

テオドロスの螺旋の拡張

三浦 憲二郎¹, 三谷 純², R.U. Gobithaasan³, Md Yushalify Misro³

¹ 静岡大学, ² 筑波大学, ³ University Science Malaysia

e-mail : miura.kenjiro@shizuoka.ac.jp

1 概要

テオドロスの螺旋 (spiral of Theodorus) は、一定の幅を持つテープを折り紙のように折ることで生成できる。この螺旋は、平方根螺旋、アインシュタイン螺旋、ピタゴラス螺旋、あるいはピタゴラスのカタツムリとも呼ばれる。テオドロスの業績はすべて失われているが、プラトンは彼の業績を記述した対話「テアイテトス」の中でテオドロスについて言及しており、テオドロスは螺旋によって、3 から 17 までの非平方整数の平方根はすべて無理数であることを証明したと推測される。その形状は数学者によく知られているアルキメデスの螺旋に似ている。この報告では、テープの幅を可変にすることでテオドロスの螺旋を拡張する。また、極座標による解析的表現、およびラプラス変換による螺旋上の点の計算の高速化についても説明する。

2 問題設定

著者の一人である三谷により以下の問題が提起された。幅 a の紙テープ状を折ることを想定して、図 1 のように、原点 (基点) を O とし、最初の頂点 P_0 を $(b, 0)$ とする。したがって、基点 O と頂点 P_0 の距離 $r_0 = b$ である。さらに 2 番目の頂点 P_1 を $P_1 = (b, a)$ で与える。三平方の定理より、原点 O と P_1 を結んで作られる斜辺の長さ r_1 は

$$r_1 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1)$$

である。

3 番目の頂点 P_2 は、 P_1 から斜辺に垂直に a だけ辺を伸ばして定める。原点 O と P_2 を結ぶ 2 番目の三角形の斜辺の長さ r_2 は、

$$r_2 = \sqrt{2a^2 + b^2} \quad (2)$$

となる。同様の処理を繰り返すことで点列 P_i の座標が定まる。折り方の手順を図 1 右に示す [2]。このとき生成される離散曲線はどのような曲線か？

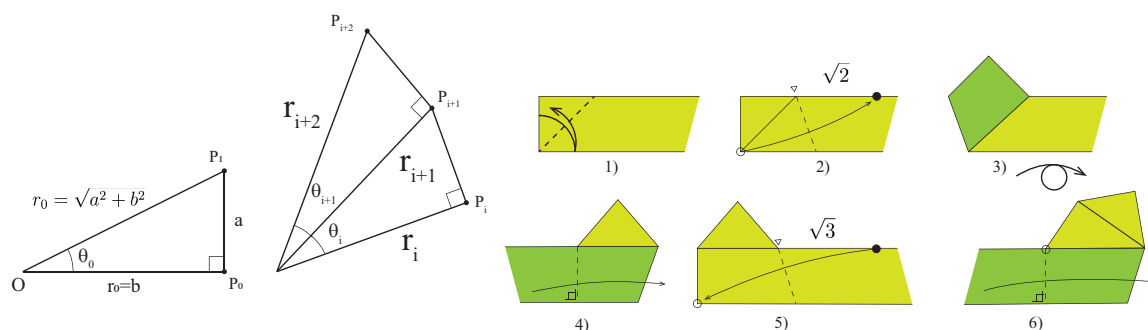


図 1. 折り紙の頂点、折る手順 [2].

3 Spiral of Theodorus の拡張

第 2 節で行ったように Spiral of Theodorus を拡張し、その解析的な表現を求める。ここでは、 $b = 1$ の場合について議論する。 $b \neq 1$ の場合は、曲線全体を $1/b$ にスケーリングすれば $b' = 1$, $a' = a/b$ に対応することに注意する。

3.1 Extended spiral of Theodorus

まず、表現式を示してからそれが拡張した spiral of Theodorus (extended spiral of Theodorus) の解析的な表現であることを証明する。拡張 spiral of Theodorus を表す式を $T(\alpha, a)$ で表すと、

$$T(\alpha, a) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{a i}{\sqrt{a^2(k-1)+1}}}{1 + \frac{a i}{\sqrt{a^2(k-1)+\alpha}}}, \quad \alpha > 0 \quad (3)$$

$\alpha = 1$ とすると、

$$T(1, a) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{a i}{\sqrt{a^2(k-1)+1}}}{1 + \frac{a i}{\sqrt{a^2(k-1)+1}}} = 1 \quad (4)$$

また、

$$\begin{aligned} T(\alpha + a^2, a) &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{a i}{\sqrt{a^2(k-1)+1}}}{1 + \frac{a i}{\sqrt{a^2(k-1)+\alpha+a^2}}} \\ &= \left(1 + \frac{a}{\sqrt{\alpha}}\right) T(\alpha, a) \end{aligned} \quad (5)$$

上式は、螺旋生成の 1 ステップに対応しており、現在の曲線上の点の値 ($T(\alpha, a)$) と、それを曲線と原点との距離 $\sqrt{\alpha}$ で割り a を掛けて長さを a としてから、さらに i を掛けることで $\pi/4$ 回転させると次の曲面上の点 (原点との距離の 2 乗を 1 増加させた点) が得られることを示している。これは生成手順と整合している。

参考文献

- [1] Alfred Gray, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Second Edition, CRC Press, 1998.
- [2] Tomoko Fuse, Spiral-Origami|Art|Design, VIRECK VERLAG, 2012.
- [3] Walter Gautschi, The spiral of Theodorus, numerical analysis, and special fuctions, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010.
- [4] Philip J. Davis, Spirals: From Theodorus to Chaos, A.K. Peters, 1993.

螺旋状回廊空間としてのさざえ堂の形態モデル

鈴木 利友¹, 橋村 風香², 山本 親¹
¹武庫川女子大学建築学部, ²不二建設
e-mail: ttsuzuki@mukogawa-u.ac.jp

1 背景と目的






互いに鏡像となる2つの幾何学的形状がカイラリティ (chirality:鏡像が互いに重ならない性質) をもつとき、建築設計において片方が選択的に多く用いられる場合がある。本研究では、日本において江戸時代後期に成立した仏堂であり、内部に螺旋状の回廊空間をもつさざえ堂 (栄螺堂) に着目する。江戸時代建立のさざえ堂は4棟が現存するほか、明治時代再建のものが2棟知られている (ただし2棟のうち總持寺 (西新井大師) 三匠堂[1]は1884年 (明治17年) の再建以降、回廊空間が内部ではなく、外部にある)。この中で外観が左右非対称で、カイラリティをもつ会津さざえ堂[2]、蘭庭院栄螺堂[3]は、左巻き螺旋の回廊空間の形状が、外観にも現れている。

さざえ堂は本来三匠堂と呼ばれ、仏教の礼法である右繞三匝に基づき、参拝者が右回りに3周しながら、仏像を順に参拝する仏堂である。実際、外観が左右対称な4棟のうち、總持寺三匠堂を除く3棟[4][5][6]において、参拝者は矩形平面の堂内を右回りに3周する。これは羅漢寺三匠堂 (現存せず) が起源とされる[7]。しかし会津さざえ堂は、正六角形平面の堂内を右回りに1+3/4周しながら斜路を上ったのち、太鼓橋を渡り、左回りに1+3/4周しながら下る二重螺旋である。計3周半ではあるが、後半は左回りである。また蘭庭院栄螺堂は、正八角形平面の堂内を右回りに1+1/4周しながら階段を上ったのち、直階段を下り、最後に右回りに1/4周する一重螺旋であり、やはり右回り3周ではない。右回り3周ではない両建築の設計において、螺旋状の回廊空間がどのように決定されたのか、その形状生成原理の解明を目指し、参拝経路に着目したさざえ堂の形態のモデル化を試みる。

2 形態モデルの作成方法

内部に螺旋状の回廊空間をもつさざえ堂5棟 (表1) について、参拝経路を軸測投影で表現した形態モデルを上り、下りに分けて作成する (図1)。形態モデルにおいては、参拝経路を折れ線で結んだ上で、参拝者が右折 (左折) する経路上の頂点のうち、外観に現れる頂点を● (●) で表す。外観に現れない頂点に印をつけない。●, ●それぞれ、参拝者が通過する順に、1, 2, 3, …と番号を付す。

表1 形態モデル作成の対象としたさざえ堂

名称	曹源寺さざえ堂 (本堂)	長禅寺三世堂	成身院百体観音堂	会津さざえ堂 (円通三匠堂、 旧正宗寺三匠堂)	蘭庭院栄螺堂 (六角堂)
写真					
平面	矩形	矩形	矩形	正六角形	正八角形
建立年	1798年 (寛政10年) 建立	1763年 (宝暦13年) 建立 1801年 (享和元年) 再建	1795年 (寛政7年) 建立 1910年 (明治43年) 再建	1796年 (寛政8年) 建立	1839年 (天保10年) 建立
所在地	群馬県太田市	茨城県取手市	埼玉県本庄市	福島県会津若松市	青森県弘前市

3 形態モデルの比較・考察

羅漢寺三匠堂を起源とする矩形平面の3棟のうち、曹源寺さざえ堂、長禅寺三世堂は、上りにおいて、3階建の堂内を右回りに3周することにより、●の番号が12以上に達する。うち曹源寺さざえ堂では、下りにてさらに右回りに1周するため、計右回り4周となり、●の番号は16に達する。成身院百体観音堂において、1階、2階の参拝経路は右回りであるが、3階は左回りであるため、上りにおける●の番号は8にとどまる。しかし下りにお

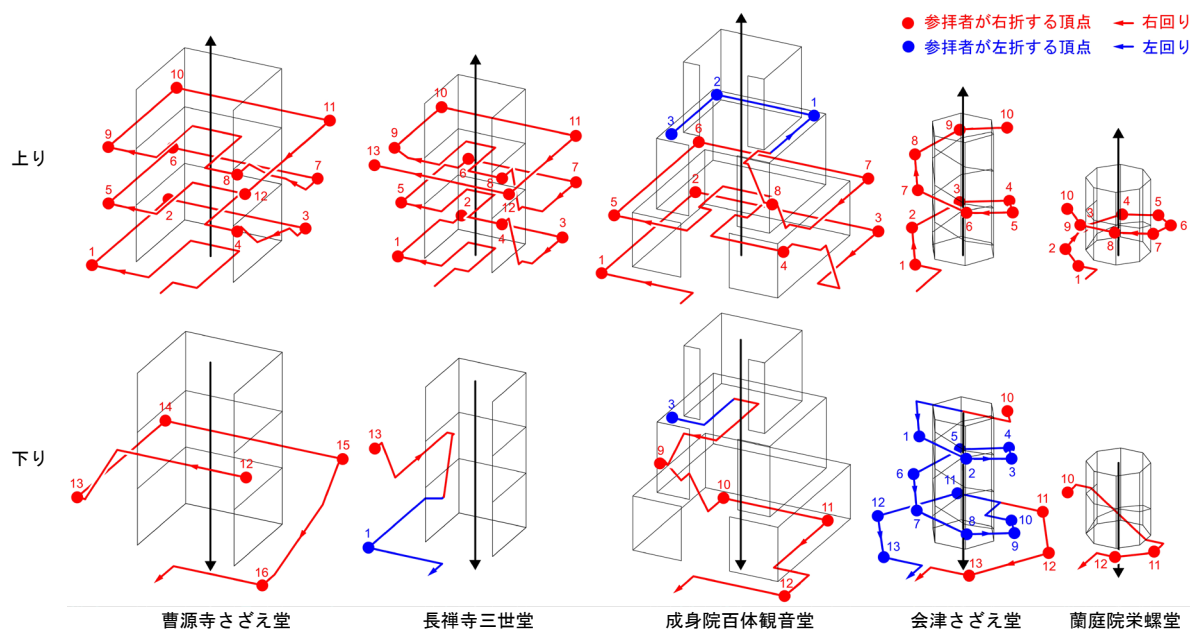


図1 参拝路に基づく各さざえ堂の形態モデル

いて右回りに1周するため、計右回り3周となり、●の番号は12に達する。

会津さざえ堂において、堂内における●の番号は10にとどまる。背面の出口から縁に出たのち、右折または左折し、半周して正面から出る参拝経路となっているが、参拝者が右折を選んだ場合は、●の番号が13に達する。蘭庭院米螺堂は、堂内の上りにおいて●の番号は10にとどまる。しかし、下りにおいて堂外に出るまでに、●の番号は12に達する。12は、矩形平面のさざえ堂において、右回りに3周したときに達する番号に等しい。

会津さざえ堂は正六角形平面、蘭庭院米螺堂は正八角形平面であり、堂内の螺旋状の回廊空間の見通しがききにくい。矩形平面のさざえ堂とは異なり、堂内で参拝者は方向感覚を失い、何回転したかの把握が難しくなる。このような回廊空間を12回右折させる設計は、右回り3周に相当する空間体験を意図しているとも考えられる。ただしこれは、会津さざえ堂の参拝者が縁に出たのち、右回り半周することが前提となる。現地における観察の結果、右折半周する参拝客の方が、左回り半周する参拝客より多いことが判明しているが、その結果は現在分析中であり、別の機会に報告したい。

謝辞 本研究はJSPS 科研費 JP23K11753, JST CREST JPMJCR1911 の支援を受けた。

参考文献

- [1] 近藤正昭, 藤原龍光編: 西新井大師, 西新井大師總持寺, 1984.
- [2] 日本大学理工学部建築史研究室: 円通三匠堂 (さざえ堂) 実測図, 飯盛本家, 1965.
- [3] 「新編 弘前市史」編纂委員会 編: 新編 弘前市史 資料編3 (近世編2), pp. 1347-1348, 弘前市企画部企画課, 2000.
- [4] 文化財保存計画協会 編著: 群馬県指定重要文化財 曹源寺さざえ堂保存修理工事報告書, 宗教法人曹源寺, 2018.
- [5] 取手市史編さん委員会 編: 取手市史 社寺編, pp. 313-326, 取手市教育委員会, 1988.
- [6] 埼玉県教育委員会 編: 埼玉県の近代和風建築 一埼玉県近代和風建築総合調査報告書一, pp. 235-236, 埼玉県教育委員会, 2017.
- [7] 小林文次: 羅漢寺三匠堂考, 日本建築学会論文報告集 No. 130, pp. 53-62, 1966.

正規，非正規な配置の一般化ミウラ折りの剛体折り畳み挙動における自己交差性

田川 浩之¹

¹ 武庫川女子大学建築学部建築学科

e-mail: tagawa@mukogawa-u.ac.jp

1 概要

一般化ミウラ折りにおいて，山・谷の折れ線パターン，挟角の大小（大：90° 以上，小：90° 未満）のパターンについて正規，非正規な配置とした場合の，剛体折り畳み挙動における自己交差性について検討を行った．従来の直線状ミウラ折り，提案した円弧状，渦巻き状ミウラ折りのように，正規な配置の場合は，規則正しく折り畳まれるため，自己交差は起きないが，非正規な配置の場合は，Oval tessellation やねじり折りなどを除き，自己交差を起こす場合が多い．

2 正規な配置の一般化ミウラ折り

4 価 1 節点回りにおける剛体平坦折り畳みにおいて，最小角を挟む 2 本の折れ線のうちどちらが他の 3 本の折れ線と折りの向き（山・谷）が異なる．このうち，図 1(a) に示すように，90° 以上の 2 つの挟角と対面にある折れ線の折りの向きを他と逆にして，かつ，図 1(b) に示す挟角の大小のパターンであるものを正規な配置，それら以外を非正規な配置と定義する．正規な配置の一般化ミウラ折りとして渦巻き状ミウラ折り [1] の剛体折り畳みを図 2 に示す．2 つの大きな挟角を含む 2 つの平面が，2 つの小さな挟角を含む 2 つの平面を左から右に次々に包み込み，次の段では，逆に右から左に次々に包み込む．X が Y を包み込むことを $X \supset Y$ で示すと以下のように表現できる．この場合，規則正しく折り畳まれるため自己交差が起こらない．

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset A_5 \supset \dots$$

$$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset B_4 \subset B_5 \subset \dots$$

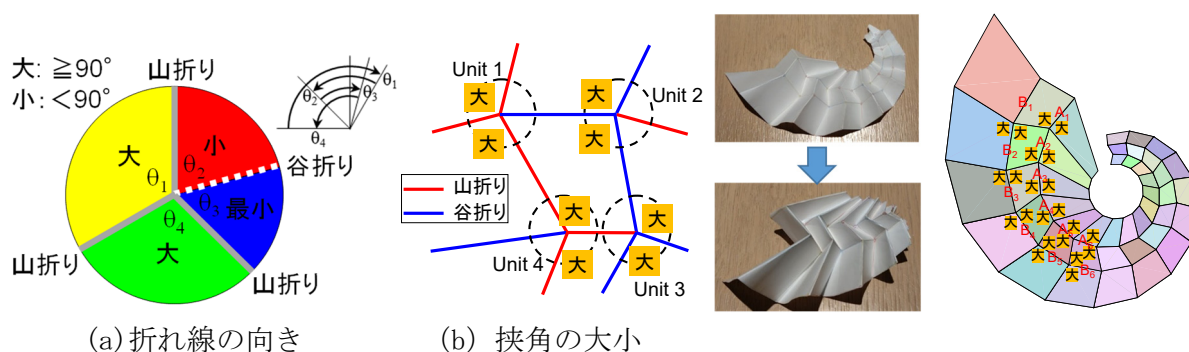
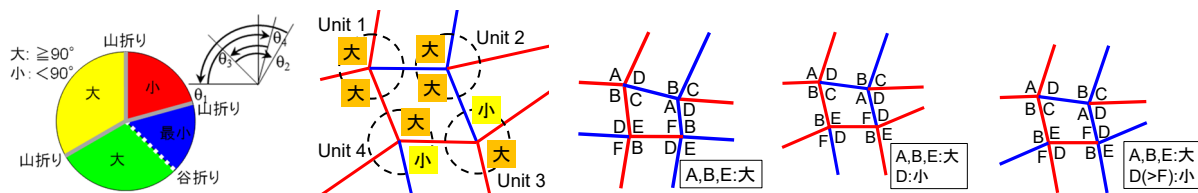


図 1 正規な配置パターン

図 2 渦巻き状ミウラ折り [1] の剛体折り畳み

3 非正規な配置の一般化ミウラ折り

非正規な配置パターンを図 3 に示す．特異な一般化ミウラ折りの正規な配置の例を図 4(a) に示す．Unit3, 4 で挟角 B と D を入れ替えた図 4(b) でも連動折り畳みの条件式を満たす．ただし，図 4(b) 左のように図 1(a) の山・谷の折れ線の正規な配置を割り当てると自己交差が起こる．そこで，図 4(b) 右のように図 3(a) の山・谷の折れ線の非正規な配置を割り当てると自己交差は起こりにくくなるが，挟角 F が最小角となるように $D > F$ の条件を満たす必要がある．



(a) 折れ線の向き (b) 挟角の大小(例) (a) 正規な配置 (b) 非正規な配置

図3 非正規な配置パターン 図4 正規, 不正規な配置の特異な一般化ミウラ折り

非正規な配置の特異な一般化ミウラ折りの例として, Hourglass mode, Huffman tessellation[2], Oval tessellation[3]の剛体平坦折り畳み挙動をそれぞれ図5, 図6, 図7に示す. Hourglass mode は 3×3 の基本ユニットでも自己交差を起こす. Huffman tessellation は, 3×3 の基本ユニットでは自己交差を起こしていないが, 3×6 に拡張すると, 自己交差を起こした. 一方, Oval tessellation は自己交差を起こさずに平坦折りとなった.

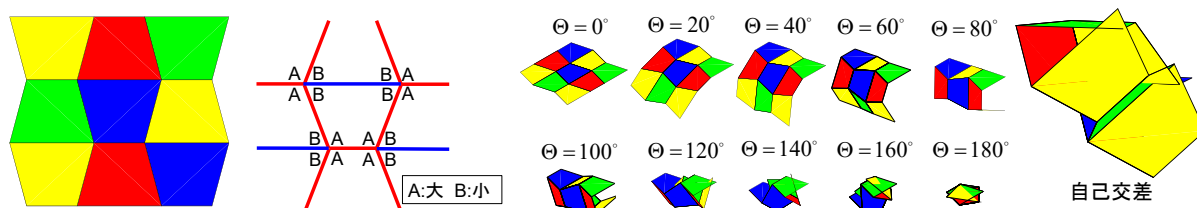


図5 Hourglass mode の剛体平坦折り畳み挙動

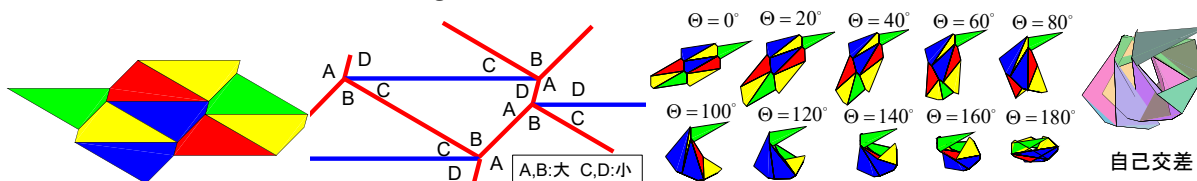


図6 Huffman tessellation[2]の剛体平坦折り畳み挙動

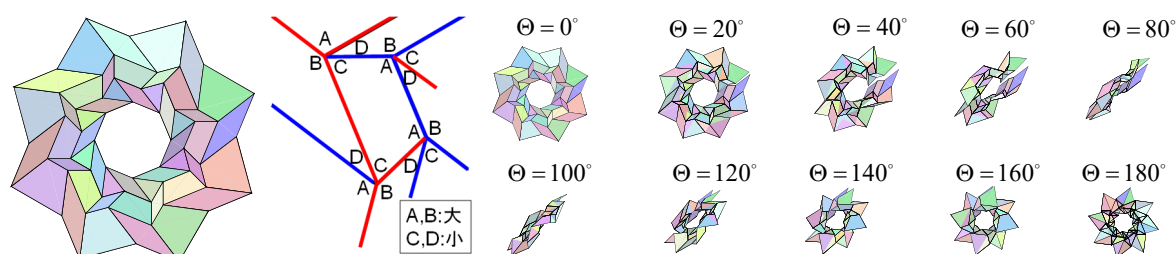


図7 Oval tessellation[3]の剛体平坦折り畳み挙動

謝辞 本研究は, JSPS 科研費 23K04113, JST CREST JPMJCR1911 の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] H. Tagawa, N. Yashioka, T. Suzuki, Proposal of arc- and spiral-shaped Miura-ori and its application to the design of large roof architecture, Proceedings of the IASS symposium 2022, Beijing, China, 2022.
- [2] D. Huffman, Curvature and crease: A primer on paper, IEEE Transactions on computers, Vol. C-25, No. 10, October 1976.
- [3] M. Irii, T. Kobayashi, H. Murai, Similarity structure on 2-dimensional torus and flat origami, JP Journal of Geometry and Topology 22(1), 45–63, 2019.