

データ駆動型連成自励発振レゾネータによる高感度質量計測

降旗 巧¹, 藪野 浩司¹

¹ 筑波大学

e-mail : s2320786@u.tsukuba.ac.jp

1 序論

弱連成する同一なマイクロカンチレバーのモード局在化を用いた微小質量計測は連成を弱くするほど感度が向上する [1]. 実際には, 弱連成する同一なレゾネータの製作は加工精度の問題から困難であるため, 実物のカンチレバー (リアルカンチレバー) と等価なパラメータをもつ回路 (バーチャルカンチレバー) をリアルタイムフィードバックにより連成する手法が提案された [2]. さらに, この手法におけるリアルタイムフィードバックに起因した構成の複雑さを回避するため, 連成を疑似的に再現するデータ駆動型連成自励発振レゾネータが提案され, 理論解析と数値解析により, 質量計測が行えることを示した [3]. しかし, 実験が未実施のため, 外乱やセンサの計測誤差の影響などが考慮されていない. そこで, 本研究では, データ駆動型連成自励発振レゾネータを用いた実験による質量計測を実施し, 手法を確立することを目的とする.

2 計測原理と計測システム実現に向けた数値解析

ファン・デル・ポール振動子と線形振動子との連成レゾネータとデータ駆動型連成レゾネータの解析モデルを図 1 に示す. 代表時間を $T = \frac{1}{\sqrt{k/m}}$, 代表長さを L とすると, 図 1(a) の運動方程式は

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1^* + \eta(-1 + \gamma_3^* u_1^{*2})\dot{u}_1^* + u_1^* &= \kappa(u_2^* - u_1^*) \\ \ddot{u}_2 + \frac{\gamma}{1+\delta}\dot{u}_2^* + \frac{1}{1+\delta}u_2^* &= \frac{\kappa}{1+\delta}(u_1^* - u_2^*) \end{aligned} \quad (1)$$

となる. ここで, u_i^* は u_i の無次元変位, $\eta = \frac{\mu}{m\omega_0}$, $\gamma = \frac{c}{m\omega_0}$, $\gamma_3^* = \gamma_3 L^2$, $\delta = \frac{\Delta m}{m}$, $\kappa = \frac{k_c}{k}$ である. $-\eta u_1^*$ によって自励振動が発生し, $\eta \gamma_3^* u_1^{*2} \dot{u}_1^*$ によって定常振幅を実現し, 2 つの振動子の振幅比から質量を計測する. 図 1(b) で表されたデータ駆動型連成レゾネータの運動方程式は

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1^* + \eta(-1 + \gamma_3^* u_1^{*2})\dot{u}_1^* + u_1^* &= \kappa(\sigma_1^* - u_1^*) \\ \ddot{u}_2 + \frac{\gamma}{1+\delta}\dot{u}_2^* + \frac{1}{1+\delta}u_2^* &= \frac{1}{1+\delta}\sigma_2^* \end{aligned} \quad (2)$$

となる. ファン・デル・ポール振動子がバーチャルカンチレバーであり, 線形振動子がリアルカンチレバーである. リアルカンチレバーを $\sigma_2^* = a_{\sigma_2}^* \cos \omega t + b_{\sigma_2}^* \sin \omega t$ で加振して, 定常応答 u_{2ss}^* を実験で計測する. 式 (2) の第 1 式に $\sigma_1^* = u_{2ss}^*$ を代入して, $\dot{u}_1^*(0) = 0$ で, $\frac{2\pi}{\omega}$ だけ解き, u_1^* の周期的拡張を

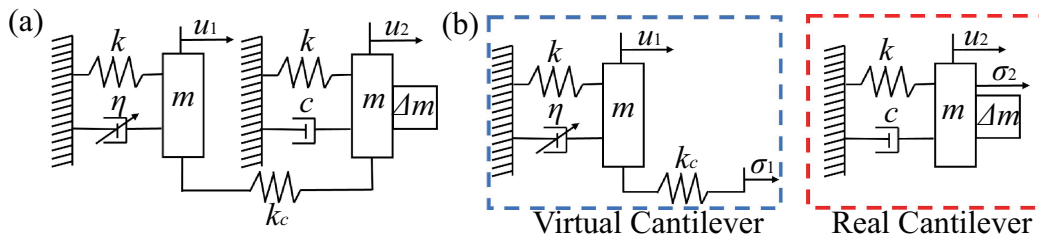


Fig1. Analytical models of (a) coupled resonators and (b) data-driven coupled resonators.

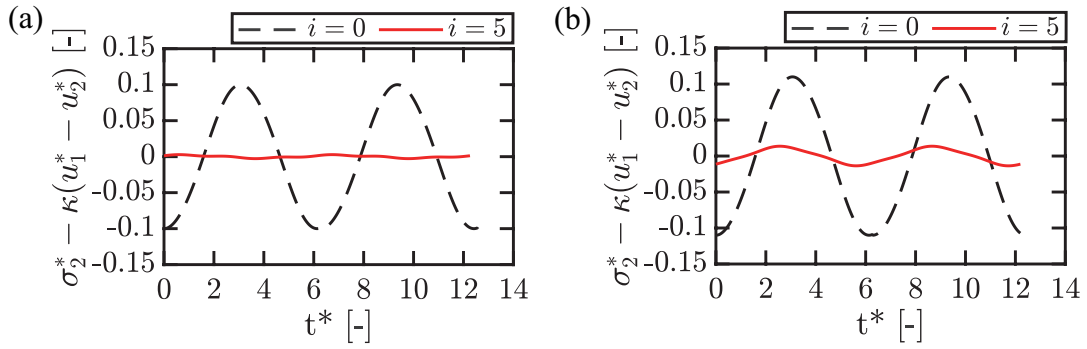


Fig2. Time history of $\sigma_2^* - \kappa(u_1^* - u_2^*)$. (a) is the case of $\delta = 0$. (b) is the case of $\delta = 0.1$.

u_{1ss}^* とする. $f_c \cos \omega t + f_s \sin \omega t = \sigma_2^* - \kappa(u_{1ss}^* - u_{2ss}^*)$ として, $f_c = f_s = 0$ が成り立つとき, 式 (2) は式 (1) と等しくなり, 連成が再現される. そこで, 目的関数を $f_c = f_s = u_1^*(\frac{2\pi}{\omega}) - u_1^*(0) = u_1^*(\frac{2\pi}{\omega}) = 0$ としてニュートン法を行い, a_{σ_2} , b_{σ_2} , ω , $u_1^*(0)$ を更新して, 連成レゾネータの定常応答を再現する. a_{σ_2} , b_{σ_2} の初期値は, κ が微小なので 0. δ , κ が微小なので, ω の初期値は 1 とする. $u_1^*(0)$ の初期値は $-\eta u_1^* \sim \eta \gamma_3^* u_1^{*2} u_1^*$ より, $\frac{2}{\sqrt{\gamma_3^*}}$ とする. a_{σ_2} , b_{σ_2} , ω , $u_1^*(0)$ に対する目的関数の感度は δ が未知数なので差分で求めるため, a_{σ_2} , b_{σ_2} , ω , $u_1^*(0)$ の更新には 4 回の強制振動実験を要する.

上記の計測原理を用いた計測システムが実現可能かを確認するため, 実験に即した形で数値解析を行った. 強制振動実験を行うことを想定して u_2^* はルンゲクッタ法で求めた. まず付加質量比 $\delta = 0$ の数値解析を行った. 他のパラメータの値は $\gamma = \eta = 0.1$, $\gamma_3^* = 1$, $\kappa = 0.05$ である. パラメータの更新回数を i とする. $\delta = 0$ と $\delta = 0.1$ の $\sigma_2^* - \kappa(u_1^* - u_2^*)$ を図 2 にそれぞれ示す. 図 2(a) より, $\sigma_2^* - \kappa(u_1^* - u_2^*)$ は $i = 5$ では $i = 0$ のときと比べて振幅が小さいことから, f_c , f_s が小さくなっていることが分かる. 式 (1) をルンゲクッタ法で解いて求めた振幅比とデータ駆動型との振幅比の誤差は 0.0974% となった. 次に, 付加質量比 $\delta = 0.1$ として, 他のパラメータは変更せずに数値解析を行った. 図 2(b) より, $\sigma_2^* - \kappa(u_1^* - u_2^*)$ の振幅は, $i = 5$ のときは $i = 0$ のときと比べて小さい. 式 (1) をルンゲクッタ法で解いて求めた振幅比とデータ駆動型との誤差は 0.256 % となった.

3 結論

本研究では, ヤコビ行列の要素を差分で求める, リアルカンチレバーの式をルンゲクッタ法で解くなど実験に即した形で行うことで, 計測システムを実現するに際して, 提案されたアルゴリズムが実現可能であることを確かめた. 質量無付加時, 質量付加時ともに, 反復計算により, 連成系の数値積分との振幅比の誤差は小さくなり, 連成が疑似的に再現できたことを確認した.

参考文献

- [1] M. Spletzer, et al., Ultrasensitive mass sensing using mode localization in coupled micro-cantilevers. Applied Physics Letters, 88(25):254102, 2006.
- [2] Y. Kasai, et al., Mass sensing using a virtual cantilever virtually coupled with a real cantilever. Applied Physics Letters, 115(6):063103, 2019.
- [3] Y. Mao and H. Dankkiewicz, On a Principle for Mass Sensing Using Self-Excited Template Dynamics of Coupled Oscillators and Root-Finding Algorithms. Journal of Sound and Vibration, 571(17):118027, 2024.

交通流に対する遅延差分方程式モデルにおける Neimark-Sacker 分岐

宮路 智行¹, 岡本 和也², 友枝 明保³

¹ 京都大学, ² 早稲田大学, ³ 関西大学

e-mail : miyaji.tomoyuki.4m@kyoto-u.ac.jp

1 遅延差分方程式モデル

交通流をマクロスコピックに記述する以下の遅延差分方程式モデルを考える [1].

$$\begin{cases} \rho_x^{t+1} = \rho_x^t - \rho_x^t b_x^t + \rho_{x-1}^t b_{x-1}^t, \\ b_x^t = (1 - \rho_{x+1}^t) [1 - (1 - \alpha)\rho_x^{t-1} - \alpha\rho_{x+1}^{t-1}], \end{cases} \quad (1)$$

ここで ρ_x^t は時刻 t 位置 x における車の密度を表す. $\alpha \in [0, 1]$ はパラメータ, t は自然数, x は 1 から n までの自然数とし, 空間について周期境界条件を課す. (1) は時刻 $t+1$ での状態が時刻 t と $t-1$ での状態によって定まる $2n$ 次元の離散力学系モデルである. この系において, $\sum_{x=1}^n \rho_x^t$ はすべての時刻で保存される. [1] では (1) が交通流のモデルとして不可欠な一様流と渋滞流の双安定性をもつことを数値計算によって示した.

$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ と表し, $j = 1, 2$ に対して $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn})$ とする. $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $\sigma(x_{j1}, \dots, x_{jn}) = (x_{j2}, \dots, x_{jn}, x_{j1})$ とし, $S : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ を $S\mathbf{x} = (\sigma\mathbf{x}_1, \sigma\mathbf{x}_2)$ とする. (1) を $F : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ で書き直す:

$$F(\mathbf{x}, \alpha) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}, \alpha) \\ \mathbf{x}_1 \end{pmatrix}, \quad F_1(\mathbf{x}, \alpha) = \begin{pmatrix} f(\mathbf{x}, \alpha) \\ f(S\mathbf{x}, \alpha) \\ \vdots \\ f(S^{n-1}\mathbf{x}, \alpha) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

ただし $f : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \alpha) = & x_{11} - x_{11}(1 - x_{12})[1 - (1 - \alpha)x_{21} - \alpha x_{22}] \\ & + x_{1n}(1 - x_{11})[1 - (1 - \alpha)x_{2n} - \alpha x_{21}]. \end{aligned}$$

任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $SF(\mathbf{x}, \alpha) = F(S\mathbf{x}, \alpha)$ が成り立つ. つまり $F(\cdot, \alpha)$ は S による \mathbb{Z}_n の作用と可換である.

任意の実数 $\rho \in [0, 1]$ に対して $(n\rho, \dots, n\rho) \in \mathbb{R}^{2n}$ は $F(\cdot, \alpha)$ の不動点であり, 一様流に対応する. この不動点における $F(\cdot, \alpha)$ の線型化固有値は, 離散フーリエ変換によって n 個の 2×2 行列の固有値問題に帰着する [1]. このとき, 空間一様なモードは 1 と 0 を固有値にもつ. 一方, (α, ρ) 平面上の曲線で, その上で空間非一様なモードの固有値が複素平面の単位円周上にあるものが存在する. 中心多様体縮約により, ρ をパラメータとして Neimark-Sacker 分岐が生じることがわかる.

実数値関数 $\phi(\xi)$ と $s \in \mathbb{R}$ に対して $\tau_s \phi(\xi) = \phi(\xi + s)$ とする. もし, 周期 n の周期関数 $\phi(\xi)$, 実数 c , パラメータ α の組 (ϕ, c, α) で

$$-\tau_c \phi + f(\phi, \tau_1 \phi, \dots, \tau_1^{n-1} \phi, \tau_{-c} \phi, \tau_{-c} \tau_1 \phi, \dots, \tau_{-c} \tau_1^{n-1} \phi, \alpha) = 0 \quad (3)$$

を満たすものが存在するならば, 任意の $\xi \in [0, n]$ に対して

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \phi(\xi) \\ \phi(\xi+1) \\ \vdots \\ \phi(\xi+n-1) \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \phi(\xi-c) \\ \phi(\xi+1-c) \\ \vdots \\ \phi(\xi+n-1-c) \end{pmatrix} \Rightarrow F_1(\mathbf{x}, \alpha) = \begin{pmatrix} \phi(\xi+c) \\ \phi(\xi+1+c) \\ \vdots \\ \phi(\xi+n-1+c) \end{pmatrix},$$

が成り立つ. すなわち, 関数 ϕ によって不変閉曲線をパラメータ付けしてその上のダイナミクスを円周の回転で表すことを意味している. これにより, 不変閉曲線を進行波として特徴づけたい.

Neimark-Sacker 分岐で生じる不変閉曲線をパラメータ ρ と α について数値的に追跡するため, (3) をフーリエスペクトル法で離散化し, 擬似弧長法 [2] を適用した. 図 1 は, 時間発展の数値計算と進行波の数値的追跡により描いた基本図である. グレーの実線は一樣流 ($Q = \rho(1-\rho)^2$), 赤い実線は数値的に追跡した進行波の枝である. これらのパラメータ値では安定な渋滞流 (○) と安定な一樣流 (+) の双安定性が見られ, これらを不安定な非一樣流が結んでいる. 本講演では, [1] の数学的な背景を力学系の分岐の観点から議論する.

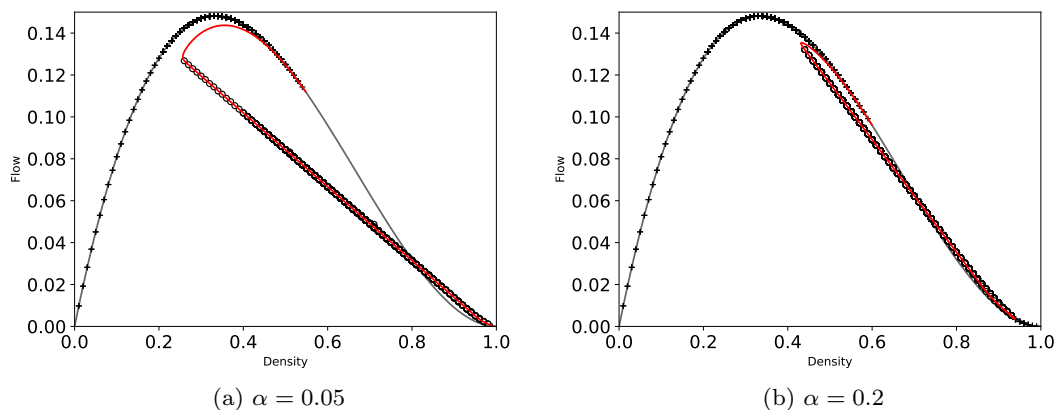


図 1: (1) に対する基本図. 横軸は密度 ρ , 縦軸は流量 Q を表す.

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP23H01089(T.M.), JP23K11139(A.T.) および JST SPRING, Grant Number JPMJSP2128(K.O.) の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] K. Okamoto, T. Miyaji, A. Tomoeda, Nonlinear delay difference equation with bistability as a new traffic flow model, Phys. Scr., 99 (2024), 045245.
- [2] Y. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, Third Edition, Springer, 2004.

自然振動数を有する蔵本モデルにおける同期解の分岐と安定性

矢ヶ崎 一幸

京都大学大学院情報学研究科

e-mail : yagasaki@amp.i.kyoto-u.ac.jp

1 はじめに

自然振動数を有する次の古典的な蔵本モデル [1] を考える:

$$\frac{d}{dt}u_i^n(t) = \omega_i^n + \frac{K}{n} \sum_{j=1}^n \sin(u_j^n(t) - u_i^n(t)), \quad i \in [n] := \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1)$$

ここで, n は節点数, $u_i^n(t) \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ と $\omega_i^n \in \mathbb{R}$ は節点 $i \in [n]$ における振動子の位相と自然振動数, K は結合係数である. $n \gg 1$ のとき, 蔵本モデル (1) のダイナミクスは連続極限 [2]

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \omega(x) + K \int_I \sin(u(t, y) - u(t, x)) dy \quad (2)$$

により近似できることが証明されている [3]. ここで, $I = [0, 1]$ であり, 関係

$$\omega_i^n = n \int_{I_i^n} \omega(x) dx, \quad i \in [n], \quad I_i^n := \begin{cases} [(i-1)/n, i/n] & \text{for } i < n; \\ [(n-1)/n, 1] & \text{for } i = n \end{cases}$$

を仮定している. 以下では, $a > 0$ を定数として $\omega(x) = a(x - \frac{1}{2})$ とする.

文献 [3] ではまた次のことが示されている: $K/a \geq 2/\pi$ のとき, $\theta \in \mathbb{S}^1$ を任意の定数, $C > 0$ を

$$C = \frac{KC}{a} \left(\arcsin\left(\frac{a}{2KC}\right) + \frac{a}{2KC} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2KC}\right)^2} \right)$$

を満たす定数として, 連続極限 (2) は次の連続解の 1 パラメータ族を有する.

$$u(t, x) = U(x) + \Omega t + \theta, \quad U(x) = \arcsin\left(\frac{a(x - \frac{1}{2})}{KC}\right) \quad (3)$$

ここで, 各 K/a の値に対して, もしそれらが存在するならば, 定数 C の値は一意的に決定され, 連続解の族 (3) も一意的に定められる. $n \rightarrow \infty$ のとき連続解の族 (3) に収束する式 (1) の平衡点の族も存在する [3].

2 蔵本モデル

節点数 n が奇数の場合を考え, $n_0 \in \mathbb{N}$ として $n = 2n_0 + 1$, $\nu = a/n$ とおく.

$$v_i = \begin{cases} u_i - u_{n_0+1} & \text{for } i \leq n_0; \\ u_{i+1} - u_{n_0+1} & \text{for } n_0 < i \leq 2n_0. \end{cases} \quad (4)$$

とすると, 式 (1) は次のように変形される.

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= (i - n_0 - 1)\nu - \frac{K}{n} \left(2 \sin v_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{2n_0} (\sin v_j - \sin(v_j - v_i)) \right), \quad i \leq n_0, \\ \dot{v}_i &= (i - n_0)\nu - \frac{K}{n} \left(2 \sin v_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{2n_0} (\sin v_j - \sin(v_j - v_i)) \right), \quad n_0 < i \leq 2n_0 \end{aligned} \quad (5)$$

$\sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^{2n_0}$ を各項が $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ ($i \in [2n_0]$) で与えられる長さ $2n_0$ の数列とし,

$$\Sigma_{n_0} = \{\sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^{2n_0} \mid \sigma_i \in \{-1, 1\}, i \in [2n_0]\}$$

と表す. 各 $\sigma \in \Sigma$ に対して関数 $\chi^\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定める.

$$\chi^\sigma(\xi) = \frac{\xi}{n_0} \left(1 + \sum_{i=1}^{n_0} \sigma_i \sqrt{1 - \left(\frac{i - n_0 - 1}{n_0} \xi \right)^2} + \sum_{i=n_0+1}^{2n_0} \sigma_i \sqrt{1 - \left(\frac{i - n_0}{n_0} \xi \right)^2} \right)$$

定理 1 ある $\sigma \in \Sigma_{n_0}$ と $K > 0$ に対して $\xi \in (0, 1]$ が $a/K = |\chi^\sigma(\xi)|$ を満たすものと仮定する. このとき,

$$v_i^\sigma = \begin{cases} \phi_i & \text{if } \sigma_i = 1; \\ \pi - \phi_i & \text{if } \sigma_i = -1 \text{ and } \phi_i > 0; \\ -\phi_i - \pi & \text{if } \sigma_i = -1 \text{ and } \phi_i < 0, \end{cases} \quad \phi_i = \begin{cases} \arcsin \left(\frac{(i - n_0 - 1)\xi}{n_0} \right) & \text{for } i \leq n_0; \\ \arcsin \left(\frac{(i - n_0)\xi}{n_0} \right) & \text{for } n_0 < i \leq 2n_0, \end{cases}$$

とすると, $v^\sigma = (v_1^{\sigma_1}, \dots, v_{2n_0}^{\sigma_{2n_0}})$ は式 (5) の平衡点である. また, K を制御パラメータとしたとき, $|\chi^\sigma(\xi)|$ が $(0, 1)$ 上で最大あるいは最小となるときサドル・ノード分岐が起こり, $K = a/|\chi^\sigma(1)|$ のときピッチフォーク分岐が起こる. さらに, すべての $i \in [2n_0]$ に対して $\sigma_i = 1$ ならば, $\chi^\sigma(\xi)$ は唯一の最大値をもち, そのときの ξ の値を ξ_0 とすると, 平衡点 v^σ は $\xi < \xi_0$ のとき漸近安定, $\xi > \xi_0$ のとき不安定となる. 一方, ある $i \in [2n_0]$ に対して $\sigma_i \neq 1$ ならば, 平衡点 v^σ はつねに不安定である.

式 (4) より, 各 $\sigma \in \Sigma$ に対して, $\theta \in \mathbb{S}^1$ をパラメータとした蔵本モデル (1) の平衡点の 1 パラメータ族が次のように得られ, 他に平衡点は存在しない.

$$u_{n_0+1} = \theta, \quad u_i = \begin{cases} v_i^\sigma + \theta & \text{for } i \leq n_0; \\ v_{i-1}^\sigma + \theta & \text{for } i \geq n_0 + 2 \end{cases} \quad (6)$$

式 (6) は蔵本モデル (1) の同期解を与える.

3 連続極限

各 $\sigma \in \Sigma$ に対する蔵本モデル (1) の平衡点の族 (6) の $n \rightarrow \infty$ の極限から連続極限 (2) の非連続解の 1 パラメータ族が得られる. 定理 1 と文献 [3] の結果を用いることにより, 次の定理が証明される.

定理 2 連続解の族 (3) は連続極限 (2) の唯一の連続な解で, 漸近安定である. 一方, 不連続な解はすべて不安定である.

注意 3 1 以上の有限個の $i \in [n]$ を除いて $\sigma_i = 1$ であるならば, 定理 1 により不安定である蔵本モデルの平衡点 (6) は, $n \rightarrow \infty$ のとき連続極限 (2) の漸近安定な解 (3) に $L^2(I)$ の意味で収束する. これは一見奇妙であるものの, 結合振動系と連続極限の関係性に関する文献 [3] の結果と矛盾しない.

参考文献

- [1] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer, Berlin, 1984.
- [2] G.B. Ermentrout, Synchronization in a pool of mutually coupled oscillators with random frequencies, *J. Math. Biol.*, **23** (1985), 55–74.
- [3] R. Ihara and K. Yagasaki, Continuum limits of coupled oscillator networks depending on multiple sparse graphs, *J. Nonlinear Sci.*, **33** (2023), 62.

グラフ上で定義された蔵本モデルに対するフィードバック制御

キム ドンゴン¹, 矢ヶ崎 一幸²

京都大学大学院情報学研究科

e-mail : ¹kim.donggeon.47r@st.kyoto-u.ac.jp, ²yagasaki@amp.i.kyoto-u.ac.jp

1 概要

自然振動数を有する, グラフ上で定義された蔵本モデル [1] に対してフィードバック制御を行う問題を取りあげる. 全振動子が同じ振動数で同期する状態を目標軌道とし, 制御器は連続極限の方法を用いて設計する. 決定論的および確率論的なグラフの場合を考え, 理論解析を行い, 理論結果を数値シミュレーション結果により検証する.

2 結合振動子ネットワークと連続極限

次式で与えられる, 重み付きグラフ $G_n = \langle V(G_n), E(G_n), W(G_n) \rangle$ 上で定義された蔵本モデルに対するフィードバック制御を考える:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_i^n(t) = & \omega_i^n + \frac{K}{n\alpha_n} \sum_{j=1}^n w_{ij}^n \sin(u_j^n(t) - u_i^n(t)) \\ & + b_1 \sin(V(t) - u_i^n(t)) + b_0, \quad i \in [n] := 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで, n は節点数, $u_i^n(t)$ と ω_i^n は, それぞれ, 各節点における振動子の位相と自然振動数を表し, $\omega \in L^2(I)$, $I = [0, 1]$ として

$$\omega_i^n = n \int_{I_i^n} \omega(x) dx, \quad I_i^n = \begin{cases} [(i-1)/n, i/n] & \text{for } i < n; \\ [(n-1)/n, 1] & \text{for } i = n, \end{cases} \quad i \in [n],$$

であり, $V(t) = V_1 t + V_0$ (V_1, V_0 は定数) は目標軌道で, 全振動子が同じ振動数 V_1 で同期する状態を表す. また, K と α_n は結合係数とスケーリング因子であり, b_1 と b_0 はフィードバック・ゲインと定常入力で, 適切な値を求めて用いる. 一方, 集合 $V(G_n) = [n]$ と $E(G_n)$ は節点集合と枝集合, $W(G_n)$ は重み行列で

$$(W(G_n))_{ij} = \begin{cases} w_{ij}^n & \text{if } (i, j) \in E(G_n); \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

であり, $W \in L^1(I^2)$ として, G_n が確定的な稠密グラフの場合は

$$w_{ij}^n = \langle W \rangle_{ij}^n := n^2 \int_{I_i^n \times I_j^n} W(x, y) dx dy,$$

G_n が確率的なグラフの場合は確率

$$\mathbb{P} = \begin{cases} \langle W \rangle_{ij}^n & \text{稠密のとき} \\ \alpha_n \langle \min(\alpha_n^{-1}, W(x, y)) \rangle_{ij} & \text{スパースのとき} \end{cases}$$

で $w_{ij}^n = 1$, それ以外は $w_{ij}^n = 0$ とする. グラフ G_n が稠密な場合は $\gamma = 0$, スパースな場合は $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ として $\alpha_n = n^{-\gamma}$ とする. 式 (1) は次の連続極限により近似できることが示されている [2].

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \omega(x) + K \int_I W(x, y) \sin(u(t, y) - u(t, x)) dy + b_1 \sin(V(t) - u(t, x)) + b_0 \quad (2)$$

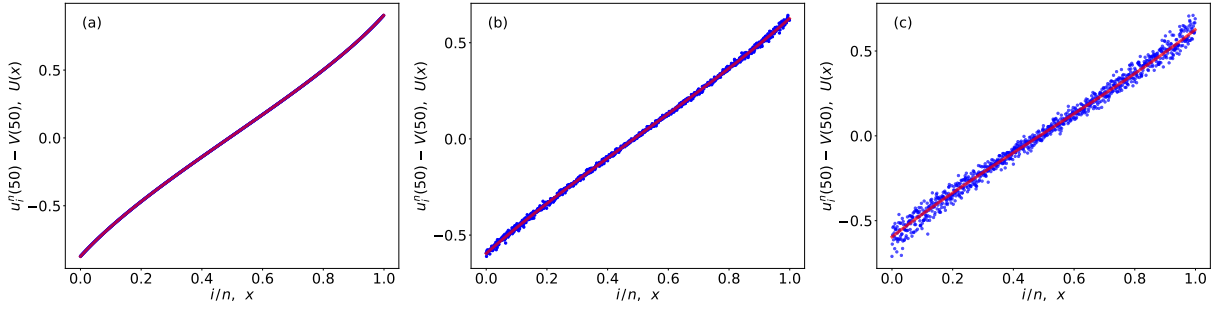


図 1. 節点数 $n = 1000$ の場合の $t = 50$ における式 (1) の応答と目標軌道の差 $u_i^n(50) - V(50)$ と連続極限 (2) の解析解 (4) から求められる結果 $U(x)$ の比較: (a) $a = 1$, $p = 1$, $K = 0.5$ および $b_1 = 0.2$; (b) $a = 0.5$, $p = 0.5$, $K = 0.5$ および $b_1 = 0.2$; (c) $a = 0.5$, $p = 0.5$, $\gamma = 0.3$, $K = 0.5$ および $b_1 = 0.2$

3 理論

$H_\ell : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($\ell = 1, 2$) として $W(x, y) = H_1(x)H_2(y)$ とおく. 条件

$$b_1 \geq \max_{x \in I} (\pm(\omega(x) - V_1 + b_0) - KRH_1(x)) \quad (3)$$

が成り立つとき, 連続極限 (2) は次の特解を有する.

$$u(t, x) = U(x) + V(t), \quad U(x) = \arcsin \left(\frac{\omega(x) - V_1 + b_0}{KRH_1(x) + b_1} \right) \quad (4)$$

ここで,

$$b_0 = \int_I \frac{H_2(x)(V_1 - \omega(x))}{KRH_1(x) + b_1} dx \Big/ \int_I \frac{H_2(x)}{KRH_1(x) + b_1} dx,$$

$$R = \int_I H_2(x) \sqrt{1 - \left(\frac{\omega(x) - V_1 + b_0}{KRH_1(x) + b_1} \right)^2} dx$$

である. 特に, $p \in (0, 1]$, $a > 0$ を定数として, $W(x, y) = p$ (例えば, $H_1(x) = p$, $H_2(y) = 1$) および $\omega(x) = a(x - \frac{1}{2})$ の場合, 条件 (3) は

$$b_1 \geq \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\pi pK$$

となる. また, $b_1 \rightarrow \infty$ のとき $U(x) \rightarrow 0$ となり, 同期解 (4) は目標軌道 $V(t)$ と完全に一致する.

4 数値シミュレーション結果

$a > 0$, $p \in (0, 1]$ を定数とし, $W(x, y) = p$, $\omega(x) = a(x - \frac{1}{2})$ の場合に対して数値シミュレーションを行った. 図 1 に, グラフ G_n が完全, 確率的かつ稠密あるいはスパースな場合に対して, 十分時間が経過したときの振動子ネットワークの応答の目標軌道からの差を青丸でプロットした結果を示す. また, 赤い実線は連続極限 (2) の解析解 (4) から求められる同様の結果 $U(x)$ を表している. 確率的なグラフではばらつきが見られるものの, 両者の結果は非常に良く一致している.

参考文献

- [1] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer, Berlin, 1984.
- [2] R. Ihara and K. Yagasaki, Continuum limits of coupled oscillator networks depending on multiple sparse graphs, *J. Nonlinear Sci.*, **33** (2023), 62.