-1}\left(I + \frac{1}{2}\omega^\times\right)$ is chosen, the discrete Euler–Poincaré equations (3) for the underwater vehicle dynamics read

$$\begin{aligned} &J\omega_k + \frac{h}{2}\left(\omega_k \times J\omega_k\right) + \frac{h^2}{4}\left(\|\omega_k\|^2 J\omega_k + \omega_k \times \left(\omega_k \times J\omega_k\right)\right) = J\omega_{k-1} - \frac{h}{2}\left(\omega_{k-1} \times J\omega_{k-1}\right) \\ &\quad + \frac{h^2}{4}\left(\|\omega_{k-1}\|^2 J\omega_{k-1} + \omega_{k-1} \times \left(\omega_{k-1} \times J\omega_{k-1}\right)\right) - \rho|\mathcal{V}|\mathrm{g} r \times a_k + m\left(\nu_k \times \nu_k\right), \\ &h\left(m\mathrm{g} - \rho|\mathcal{V}|\mathrm{g}\right) a_k - \tau\left(h\omega^\times_{k-1}\right) m\nu_{k-1} - m\nu_k = 0. \end{aligned}$$

Acknowledgements. This research is supported by JST-SPRING (JPMJSP2123), JSPS KAKENHI (JP24K06852), JST-CREST (JPMJCR1914), and Keio University (KLL).

References

[1] E. S. Gawlik, P. Mullen, D. Pavlov, J. E. Marsden, and M. Desbrun. Geometric, variational discretization of continuum theories. *Physica D*, 240(21):1724–1760, 2011.

[2] N. Bou-Rabee. *Hamilton–Pontryagin integrators on Lie groups.* PhD Thesis, California Institute of Technology, 2007.

[3] D. D. Holm, R. Hu, and O. D. Street. Lagrangian reduction and wave mean flow interaction. *Physica D*, 454:133847, 2023.

日本応用数理学会 2024 年度 年会 講演予稿集 (2024-09-14/16) Copyright (C) 2024 一般社団法人日本応用数理学会

離散ラグランジュ・ディラック力学系に基づく非ホロノミック系の変分的離散化

吉村 浩明 [1], 彭 林玉 [2]
[1] 早稲田大学基幹理工学部，[2] 慶應義塾大学理工学部
e-mail： yoshimura@waseda.jp, l.peng@mech.keio.ac.jp

1 概要

非ホロノミック系の離散化に関連して，離散ラグランジュ・ダランベール原理によって定式化された離散方程式が長時間にわたって数値的に安定となることが良く知られている [1, 2]．一方，この数値解法が構造保存であるかどうかは十分に分かっていない．本研究では，ラグランジュ・ダランベール・ポントリヤーギン原理を離散化することによって，離散化されたラグランジュ・ディラック系のシステム方程式を導き，それが離散ラグランジュ・ダランベール方程式と等価であることを示す．

2 連続系のラグランジュ・ダランベール・ポントリヤーギン原理

Q を n 次元の配位多様体とする．$L : TQ \to \mathbb{R}$ をラグランジアンとすると，ラグランジュ・ダランベール・ポントリヤーギン原理より，$TQ \oplus T^*Q$ 上の曲線 $(q(t), v(t), p(t))$ が，汎函数

$$\mathfrak{S}(q, v, p) = \int_0^T \{L(q(t), v(t)) + \langle p(t), \dot{q}(t) - v(t)\rangle\}\, dt$$

の臨界点であるとき，すなわち，一般化エネルギー $E(q, v, p) := \langle p, v\rangle - L(q, v)$ を導入して，

$$\delta \int_0^T \{\Theta_{T^*Q}(q(t), p(t))(\dot{q}(t), \dot{p}(t)) - E(q(t), v(t), p(t))\}\, dt = 0 \tag{1}$$

が成立するとき，$(q(t), v(t), p(t))$ はラグランジュ・ダランベール・ポントリヤーギン方程式

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}, \quad \dot{q} = v \in \Delta_Q(q), \quad \dot{p} - \frac{\partial L}{\partial q} \in \Delta_Q^\circ(q)$$

の解曲線となる．但し，変分 $\delta q(t)$ は，両端固定 $\delta q(0) = \delta q(T) = 0$ のもと，拘束 $\delta q(t) \in \Delta_Q(q(t))$ を満たすように取る．また，$\Theta_{T^*Q} \in \Lambda^1(T^*Q)$ は余接バンドル T^*Q 上の正準１形式である．上記の式は，ラグランジュ・ディラック系の運動方程式となっている．

3 離散ラグランジュ・ダランベール・ポントリヤーギン原理

離散写像 $\Psi^-_{Q\times Q} : Q \times Q \to TQ; (q_k, v_k) \mapsto (v_k, \hat{v}_k^- = (v_k - q_k)/h)$ を用いて，式 (1) の $TQ \oplus T^*Q$ 上の離散ラグランジュ・ダランベール・ポントリヤーギン原理を離散化し，$(Q \times Q) \oplus T^*Q$ 上の離散ラグランジュ・ダランベール・ポントリヤーギン原理を考えてみよう．離散一般化エネルギーを

$$\begin{aligned} E_d(q_k, v_k, p_{k+1}) &= h\, \langle (q_{k+1}, p_{k+1}), (q_k, v_k)\rangle_{d+} - L_d(q_k, v_k) \\ &= h\, \langle p_{k+1}, \hat{v}_k^-\rangle - L_d(q_k, v_k) \end{aligned} \tag{2}$$

と定義すると，区間 $[t_k, t_{k+1}]$ で離散化された作用積分は以下のように与えることができる．

$$\begin{aligned} &\int_{t_k}^{t_{k+1}} \{\Theta_{T^*Q}(q(t), p(t))(\dot{q}(t), \dot{p}(t)) - E(q(t), v(t), p(t))\}\, dt \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} [L(q, v) + \langle p, \dot{q} - v\rangle]\, dt \ \approx\ L_d(q_k, v_k) + h\, \langle p_{k+1}, q_{k+1} - v_k\rangle . \end{aligned}$$

定理 1. 以下の４つの主張は，等価である．

(i) (+) 公式： 離散軌跡 $(q_d, v_d, p_d) \in \mathcal{C}_d((Q \times Q) \oplus T^*Q)$ は，作用積分写像

$$\delta \mathfrak{S}_d(q_d, v_d, p_d) = \delta \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ h\, \Theta^{d+}_{T^*Q}(q_k, p_k, q_{k+1}, p_{k+1}) - E_d(q_k, v_k, p_{k+1}) \right\} = 0$$

の臨界点である．但し，変分は，両端固定 $\delta q_0 = \delta q_N = 0$ のもと，変分拘束 $\delta q_k \in \Delta_Q(q_k)$ 及び離散拘束 $(q_k, v_k) \in \Delta_Q^{d+} \subset Q \times Q$ を満たすように取るものとする．

(ii) (−) 公式： 離散軌跡 $(q_d, v_d, p_d) \in \mathcal{C}_d((Q \times Q) \oplus T^*Q)$ は，作用積分写像

$$\delta \mathfrak{S}_d(q_d, v_d, p_d) = \delta \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ h\, \Theta^{d+}_{T^*Q}(q_k, p_k, q_{k+1}, p_{k+1}) - E_d(q_k, v_k, p_{k+1}) \right\} = 0$$

の臨界点である．但し，変分は，両端固定 $\delta q_0 = \delta q_N = 0$ のもと，変分拘束 $\delta v_k \in \Delta_Q(v_k)$ 及び離散拘束 $(q_k, v_k) \in \Delta_Q^{d-} \subset Q \times Q$ を満たすように取るものとする．

(iii) 離散軌跡 $(q_d, v_d, p_d) \in \mathcal{C}_d((Q \times Q) \oplus T^*Q)$ は，以下の (±) 離散ラグランジュ・ダランベール・ポントリヤーギン方程式を満たす．

$$(+)\ \text{公式：}\ p_{k+1} = \frac{\partial L_d}{\partial v_k}(q_k, v_k),\ \ p_k + \frac{\partial L_d}{\partial q_k}(q_k, v_k) \in (\Delta_Q(q_k))^\circ,\ \ v_k = q_{k+1},\ \ (q_k, v_k) \in \Delta_Q^{d+},$$

$$(-)\ \text{公式：}\ p_k = -\frac{\partial L_d}{\partial q_k}(q_k, v_k),\ p_{k+1} - \frac{\partial L_d}{\partial v_k}(q_k, v_k) \in (\Delta_Q(v_k))^\circ,\ v_k = q_{k+1},\ \ (q_k, v_k) \in \Delta_Q^{d-}.$$

(iv) 曲線 $q_d \in \mathcal{C}_d(Q)$ は次の離散的ラグランジュ・ダランベール方程式を満たす．

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) \in \Delta_Q^\circ(q_k), \quad (q_k, q_{k+1}) \in \Delta_Q^{d\pm}.$$

4　結言

本研究では，非ホロノミックな拘束を受ける力学系について，ラグランジュ・ディラック系を導く，ラグランジュ・ダランベール・ポントリヤーギン原理に関する ± 離散変分的公式を導き，それに基づく ± 離散ラグランジュ・ダランベール・ポントリヤーギン方程式を導出した．さらに，それらが離散ラグランジュ・ダランベール方程式と等価であることを示した [1, 2]．

謝辞　本研究は，科研費基盤研究 (C)(22K03443, 24K06852)，JST CREST(JPMJCR1914)，早稲田大学特定課題研究 (2024C-102)，慶應義塾大学福澤基金の支援を受けている．

参考文献

[1] Cortés, J. & S. Martínez, Nonholonomic integrators, *Nonlinearity*, **14** (2001), 1365–1392.

[2] McLachlan, R. & M. Perlmutter, Integrators for nonholonomic mechanical systems, *J. Nonlin. Sci.*, **16**, No.4 (2006), 283–328.

[3] Marsden, J. E. & M. West, Discrete mechanics and variational integrators, *Acta Numer.*, **10** (2001), 357–514.

[4] Peng, L. & H. Yoshimura, Discrete Dirac structures and discrete Lagrange-Dirac dynamical systems in mechanics, *preprint*, 2024.