

# グラフの平面性と odd chromatic number について

北野 草太<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 名古屋大学大学院多元数理科学研究科

e-mail : kitano.sota.a1@s.mail.nagoya-u.ac.jp

## 1 イントロダクション

本発表ではグラフの odd coloring を紹介する. グラフ彩色は地図の塗分けに端を発するグラフ理論の分野で, 代表的な応用としてスケジューリング問題などがある. 本発表の目的は, odd coloring の定義と主要な研究について紹介すること, そして発表者の研究内容である odd coloring とグラフの平面性の関係について論じることである. 初めに odd coloring の歴史を簡単に説明する. 周波数割り当て問題の定式化として, ハイパーグラフの CF-coloring (Conflict-Free Coloring) が Even らによって提案された. CF-coloring は, 各頂点に割り当てられた色が特定の条件を満たすように彩色されている. ここから幾何的な制約を取り除き, 彩色の条件を緩和することで, ハイパーグラフの odd coloring が定義された. その後, odd coloring は通常のグラフ理論へと拡張され, 平面的グラフや疎なグラフを中心に活発に研究されている.

## 2 Odd coloring の定義

まずは odd coloring を定義し, 例を確認する.

**定義 1** グラフ  $G$  の彩色  $\varphi: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  で, 以下の条件を満たすものを  $G$  の odd coloring と呼ぶ.

・任意の非孤立頂点  $v \in V(G)$  に対して, ある色  $c \in \{1, \dots, k\}$  が存在して,  $|\varphi^{-1}(c) \cap N(v)| \equiv 1 \pmod{2}$ .

この条件を parity condition と呼ぶ.

つまり, odd coloring とは, 任意の非孤立頂点の近傍に, 奇数回現れる色が存在するような彩色である. 写像  $\varphi: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  が  $G$  の彩色のとき,  $v \in V(G)$  に対して, 集合  $L_\varphi^*(v)$  を以下で定義する.

$$L_\varphi^*(v) = \{c \in \{1, \dots, k\} : |\varphi^{-1}(c) \cap N(v)| \equiv 1 \pmod{2}\}$$

この集合を用いることで parity condition は任意の非孤立頂点に対して  $L_\varphi^*(v) \neq \emptyset$  と言い換えられる. また, グラフ  $G$  に対して, odd coloring  $\varphi: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  が存在する最小の  $k$  を odd chromatic number と呼び,  $\chi_o(G)$  と書く.

**例 2** (Odd coloring の例) 図 1 のグラフ  $G$  は,  $\chi_o(G) = 4$  であり,  $\varphi_1$  は odd coloring だが,  $\varphi_2$  は  $v_3$  が parity condition を満たさないので odd coloring ではない.

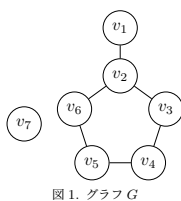


図 1. グラフ  $G$

$v$	$\varphi_1(v)$	$L_{\varphi_1}^*(v)$	$\varphi_2(v)$	$L_{\varphi_2}^*(v)$
$v_1$	1	$\{2\}$	1	$\{2\}$
$v_2$	2	$\{1\}$	2	$\{1\}$
$v_3$	1	$\{2, 3\}$	1	$\emptyset$
$v_4$	3	$\{1, 4\}$	2	$\{1, 3\}$
$v_5$	4	$\{1, 3\}$	3	$\{1, 2\}$
$v_6$	1	$\{2, 4\}$	1	$\{2, 3\}$
$v_7$	1	$\emptyset$	1	$\emptyset$

図 2. グラフ  $G$  の彩色  $\varphi_1, \varphi_2$

Odd coloring の研究における 1 つの大きな目標として以下の予想の証明がある.

**予想 3** [1] 任意の平面的グラフ  $G$  に対して,  $\chi_o(G) \leq 5$ .

$\chi_o(C_5) = 5$  なのでこの予想は正しいならば strict な上限である. 現在この予想は  $\chi_o(G) \leq 8$  までは正しいことが証明されている. ([2])

### 3 グラフの平面性と odd chromatic number

この章では発表者の研究であるグラフの平面性と odd chromatic number の関係について述べる. グラフ彩色の分野において, あるグラフの集合に対してその集合に含まれるグラフの彩色数の上限を求める問題は基本的である. 発表者は双平面的グラフの odd coloring について彩色数の上限を考察し, 平面的グラフの場合と比較した. 双平面的グラフとは, グラフ  $G = (V, E)$  で, ある辺の分割  $E_1, E_2$  が存在して  $(V, E_1), (V, E_2)$  がともに平面的グラフとなるグラフである. 平面的グラフと双平面的グラフに関する既存の研究結果を以下にまとめる.

	平面的グラフ	双平面的グラフ
$\chi(G)$	$\chi(G) \leq 4$	$\chi(G) \leq 12$
$\chi_o(G)$	$\chi_o(G) \leq 8$	

表 1. 既存の研究結果 [2, 3]

発表者は, ある整数  $k$  が存在して任意の双平面的グラフの odd chromatic number を  $k$  で抑えることができないことを証明した. 完全グラフ  $K_n$  の任意の辺を 1 回細分したグラフ  $K_n^*$  を考えると, 任意の  $n$  に対して  $K_n^*$  は双平面的グラフとなるが,  $\chi_o(K_n^*) = n$  となる. これは平面的グラフの odd coloring や双平面的グラフの通常の彩色では見られない現象であり, 興味深い. また, 発表者は双平面的グラフの部分集合についても考察を行い, 以下の定理を得た.

**定理 4** [4] 双平面的グラフ  $G$  が  $\text{gir}(G) \geq 6, \delta(G) \geq 3$  を満たすならば  $\chi_o(G) \leq 12$ .

**定理 5** [4] 任意の双平面的グラフ  $G$  に対して,  $G$  の任意のマイナーが双平面的グラフとなるならば,  $\chi_o(G) \leq 23$ .

### 参考文献

- [1] Mirko Petruševski and Riste Škrekovski, "Colorings with neighborhood parity condition," Discrete Applied Mathematics, Vol. 321 (2022), 385–391.
- [2] Jan Petr, Julien Portier, "The Odd Chromatic Number of a Planar Graph is at Most 8," Graphs and Combinatorics, Vol. 39 (2023), 28.
- [3] Kainen, P. C., "Some recent results in topological graph theory", Graphs and Combinatorics, (1974) 76–108.
- [4] S. Kitano, "Upper Bounds of the Odd Chromatic Number of a Graph in terms of its Thickness," arXiv:2403.11555 [math.CO], (2024).

# Terminal planar network の禁止部分グラフによる特徴付け

宮地 晴希<sup>1</sup>, 野口 友暉<sup>2</sup>, 渡邊 慶大<sup>1</sup>, 鈴木 堯虎<sup>1</sup>, Liu Hexuan<sup>1</sup>, Wu Taoyang<sup>4</sup>, 早水 桃子<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 早稲田大学 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻, <sup>2</sup> 早稲田大学 基幹理工学部 応用数理学科,

<sup>3</sup> 早稲田大学 理工学術院, <sup>4</sup> University of East Anglia

e-mail : h.miyaji@ruri.waseda.jp

## 1 概要

Planar graph や outerplanar graph の禁止構造はよく知られているが, 有向グラフの平面性にはより多くの種類がある (図 1). 最近, Wu–Moulton [1] は進化の系統ネットワークの平面描画に動機づけられて terminal planar network という概念を導入し, ネットワークの completion という操作に基づく特徴付けを与えた. 本講演では, 禁止部分グラフによる terminal planar network の特徴付けを与える.

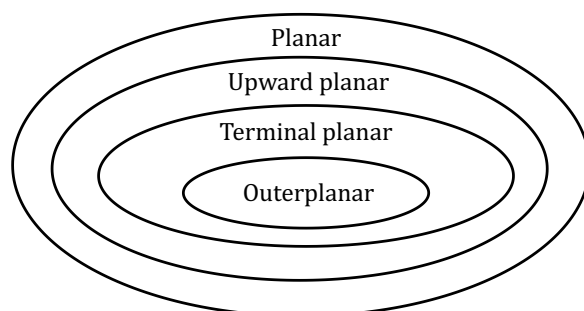


図 1. 有向グラフの平面性同士の関係

## 2 Terminal planar network と既知の結果

本稿を通じて,  $X = \{1, \dots, n\}$  は空でない有限集合とし, 考察するネットワークはすべて, 有限かつ単純な有向非巡回グラフとする. ここで, ネットワーク  $N$  に対し  $(\text{indeg}_N(v), \text{outdeg}_N(v)) = (1, 0)$  を満たす頂点  $v \in V(N)$  を  $N$  の葉と呼び,  $N$  の葉全体からなる集合を  $N$  の葉集合という. このとき, 次の条件を満たす有向非巡回グラフ  $N$  を  $X$  上の根付き系統ネットワークという:

- 1)  $N$  の葉集合と  $X$  に一対一の対応関係がある.
- 2)  $N$  は  $\text{indeg}_N(\rho) = 0$  を満たす頂点  $\rho$  ( $N$  の根) を唯一持つ.

**定義 1**  $N$  を  $X$  上の根付き系統ネットワークとする.  $N$  の根と任意の葉が外面に接するように平面上に描画できるとき,  $N$  を *terminal planar network* という.

Wu–Moulton [1] は, 系統ネットワーク  $N$  の completion  $N^+$  (図 2 (b) 参照) という概念を用いた次の特徴付けを与えた.

**定理 1**  $N$  が terminal planar であることと,  $N$  の completion  $N^+$  が upward planar であることは同値である.

## 3 Terminal planar network の禁止部分グラフによる特徴付け

まずは, 定理 1 のアナロジーといえる terminal planar network の特徴付けを与える (補助定理 2).

**補助定理 2**  $N$  の completion  $N^+$  に対し, さらにアーチ  $(\rho, t)$  を加えた有向グラフ  $N^*$  (図 2 (c) 参照) を  $N$  の *total completion* と呼ぶ.  $N$  が terminal planar であることと,  $N$  の total completion  $N^*$  が平面的かつ  $\text{indeg}_{N^*}(s) = 0, \text{outdeg}_{N^*}(t) = 0$  を満たす頂点  $s, t$  をそれぞれ丁度一つずつ含む有向グラフであることは同値である.

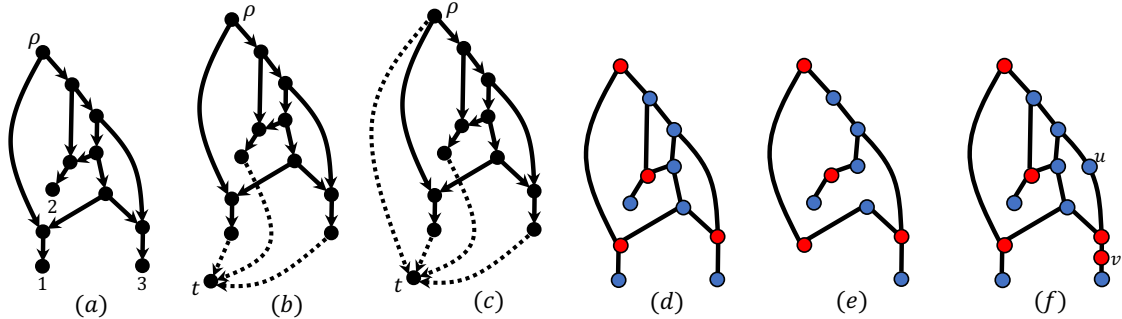


図 2. (a) : Terminal planar でない系統ネットワーク. (b) :  $N$  の completion. (c) :  $N$  の total completion, (d) :  $N$  の 2-ラベル付きグラフ. (e) : (c) の部分グラフ. (f) : 頂点  $u, v$  によって細分した (c) の 2-ラベル付き細分.

グラフのカット点に着目して「2-ラベル付きグラフ」という概念を導入すると, 補助定理 2 から, terminal planar network の禁止部分グラフによる特徴付けが導かれる (定理 3). これは Kuratowski の定理 [2] のアナロジーである.

**定理 3**  $N$  を  $X$  上の根付き系統ネットワークとする. このとき,  $N$  が terminal planar であることと,  $N$  の「2-ラベル付きグラフ」が図 3 に示す  $H_1$  から  $H_6$  のいずれの細分も部分グラフとして含まないことは同値である.

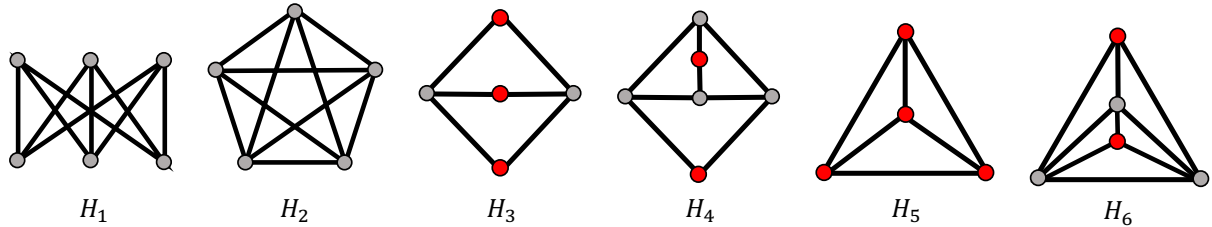


図 3. Terminal planar ネットワークの禁止構造. 赤頂点は  $N$  の根またはカット点であり, 灰色の頂点はラベル付けされた任意の 1 頂点とする.

## 参考文献

- [1] Vincent Moulton, and Taoyang Wu. Planar rooted phylogenetic networks. IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics 20.2 (2023): 1289-1297.
- [2] Casimir Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en Topologie. Fundamenta Mathematicae 15.1 (1930): 271-283

# Paley RIP と Paley graph extractor

佐竹 翔平<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 熊本大学 半導体・デジタル研究教育機構

e-mail : shohei-satake@kumamoto-u.ac.jp

## 1 概要

平方剰余から定義される Paley ETF はほぼ最適な制限等長性 (RIP) をもつと予想され、圧縮センシングなどで重要視されている。一方で理論計算機科学では平方剰余記号ベースの乱数抽出器である Paley graph extractor もまた (指数的に) 小さなエラーと小さな min-entropy rate を両立すると予想されている。本講演では、2021 年度年会での発表内容を発展させ、Paley ETF の RIP から得られる Paley graph extractor の性質を紹介する。

## 2 Paley ETF の RIP

**定義 1** (RIP).  $\Phi$  を  $M \times N$  行列とし、自然数  $K, M, N$  は  $K \leq M \leq N$  を、実数  $\delta$  は  $0 \leq \delta < 1$  を満たすとする。このとき、サポートのサイズが高々  $K$  の任意のベクトル  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  に対し、

$$(1 - \delta)\|\mathbf{x}\|^2 \leq \|\Phi\mathbf{x}\|^2 \leq (1 + \delta)\|\mathbf{x}\|^2$$

が成り立つならば、 $\Phi$  は  $(K, \delta)$ -restricted isometry property (RIP) をもつという。ここで、 $\|\cdot\|$  はベクトルの  $\ell_2$ -ノルムを表す。

大きな sparsity level  $K$  に対する  $(K, \delta)$ -RIP をもつ行列の構成は、圧縮センシングなどへの応用上重要であるのみならず、数学的にも興味深い。中でも、ほぼ最適な sparsity level に対する RIP をもつと予想されている行列が以下の Paley ETF である ([1, 2])。以下  $p \equiv 1 \pmod{4}$  は素数とする。

**定義 2** (Paley ETF). 位数  $p$  の有限体  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  の元を  $0 = a_1, a_2, \dots, a_p$ ,  $\mathbb{F}_p$  の平方剰余を  $b_1, b_2, \dots, b_{\frac{p-1}{2}}$  とラベル付けする。このとき、以下の  $(p+1)/2 \times (p+1)$  行列  $\Phi_p = (\phi_{j,k})_{j,k}$  を **Paley ETF** とよぶ。ただし、 $\zeta_p := \exp(\frac{2\pi i}{p})$  とする。

$$\phi_{j,k} := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p}} & j = 1, 1 \leq k \leq p; \\ \sqrt{\frac{2}{p}} \zeta_p^{b_{j-1} a_k} & 2 \leq j \leq \frac{p+1}{2}, 1 \leq k \leq p; \\ 1 & j = 1, k = p+1; \\ 0 & 2 \leq j \leq \frac{p+1}{2}, k = p+1. \end{cases}$$

## 3 Paley graph extractor

**乱数抽出器** (randomness extractor) は、理論計算機科学における基礎概念であり、Ramsey グラフの構成とも深く関係する ([5] などを参照)。まずその定義に必要な用語を紹介する。有限集合  $\Omega$  上の確率変数  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{F}_p$  および実数  $\rho > 0$  に対して、 $\max_{r \in \mathbb{F}_p} \Pr[X = r] \leq 2^{-\rho}$  が成り立つとき、確率変数  $X$  は *mini-entropy*  $\rho$  をもつという。また  $\Omega$  上の 2 つの確率変数  $X, Y$  に対し、**統計的距離**  $\Delta(X, Y)$  を以下で定義する。

$$\Delta(X, Y) := \frac{1}{2} \sum_{r \in \Omega} |\Pr[X = r] - \Pr[Y = r]|.$$

**定義 3** (乱数抽出器). 関数  $f : \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \rightarrow \{0, 1\}$  が, 任意の独立かつ *mini-entropy*  $\rho$  をもつ  $\Omega$  上の確率変数  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{F}_p$  に対して,  $\Delta(f(X, Y), U) \leq \varepsilon$  を満たすとき,  $f$  を  $(\rho, \varepsilon)$ -(2-情報源) 乱数抽出器 (*(2-source) randomness extractor*) とよぶ. ただし,  $U$  は  $\{0, 1\}$  上の一様分布を表す.

乱数抽出器の明示的構成は, 理論計算機科学や暗号理論における重要な問題の 1 つであり, 整数論や組合せ論の文脈でも盛んに研究がなされてきた ([3] などを参照). しかし, RIP 行列に対する square-root bottleneck と同様に, 既存のほとんどの構成には, min-entropy が  $\log_2 p/2$  を上回るという, *min-entropy rate 1/2 barrier* が課せられている.

その中でも, *Paley graph extractor*  $P : \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $P(x, y) := (1 + \chi(x - y))/2$  は任意の実数  $\rho > 0$  およびある実数  $\nu > 0$  に対し,  $(\rho \log_2 p, p^{-\nu})$ -乱数抽出器であることが予想されている.

**予想 4** ([4]). 任意の実数  $\alpha > 0$  に対し, ある定数  $\beta > 0$  が存在し *Paley graph extractor*  $P$  は  $(\alpha \log_2 p, p^{-\beta})$ -乱数抽出器である.

## 4 主結果

本講演では, 2021 年度年会で発表の成果を発展させ, Paley ETF の RIP から予想 4 が導かれることを示す. 特に下記の定理の仮定は広く成立が予想されている ([1] など).

**定理 5** ([5]). 十分大きな素数  $p \equiv 1 \pmod{4}$  とある定数  $0 < \delta < 1$  に対して, *Paley ETF*  $\Phi_p$  が  $\left(\frac{p}{\text{polylog}(p)}, \delta\right)$ -RIP を持つなら予想 4 が成り立つ.

**謝辞** 本研究に関してコメントを頂いた Ayush Basu 氏 (Emory University), Yujie Gu 助教 (九州大学), Vojtěch Rödl 教授 (Emory University), 高木 剛 教授 (東京大学), 安永 憲司 准教授 (東京工業大学) に感謝いたします. 本研究は, JST, ACT-X, JPMJAX2109 の支援を受けております.

## 参考文献

- [1] A. S. Bandeira, M. Fickus, D. G. Mixon, P. Wong, The road to deterministic matrices with the restricted isometry property, *J. Fourier Anal. Appl.* **19** (2013), 1123–1149.
- [2] A. S. Bandeira, D. G. Mixon, J. Moreira, A conditional construction of restricted isometries, *Int. Math. Res. Not.* **2017** (2017), 372–381.
- [3] E. Chattopadhyay, Guest Column: A recipe for constructing two-source extractors, *ACM SIGACT News* **51** (2020), 38–57.
- [4] B. Chor, O. Goldreich, Unbiased bits from sources of weak randomness and probabilistic communication complexity, *SIAM J. Comput.* **17** (1988), 230–261.
- [5] S. Satake, On the Paley RIP and Paley graph extractor, To appear in 2024 IEEE Information Theory Workshop (ITW), arXiv:2405.08608.

## 一般化したトランプにおけるペア数の期待値について

山本 健<sup>1</sup>, 梅木 智士<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 琉球大学理学部, <sup>2</sup> 琉球大学大学院理工学研究科

e-mail : yamamot@sci.u-ryukyu.ac.jp

### 1 問題設定

トランプは身近なゲームであり, 組合せや確率に関する初等的な問題にも登場する。標準的なトランプは 4 種類の記号 (スート) と 13 種類の数字 (ランク) による 52 枚のセットである (ジョーカーは考えない)。ランクが等しい 2 枚のカードの組は “ペア” とよばれることが多い。ババ抜き, ポーカー, 神経衰弱などのゲームでは, ペアに特別な役割が与えられている。

本研究では, スートを  $S$  種類, ランクを  $R$  種類に一般化したトランプを考える。全枚数は  $SR$  である。この一般化したトランプからランダムに引いた  $n$  枚に含まれるペア数を確率変数  $X_n$  で表す。特に, 確率変数の最も基本的な特性値である期待値  $E[X_n]$  を求め, その性質を調べる。

### 2 結果

定理 1 (ペア数  $X_n$  の期待値)

$$E[X_n] = \begin{cases} \frac{n}{2} - \frac{R}{4} + \frac{R}{4} \frac{\binom{SR-S}{n}}{\binom{SR}{n}} {}_2F_1(-n, -S; SR-S-n+1; -1) & \left(0 \leq n \leq \left\lfloor \frac{SR}{2} \right\rfloor\right), \\ \frac{n}{2} - \frac{R}{4} + (-1)^S \frac{R}{4} \frac{\binom{SR-S}{SR-n}}{\binom{SR}{SR-n}} {}_2F_1(n-SR, -S; n-S+1; -1) & \left(\left\lfloor \frac{SR}{2} \right\rfloor < n \leq SR\right). \end{cases}$$

ただし,  $\binom{N}{k}$  は二項係数であり,

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \cdots (a+k-1) b(b+1) \cdots (b+k-1)}{c(c+1) \cdots (c+k-1)} \frac{z^k}{k!}$$

は Gauss の超幾何関数である。

証明 (方針) ランダムに引いた  $n$  枚に含まれる各ランクのカードの枚数を表す確率変数を  $Y_{n,1}, \dots, Y_{n,R}$  とすると, 結合分布は

$$P(Y_{n,1} = k_1, \dots, Y_{n,R} = k_R) = \frac{\binom{S}{k_1} \cdots \binom{S}{k_R}}{\binom{SR}{n}}$$

となり, 多変量超幾何分布とよばれる [1]。ペア数  $X_n$  は

$$X_n = \sum_{i=1}^R \left\lfloor \frac{Y_{n,i}}{2} \right\rfloor$$

と表せることから, 多変量超幾何分布の性質を利用してペア数  $X_n$  の諸性質を求めることができると期待できる。ただし, 床関数  $\lfloor \cdot \rfloor$  の処理がやや煩雑であり,  $E[X_n]$  は (他の関数に簡約できない) 超幾何関数を含むことになる。

選ぶ枚数  $n$  の関数として描いた期待値  $E[X_n]$  のグラフを図 1 に示す。図 1(a) はスート数  $S = 4$  の場合であり ( $R = 13$  が通常の 52 枚のトランプ), (b) はスート数  $S = 5$  の場合である。いずれ



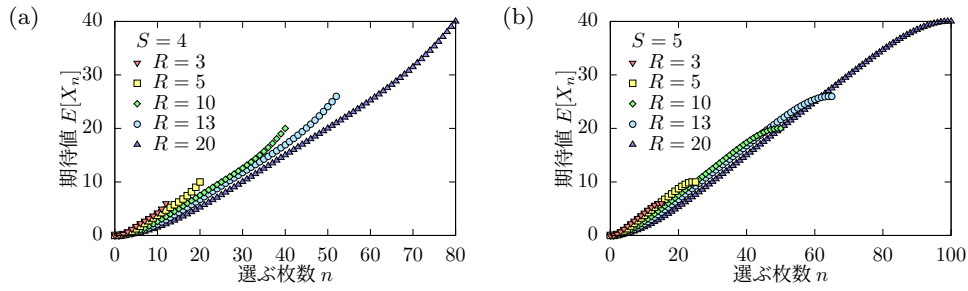


図 1.  $n$  の関数として表した期待値  $E[X_n]$  のグラフ。(a)  $S = 4$ , (b)  $S = 5$ .

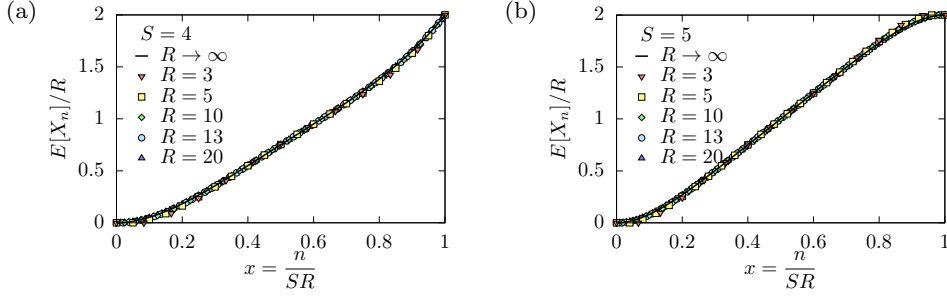


図 2. 図 1 のグラフで横軸を  $x = n/(SR)$ , 縦軸を  $E[X_n]/R$  で描いたグラフ。実線は  $R \rightarrow \infty$  の極限

の場合も  $E[X_n]$  は  $n$  について増加関数となっているが、グラフの右端での増加の仕方が  $S = 4$  と  $S = 5$  で異なっている。この形状の違いは、スート数の偶奇によるペアのでき方・カードの残り方の違いによって生じている。たとえば、 $n = SR$  (すべてのカードを選ぶ場合) と  $n = SR - 1$  の場合を比較すると、スート数  $S$  が偶数の場合は  $E[X_{SR}] = E[X_{SR-1}] + 1$  であるのに対して、奇数の場合は  $E[X_{SR}] = E[X_{SR-1}]$  となり、 $S$  の偶奇でペアの増え方が変わることが分かる。

図 1 のグラフに対して、横軸を  $n/(SR)$ , 縦軸を  $E[X_n]/R$  でスケールしたグラフが図 2 であり、異なる  $R$  のプロットがほぼ重なり合っている。さらに、実線のグラフは  $R$  を大きくする極限をとった場合の結果である。正確には、次の定理で表される。

**定理 2 (ペア数の期待値  $E[X_n]$  の漸近形)** 全枚数  $SR$  に対する  $n$  の割合  $x = n/(SR)$  を一定に保って  $R \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$  の極限をとる (スート数  $S$  は一定)。このとき、

$$\frac{E[X_n]}{R} \rightarrow \frac{S}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{(1-2x)^S}{4}.$$

図 2 の実線はこの式の右辺の関数のグラフである。

**証明 (方針)** Stirling の公式を用いると、

$$P(Y_{n,i} = k) = \frac{\binom{S}{k} \binom{SR-S}{n-k}}{\binom{SR}{n}} = \binom{S}{k} x^k (1-x)^{S-k} + O(R^{-1})$$

が得られる。(第 1 項は二項分布となっている。) この性質を用いて  $E[X_n]/R$  の極限值が求められる。

## 参考文献

- [1] Y. M. M. Bishop, S. E. Fineberg and P. W. Holland, Discrete Multivariate Analysis: Theory and Practice, MIT Press, 1975.