

Volterra 格子と感染症数理モデル

野邊 厚¹,

¹ 早稲田大学政治経済学術院

e-mail : nobe@waseda.jp

1 Volterra 格子

1 次元無限格子 \mathbb{Z} 上に割り当てられた函数 $a_i = a_i(t)$ ($i \in \mathbb{Z}$) のみたす 1 階連立常微分方程式系

$$\dot{a}_i = a_i (a_{i+1} - a_{i-1}) \quad (i \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

を Volterra 格子もしくは Lotka-Volterra 方程式系という [1]。ただし、 $\dot{a}_i = \frac{d}{dt}a_i$ とする。また、 $a_{2k} = x_k$ および $a_{2k-1} = y_k$ とおくと、two-field form と呼ばれる形式を得る ($k \in \mathbb{Z}$) :

$$\dot{x}_k = x_k (y_{k+1} - y_k), \quad \dot{y}_k = y_k (x_k - x_{k-1}) \quad (2)$$

$V = \mathbb{R}^L(a_1, a_2, \dots, a_L)$ を L 次元微分可能多様体とする (a_1, a_2, \dots, a_L は局所座標系)。(I) 周期境界条件 ($a_i = a_{L+i}$) もしくは (II) 開境界条件 ($a_0 = a_L = 0$) を課した Volterra 格子 (2) は相空間 V 上の完全可積分な Hamilton 系であることが知られている [1, 2]。本稿では、(III) 定数境界条件 ($a_0 = \alpha, a_{L+1} = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) を課した Volterra 格子 (2) を相空間 $V = \mathbb{R}^L$ 上の Hamilton 系として捉え、とくに格子サイズ L が十分小さいときに完全可積分系となることを示す。さらに、このようにして得られる完全可積分系の中に代表的な感染症数理モデルのひとつである SIR モデルとその拡張モデルが含まれることを示す。

2 Poisson 構造

(I) 周期境界条件または (II) 開境界条件を課した Volterra 格子 (2) は、 $2N$ 次元相空間 $V = \mathbb{R}^{2N}$ 上の双 Hamilton 系になる。すなわち、次の両立する Poisson 構造をもつ [2] :

Types	Poisson brackets	Hamiltonians
Quadratic	$\begin{cases} \{x_k, y_k\}_2 = x_k y_k, \\ \{x_k, y_{k+1}\}_2 = -x_k y_{k+1} \end{cases}$	$H_1(x, y) = \sum_{k=1}^N (x_k + y_k)$
Cubic	$\begin{cases} \{x_k, y_k\}_3 = x_k y_k (x_k + y_k), \\ \{x_k, y_{k+1}\}_3 = -x_k y_{k+1} (x_k + y_{k+1}), \\ \{x_k, x_{k+1}\}_3 = -x_k y_{k+1} x_{k+1}, \\ \{y_k, y_{k+1}\}_3 = -y_k x_k y_{k+1} \end{cases}$	$H_0(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\log x_k + \log y_k)$

いま、(III) 定数境界条件を課した場合を考える。このとき、Volterra 格子 (2) は上記 Poisson 構造のいずれももたない。しかし、次の函数 H_{01} を導入すると、Volterra 格子 (2) は Poisson 括弧 $\{, \}_2$ のもとで H_{01} をハミルトニアンにもつ $V = \mathbb{R}^{2N}$ 上の Hamilton 系となる :

$$H_{01}(x, y) = \sum_{k=1}^N (x_k + y_k) - \alpha \sum_{k=1}^N \log x_k - \beta \sum_{k=1}^N \log y_k$$

さらに、 V はシンプレクティック形式 $\Omega = \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^k \frac{dx_k \wedge dy_\ell}{x_k y_\ell}$ に関するシンプレクティック多様体でもある。

一方、相空間が奇数次元、すなわち $V = \mathbb{R}^{2N-1}$ のときはその限りではない。しかし、 $\alpha = \beta$ というさらなる仮定のもとで、(2) は V 上の Poisson 構造 $(V = \mathbb{R}^{2N-1}, \{, \}_2, H_{01})$ をもつ。さらに、この場合、ハミルトニアン H_{01} は次の函数 G_1, G_2 ($H_{01} = G_1 - \alpha G_2$) と Poisson 可換である：

$$G_1(x, y) = \sum_{k=1}^N (x_k + y_k) - \alpha \sum_{k=1}^N \log x_k, \quad G_2(x, y) = \sum_{k=1}^N \log y_k.$$

したがって、(III) 定数境界条件かつその境界値が等しいとき、奇数次元の Volterra 格子 (2) は少なくとも二つの保存量をもつ Hamilton 系である。

3 完全可積分性と感染症数理モデル

Hamilton 系としての考察から、(III) 定数境界条件を課した Volterra 格子 (2) は次の場合に完全可積分であることが分かる：

	Boundaries	Poisson structures	Conserved quantities
1)	Any α, β	$(\mathbb{R}^2, \{, \}_2, H_{01})$	H_{01}
2)	$\alpha = \beta$	$(\mathbb{R}^3, \{, \}_2, H_{01})$	G_1, G_2

1) の場合、Volterra 格子 (2) は、感染症数理モデルのひとつである、SIR model with vaccination と等価である：

$$\dot{x}_1 = x_1(\beta - y_1), \quad \dot{y}_1 = y_1(x_1 - \alpha)$$

この系は適当な変数変換により第 1 種 Abel 方程式へと帰着し、さらに、正準方程式と等価な完全微分方程式となる。保存量の定める不変曲線は Lambert 曲線であるため、Lambert の W 函数を用いて、初期値問題の厳密解が与えられる [3, 4]。また、とくに、 $\beta = 0$ の場合、(2) は SIR モデルとなる。この系は適当な変数変換で 2 次の Bernoulli 方程式 (Riccati 方程式) となり、線形化できる [3]。

2) の場合、(2) は 3 次元完全可積分系であり、保存量 $G_2 = \log \ell$ を用いて 2 次元化できる：

$$\dot{y}_1 = y_1(x_1 - \alpha), \quad \dot{x}_1 = x_1 \left(\frac{\ell}{y_1} - y_1 \right)$$

この系は保存量 G_1 をもつ 2 次元完全可積分系であるが、感染症数理モデルとの関係はいまのところ明らかではない。

謝辞 本研究は科研費（課題番号：20K03692）の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] Bogoyavlenskii, O.I., Integrable Lotka-Volterra Systems, Regul. Chaotic Dyn., Vol. 13 (2008), 543–556.
- [2] Suris, Y.B., The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach, Progress in Mathematics Vol. 219, Basel: Birkhäuser, 2003.
- [3] Nobe, A., Exact solutions to SIR epidemic models via integrable discretization, J. Math. Phys., Vol. 65 (2024), 072702.
- [4] Nobe, A., The Volterra lattice, Abel’ s equation of the first kind, and the SIR epidemic models, arXiv:2402.11888 (2024).

スケールフリーネットワーク上の SIR モデルにおける感染率と感染者数の対数関係

大住 七重¹, 小池 正史², 矢嶋 徹²

¹ 宇都宮大学地域創生科学研究科, ² 宇都宮大学大学院

e-mail: mc246873@s.utsunomiya-u.ac.jp

1 はじめに

感染症の流行を予防・制御するためには、感染拡大のメカニズムの理解が必要である。感染拡大に関する基本的な指標は、感染症の流行における感染者数である。感染症の伝染力や感染経路などによる感染者数の変化を知ることが、感染拡大メカニズムの理解にとって重要である。

感染症の伝播過程を記述する代表的なモデルの 1 つが、SIR モデル [1] である。このモデルは感染者と未感染者の接触機会が均一なことを前提としており、伝播現象の基本的なふるまいを理解するのに適している。より現実的な伝播現象のふるまいを理解するためには、感染者と未感染者の接触機会の不均一性を SIR モデルに取り入れることが考えられる。接触機会の不均一性は、ノードを人、枝を接触としたネットワークを用いて表現できる。実世界における多くのネットワークは次数分布がべき則に従い、それらはスケールフリーネットワークと呼ばれる [2]。

本研究では、スケールフリーネットワーク上の伝播現象のシミュレーションによって、感染症の伝染力を表す感染率と感染者数の関係を解析する。

2 スケールフリーネットワークと SIR モデル

ネットワークは、相互に接続されたノードと、接続を表す枝から構成される。ネットワークを構成するノードの数をノード数 N で表す。ノード i から出る枝の数 k_i をノードの次数という。ノード数 N のネットワークにおいて、次数 k のノードが N_k 個あるとき、 $p(k) = N_k/N$ を次数分布という。スケールフリーネットワークは次数分布が $p(k) \propto k^{-\gamma}$ のようなネットワークである。 $p(k) \propto k^{-\gamma}$ は、大部分のノードが小さい次数をもち、一部のノードが大きい次数をもつことを表す。

ネットワーク上の SIR モデルを定義する。各ノードは感染症に感染しうる未感染状態 S 、他者を感染させる感染状態 I 、免疫をもち流行に寄与しない回復状態 R のいずれかをとる。状態 S のノードは、状態 I のノードと枝でつながっている場合に感染するとし、その感染率は枝でつながった状態 I のノード数に比例する。状態 I のノードは一定の確率で状態 R に遷移する。次数 k のノードのうち、状態 S , I , R のノードの割合をそれぞれ S_k, I_k, R_k とする。次数に対する平均場近似を用いると、これらの時間発展は

$$\frac{dS_k}{dt} = -\lambda S_k k \Theta, \quad \frac{dI_k}{dt} = \lambda S_k k \Theta - \beta I_k, \quad \frac{dR_k}{dt} = \beta I_k \quad (1)$$

に従う [3]。 λ は感染率、 β は回復率、 Θ は枝を辿った先のノードが状態 I である確率である。

3 シミュレーション方法

いくつかの小規模なスケールフリーネットワーク上で SIR モデルをシミュレーションし、感染率に対する感染者数の変化に注目する。スケールフリーネットワークの生成にはコンフィグモデル [4] を使用した。ノード数 N を 100, 200, 400 とし、次数分布の指数 γ を 2 とした。SIR シミュレーションでは、2 節で定義した状態遷移のルールに従ってノードの状態を更新した。初期感染者としてネッ

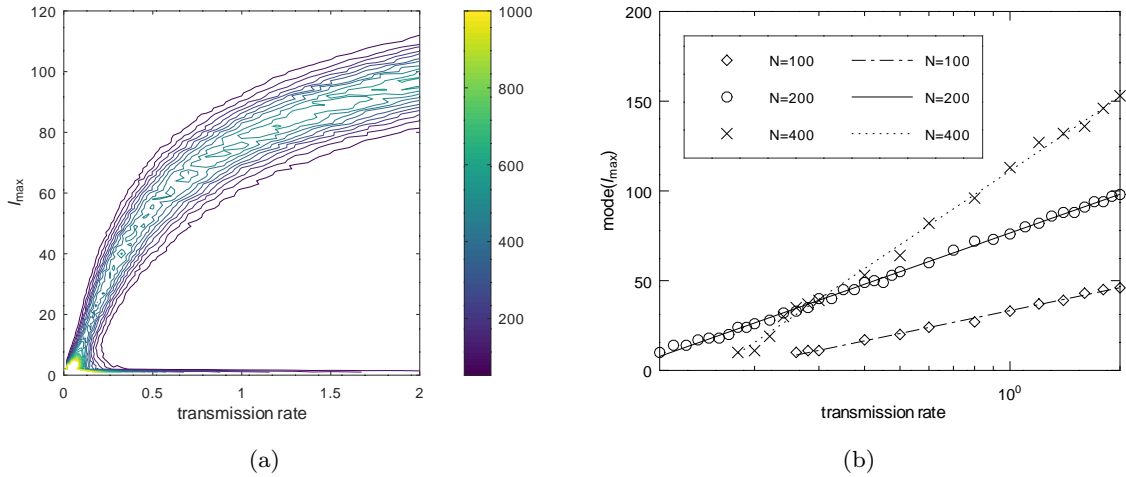


図 1. (a) $N = 200$ における λ , I_{\max} , シミュレーション回数の分布, (b) λ に対する $\text{mode}(I_{\max})$ の推移

トワークの中から最大次数をもつノードを 1 つ選択し、感染率 λ を複数与えた。ただし、 λ は回復率に対する比の値とする。初期状態と終了状態における感染者数をそれぞれ 1, 0 とし、初期状態から終了状態までを 1 回のシミュレーションとみなす。

4 結果

シミュレーションごとの感染者数の最大値を I_{\max} とする。 I_{\max} は流行の規模を表す。また、 $I_{\max} \geq 10$ において、感染率ごとの I_{\max} の最頻値を $\text{mode}(I_{\max})$ とする。 $\text{mode}(I_{\max})$ は、シミュレーションごとに値が異なる I_{\max} の傾向を表し、ネットワーク構造が流行に与える影響の評価に必要となる。図 1 (a) は、 λ , I_{\max} , シミュレーション回数の分布を表した等高線プロットである。 I_{\max} は感染率ごとに単峰性をもつ分布となった。図 1 (b) は λ に対する $\text{mode}(I_{\max})$ の推移を示し、実線および破線は対数近似である。 $\text{mode}(I_{\max})$ は感染率の対数に比例した。

5 まとめ

感染拡大の指標となる感染者数の感染率に対する推移を調べるために、スケールフリーネットワーク上の SIR シミュレーションをおこなった。その結果、流行過程における最大感染者数の最頻値が、感染率の対数に比例することが分かった。これは、スケールフリーネットワークの構造が伝播現象に及ぼす影響を反映していると考えられる。今後の課題として、スケールフリーネットワークの次数分布の指数 γ を変えた場合の解析や、感染者数に対する回復者数の推移の調査などが考えられる。

参考文献

- [1] W. O. Kermack and A. G. McKendrick, “A contribution to the mathematical theory of epidemics”, Proc. Roy. Soc. London A **115** (1927) 700.
- [2] A.-L. Barabási and R. Albert, “Emergence of Scaling in Random Networks”, Science **286** (1999) 509.
- [3] Y. Moreno, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani, “Epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks”, Euro. Phys. B **26** (2002) 521.
- [4] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, and D. J. Watts, “Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications”, Phys. Rev. E **64** (2001) 026118.

多成分短パルス型方程式の可積分性を保つ離散化と数値計算

堀綾子¹, 丸野健一², 太田泰広³, Bao-Feng Feng⁴

¹ 早稲田大学基幹理工学研究科, ² 早稲田大学理工学術院, ³ 神戸大学理学部, ⁴University of Texas Rio Grande Valley
e-mail : ayako0903@akane.waseda.jp

1 概要

自己適合移動格子スキームとは、急激に変位が変化する領域で格子間隔が自動的に調節される非線形波動方程式の差分スキームであるが、これは短パルス方程式などの特異性・多価性がある解を持つソリトン方程式の可積分性を保存する離散化によって得られた。自己適合移動格子スキームの数値計算への適用は、Feng-Maruno-Ohta によって短パルス方程式など様々な方程式に対して無限遠方で 0 となる境界条件下で行われてきた [1, 2]。しかしながら、これまで得られたスキームでは周期境界条件を含む一般的な境界条件下での数値計算は困難な状況であった。本講演では、多成分修正短パルス方程式 [3] の一般的な境界条件下における自己適合移動格子スキームの構築と厳密解、得られたスキームを用いた数値計算結果について報告する。

2 多成分修正短パルス方程式の可積分離散化

多成分修正短パルス方程式

$$u_{i,x}t = u_i + \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq j, k \leq n} c_{jk} u_j u_k u_{i,x} \right)_x - \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq j, k \leq n} c_{jk} u_{j,x} u_{k,x} \right) u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

の一般的な境界条件下での自己適合移動格子スキーム

$$\begin{cases} \frac{d}{dT}(u_{k+1}^{(i)} - u_k^{(i)}) = (\delta_k - a)(u_{k+1}^{(i)} + u_k^{(i)}), \\ \frac{dx_k}{dT} = -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{ij} u_k^{(i)} u_k^{(j)}, \end{cases} \quad (1)$$

は離散ホドグラフ変換 $x_k = 2ka - (\log f_k)_T$, $\delta_k = x_{k+1} - x_k$, $t = T$ と従属変数変換 $u_k^{(i)} = \frac{g_k^{(i)}}{f_k}$ によって次の双線形形式から得られる。

$$\begin{cases} \frac{1}{a} D_T(g_{k+1}^{(i)} \cdot f_k - g_k^{(i)} \cdot f_{k+1}) = g_{k+1}^{(i)} f_k + g_k^{(i)} f_{k+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ D_T^2 f_k \cdot f_k = \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{ij} g_k^{(i)} g_k^{(j)}. \end{cases}$$

また、この双線形形式はパフィアン解

$$f_k = \text{Pf}(a_1, \dots, a_{2N}, b_1, \dots, b_{2N})_k, \quad g_k^{(i)} = \text{Pf}(d_0, B_i, a_1, \dots, a_{2N}, b_1, \dots, b_{2N})_k, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

をもち、パフィアンの要素は以下で与えられる。

$$\text{Pf}(a_i, a_j)_k = \frac{p_i - p_j}{p_i + p_j} \phi_i^{(0)}(k) \phi_j^{(0)}(k), \quad \text{Pf}(a_i, b_j)_k = \delta_{i,j}, \quad \text{Pf}(b_i, b_j)_k = \frac{c_{\mu\nu}}{p_i^{-2} - p_j^{-2}} (b_i \in B_\mu, b_j \in B_\nu),$$

$$\text{Pf}(d_l, a_i)_k = \phi_i^{(l)}(k), \quad \text{Pf}(d^k, a_i)_k = \phi_i^{(0)}(k+1), \quad \text{Pf}(b_j, B_\mu)_k = \begin{cases} 1 & b_j \in B_\mu, \\ 0 & b_j \notin B_\mu, \end{cases}$$

$$\text{Pf}(d_0, d^k) = 1, \quad \text{Pf}(d_{-1}, d^k)_k = -a, \quad \phi_i^{(n)}(k) = p_i^n \left(\frac{1+ap_i}{1-ap_i} \right)^k e^{p_i^{-1}T + \xi_{i0}}.$$

3 自己適合移動格子スキームの数値計算への適用

一般的な境界条件下での自己適合移動格子スキーム (1) を用いた多成分修正短パルス方程式の数値計算の例を示す. 初期条件は 2 成分修正短パルス方程式の 2 カस्प・ソリトン解

$$u = \frac{g_1}{f}, \quad v = \frac{g_2}{f}, \quad \eta_i = p_i X + \frac{1}{p_i} T, \quad b_{ij} = \left(\frac{p_i p_j}{p_i + p_j} \right)^2, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

$$f = 1 + a_1 a_3 b_{13} e^{\eta_1 + \eta_3} + a_2 a_3 b_{23} e^{\eta_2 + \eta_3} + a_1 a_4 b_{14} e^{\eta_1 + \eta_4} + a_2 a_4 b_{24} e^{\eta_2 + \eta_4} \\ + a_1 a_2 a_3 a_4 (p_1 - p_2)^2 (p_3 - p_4)^2 \frac{b_{13} b_{23} b_{14} b_{24}}{p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2} e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4},$$

$$g_1 = a_1 e^{\eta_1} + a_2 e^{\eta_2} + \frac{a_1 a_2 a_3 (p_1 - p_2)^2 p_3^4}{(p_1 + p_3)^2 (p_2 + p_3)^2} e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3} + \frac{a_1 a_2 a_4 (p_1 - p_2)^2 p_4^4}{(p_1 + p_4)^2 (p_2 + p_4)^2} e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_4},$$

$$g_2 = a_3 e^{\eta_3} + a_4 e^{\eta_4} + \frac{a_2 a_3 a_4 (p_3 - p_4)^2 p_4^4}{(p_2 + p_3)^2 (p_2 + p_4)^2} e^{\eta_2 + \eta_3 + \eta_4} + \frac{a_1 a_3 a_4 (p_3 - p_4)^2 p_4^4}{(p_1 + p_3)^2 (p_1 + p_4)^2} e^{\eta_1 + \eta_3 + \eta_4},$$

を与えた. 点線は数値解を, グラフの下の子は格子点の分布を示す. 図 1,2 は周期境界条件下での 2 成分修正短パルス方程式の 2 カस्प・ソリトンの相互作用の数値計算結果を示す. ソリトンは x 軸に対して負の方向に進む. パラメータは $p_1 = 0.95, p_2 = 1.0, p_3 = 1.1, p_4 = 1.2, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 10, a_4 = 20$ とした. ソリトンが境界に達しても問題なく計算でき, ソリトンが反対側から出てくることからわかる.

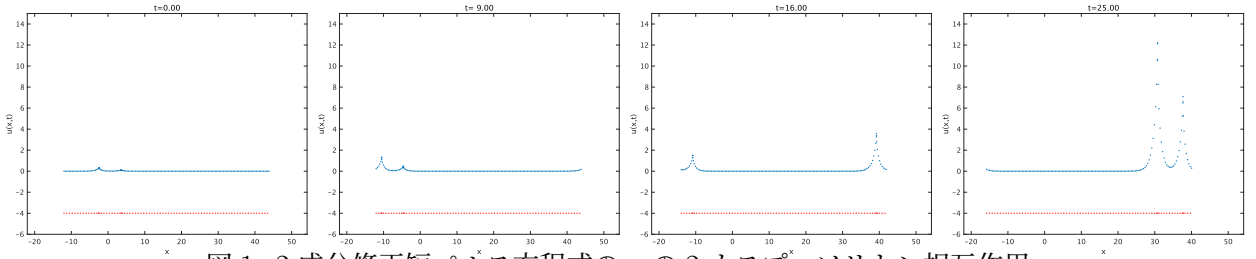


図 1: 2 成分修正短パルス方程式の u の 2 カस्प・ソリトン相互作用

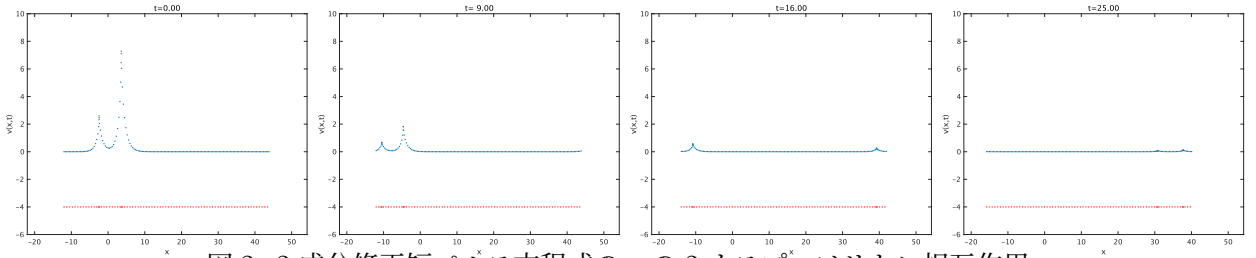


図 2: 2 成分修正短パルス方程式の v の 2 カस्प・ソリトン相互作用

参考文献

- [1] Feng B F, Maruno K and Ohta Y, *Pacific J. Math. for Industry* **6**, 8. (2014), 1–14.
- [2] Feng B F, Maruno K and Ohta Y, *J. Math. Phys.* **56**. (2015), 043502.
- [3] Matsuno Y, *J. Math. Phys.* **57**. (2016), 111507.

遅延ソリトン方程式と遅延パンルヴェ方程式：双線形方程式，Lax pair，保存量

松岡 宏¹，中田 健太¹，丸野 健一²

¹ 早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻，² 早稲田大学 理工学術院
e-mail : matsuoka8@akane.waseda.jp

1 概要

近年，一つの独立変数に並進と微分を同時に含む遅延微分方程式の研究が様々な観点から盛んに行われている．応用上の観点では，交通渋滞をはじめとする様々な現象のモデル方程式として用いられている [1]．一方で，数学的な観点では，Grammaticos らや Quispel らが提案した遅延パンルヴェ方程式を発端に可積分な遅延微分方程式の研究が活発に行われている [2, 3]．直近では，モジュライ空間の Masur-Veech volumes の計算において遅延パンルヴェ I 方程式が応用できることが示された [4]．

最近，ソリトン方程式の可積分な遅延化である遅延ソリトン方程式とそれらの N ソリトン解が導出された [5]．これらの遅延ソリトン方程式は遅延パラメータを 0 にすることで，既存のソリトン方程式に帰着される．本講演では，遅延ソリトン方程式の Lax pair や十分な量の保存量の存在，そして遅延パンルヴェ方程式との関係を明らかにし，遅延ソリトン方程式の可積分性について示す．

2 遅延ソリトン方程式の Lax pair の構成

遅延ソリトン方程式の双線形方程式のベックルンド変換を通じて Lax pair を構成する．ここでは，遅延ロトカ・ヴォルテラ方程式 [5]

$$D_t f_{n+\beta}(t+\tau) \cdot f_{n-1}(t-\tau) + f_{n+\beta}(t+\tau)f_{n-1}(t-\tau) - f_{n+1+\beta}(t+\tau)f_{n-2}(t-\tau) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \log \frac{u_{n+\beta}(t+\tau)}{u_{n-1}(t-\tau)} = u_{n+1+\beta}(t+\tau) - u_{n+\beta}(t+\tau) - u_{n-1}(t-\tau) + u_{n-2}(t-\tau) \quad (2)$$

を例に説明する．式 (1)，(2) はそれぞれ，遅延ロトカ・ヴォルテラ方程式の双線形方程式と非線形方程式である．式 (1) のベックルンド変換は次の式である．ただし， λ_1, λ_2 は任意定数， $g_n(t)$ は式 (1) の新たな解である．

$$\lambda_1 f_n(t)g_{n+1}(t) + D_t f_n(t) \cdot g_{n+1}(t) - f_{n+1}(t)g_n(t) = 0, \quad (3)$$

$$\lambda_2 f_{n+1+\beta}(t+\tau)g_n(t-\tau) + f_n(t-\tau)g_{n+1+\beta}(t+\tau) - f_{n-1}(t-\tau)g_{n+2+\beta}(t+\tau) = 0. \quad (4)$$

式 (3)，(4) において， $\beta, \tau = 0$ でロトカ・ヴォルテラ方程式のベックルンド変換に一致する．ここで， $g_n(t) = f_n(t)\psi_n(t)$ とおき， $u_n(t)$ ， $T_n(t)$ を次のように定義する：

$$u_n(t) = \frac{f_{n+1+\beta}(t+2\tau)f_{n-2}(t)}{f_{n+\beta}(t+2\tau)f_{n-1}(t)}, \quad T_n(t) = \frac{d}{dt} \log \frac{f_n(t)}{f_{n-1}(t)}.$$

この時，式 (3)，(4) より遅延ロトカ・ヴォルテラ方程式の Lax pair

$$T_n(t)\psi_n(t) + \frac{d}{dt}\psi_n(t) + \psi_{n-1}(t) - \lambda_1\psi_n(t) = 0, \quad (5)$$

$$\lambda_2\psi_n(t-\tau) + \psi_{n+1+\beta}(t+\tau) - u_{n+1}(t-\tau)\psi_{n+2+\beta}(t+\tau) = 0 \quad (6)$$

を得る．式 (5)，(6) は $\beta, \tau = 0$ でロトカ・ヴォルテラ方程式の Lax pair に一致する．

3 遅延ソリトン方程式の保存量

遅延ロトカ・ヴォルテラ方程式を例に、遅延ソリトン方程式の保存量を構成する。空間変数 n に対して、 N 周期境界条件を課すと、式 (5), (6) は、 $\hat{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_{N-1}(t))^T$, 行列 $\mathcal{M}(t)$, $\mathcal{L}(t)$ を用いて次のように書ける:

$$\frac{d}{dt} \hat{\psi}(t) + \mathcal{M}(t) \hat{\psi}(t) = \lambda_1 \hat{\psi}(t), \quad \mathcal{L}(t) \hat{\psi}(t + 2\tau) = \lambda_2 \hat{\psi}(t). \quad (7)$$

ここで、 $E(t)$, $\mathcal{N}^*(t)$ を

$$E(t) = I + \int_0^{2\tau} dx \mathcal{M}(t+x) + \int_0^{2\tau} dy \int_0^y dx \mathcal{M}(t+x) \mathcal{M}(t+y) + \dots, \quad (8)$$

$$\mathcal{N}^*(t) = E(t) \mathcal{L}_2(t)^{-1} \quad (9)$$

と定義すると、式 (7) の両立条件は、

$$\frac{d}{dt} \mathcal{N}^*(t) = \mathcal{N}^*(t) \mathcal{M}(t) - \mathcal{M}(t) \mathcal{N}^*(t) \quad (10)$$

となり、 $H_k(t) = \text{Tr}(\mathcal{N}^*(t)^k)$, $k = 1, 2, \dots$ が遅延ロトカ・ヴォルテラ方程式の保存量となる。

4 遅延パンルヴェ方程式との関係

式 (1) に対して $\beta = 0$ とし、2 周期リダクションを課すと遅延パンルヴェ II 方程式の双線型方程式

$$D_t F(t+\tau) \cdot G(t-\tau) - \gamma_0 e^{\omega t} F(t-\tau) G(t+\tau) + A(t) F(t+\tau) G(t-\tau) = 0, \quad (11)$$

$$D_t F(t-\tau) \cdot G(t+\tau) + \gamma_1 e^{\omega t} F(t+\tau) G(t-\tau) - A(t) F(t-\tau) G(t+\tau) = 0 \quad (12)$$

を得る。ここで、 $v(t) = G(t)/F(t)$ とすると、式 (11), (12) より遅延パンルヴェ II 方程式

$$\frac{d}{dt} \underline{v}(t) \bar{v}(t) = e^{\omega t} (\gamma_1 \underline{v}(t)^2 - \gamma_0 \bar{v}(t)^2), \quad \bar{v}(t) = v(t+\tau), \quad \underline{v}(t) = v(t-\tau) \quad (13)$$

を得る。一方で、式 (13) は、遅延ロトカ・ヴォルテラ方程式 (2) を非自励化した式

$$\frac{d}{dt} \log \frac{\nu_n(t+\tau)}{\nu_{n-1}(t-\tau)} = \gamma_{n+1} e^{\omega t} \frac{\nu_{n+1}(t+\tau)}{\nu_{n-1}(t-\tau)} - \gamma_n e^{\omega t} \frac{\nu_n(t+\tau)}{\nu_{n-2}(t-\tau)} \quad (14)$$

に 2 周期リダクションを課することによって、双線形方程式を経由せずに得ることができる。

5 まとめ

本講演では、遅延ロトカ・ヴォルテラ方程式を例に、遅延ソリトン方程式の Lax pair と保存量を構成した。さらに、遅延ロトカ・ヴォルテラ方程式に 2 周期リダクションを課することで、遅延パンルヴェ II 方程式が導出し、遅延ソリトン方程式と遅延パンルヴェ方程式の関係について明らかにした。

参考文献

- [1] Erneux T 2009 *Applied Delay differential equations* (New York: Springer)
- [2] Grammaticos B, Ramani A and Moreira I C 1993 *Physica A* **196** 574–90
- [3] Quispel G R W, Capel H W and Sahadevan R 1992 *Phys. Lett. A* **170** 379–83
- [4] Gibbons J, Stokes A and Veselov A P 2024 *J. Geom. Phys.* **202** 105225.
- [5] Nakata K and Maruno K 2022 *J. Phys. A: Math. Theor.* **55** 335201.