

# 特異項を持つ線形作用素に対する精度保証付き逆作用素ノルム評価

渡部 善隆

九州大学情報基盤研究開発センター

e-mail : watanabe.yoshitaka.003@m.kyushu-u.ac.jp

## 1 概要

$N > 2$  となる任意の整数に対し, 以下の構造を持つ行列の 2 ノルム  $\|H_3 B^{-1} H_4\|_2$  の厳密な上界を求めることを考える (特に表記のない成分は 0 とする).

$$H_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2a & \nu_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2b & 2a & \nu_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a & 2b & 2a & \cdots & \nu_N \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} \tau_1 & & & & \\ & \tau_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \tau_N \end{bmatrix}.$$

行列の各成分の詳細は次の通りである.

$$\nu_1 = c, \quad \nu_n = b + 2(n-1) + \frac{c}{2(n-1)} \quad (2 \leq n \leq N),$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tau_n = \frac{\sqrt{4(n-1)^2 + 1}}{2(n-1)} \quad (2 \leq n \leq N),$$

$$a = \frac{7}{3}, \quad b = \frac{5}{3}, \quad c = \frac{4}{9}.$$

行列  $B$  は波動方程式から導かれる無限次元線形作用素

$$\mathcal{A}u(x) := -\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \left( \frac{a + b \cos 2x}{\sin 2x} \right) \frac{du(x)}{dx} + c \cdot u(x)$$

の行列表現であり,  $\|H_3 B^{-1} H_4\|_2$  は有界領域  $\Omega$  における  $\mathcal{A}^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$  の作用素ノルムに  $N \rightarrow \infty$  の意味で対応する.

本講演では, Bünger–Rump 理論 [1] に基づき, 一般の行列  $A$  に対し  $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$  を与える Frobenius ノルム  $\|H_3 B^{-1} H_4\|_F$  の上界を次元数  $N$  に依らず厳密に与える方法を紹介する.

## 2 手法の概要

列置換行列

$$R := \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & & & & \\ \hline & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

を  $B$  に作用させることで

$$RB = \begin{bmatrix} \nu_1 & & & & & & \\ 2a & \nu_2 & & & & & \\ 2b & 2a & \nu_3 & & & & \\ & 2b - \nu_2 & 2a & \nu_4 & & & \\ & & 2b - \nu_3 & 2a & \nu_5 & & \\ & & & 2b - \nu_4 & 2a & \nu_6 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & 2b - \nu_{N-2} & 2a & \nu_N \end{bmatrix}$$

を得る．この時， $(RB)^{-1}$  の第 1 列目は  $B^{-1}$  の第 1 列目と一致する．また，このベクトルは連立 1 次方程式  $RB\hat{x} = e_1$  を解くことで得られる．したがって， $H_3B^{-1}H_4$  の第 1 列目  $x$  は再帰的に以下で計算可能である．

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\nu_1} && \leftarrow \text{since } 1 = \sqrt{2}\tau_1, \\ x_2 &= \frac{-2ax_1/\sqrt{2}}{\nu_2}, \\ x_3 &= \frac{-2ax_2 - 2bx_1/\sqrt{2}}{\nu_3}, \\ x_m &= \frac{-2ax_{m-1} + (\nu_{m-2} - 2b)x_{m-2}}{\nu_m} \quad (4 \leq m \leq N). \end{aligned}$$

また， $n \in \{2, \dots, N\}$  の場合， $B$  の下右部分行列  $\hat{B}_k \in \mathbb{R}^{(N-n+1) \times (N-n+1)}$  に対して同様の手順を適用することで， $H_3B^{-1}H_4$  に対する  $n$  番目の対角成分以下のベクトル  $\hat{x} \in \mathbb{R}^{N-n+1}$  を求めることができる．

$N \rightarrow \infty$  を保証する Frobenius ノルムの上界の導出を含む手順の詳細および具体的な検証例は講演時に述べる．

**謝辞** 本研究は JSPS 科研費 JP24H00694, JP21H01000, JP24K00538, JP21H00998, の助成を受けたものです．

## 参考文献

- [1] Florian Bünger and Siegfried M. Rump: “Lower bounds for the smallest singular value of certain Toeplitz-like triangular matrices with linearly increasing diagonal entries,” *Integral Equations and Operator Theory*, vol. 91, no. 39 (2019).

# Green 関数による解包含理論：非凸多次元領域上における Poisson 方程式への適用

田中 一成<sup>1</sup>, 松江 要<sup>2</sup>, 落合 啓之<sup>2</sup><sup>1</sup> 早稲田大学, <sup>2</sup> 九州大学

e-mail: tanaka@ims.sci.waseda.ac.jp

## 1 問題設定と背景

本研究では以下の Poisson 方程式の境界値問題の弱解  $u \in H_0^1(\Omega)$  を考える。

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

ここで、 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2$ ) は开区間または有界な多角形領域、 $f \in L^2(\Omega)$  は与えられた関数である。対象とする境界条件は同次 Dirichlet (Neumann) 境界条件であるが、紙面の都合上本予稿では Dirichlet の場合に限定し「同次 Dirichlet 境界条件の境界条件を課した (1) の解」を単に (1) の解と表現する。本研究のモチベーションは、この問題の真解を包み込む優解と劣解を求めることにあ  
る。しかし、伝統的な優解劣解の定義では、暗に関数の滑らかさが要求されるため、優解劣解を区分線形関数を用いて表現することができなかった。この課題を克服するためには、優解劣解が満たすべき条件を緩和することが必要である。これまでの研究で、1 次元の場合に以下の結果を得ている。 $u \in H_0^1(\Omega)$  を (1) の解とする。

**定理 1.**  $\Omega = (0, 1)$  とし、テスト関数  $\phi_s \in H_0^1(\Omega)$  を以下で定義する：

$$\phi_s(x) = \begin{cases} \frac{x}{s} & (0 \leq x \leq s) \\ \frac{1-x}{1-s} & (s < x \leq 1) \end{cases} \quad (2)$$

$\bar{u} \in H^1(\Omega)$  が以下の条件を満たすとする：

$$(\bar{u}', \phi_s') + c \|\phi_s'\|^2 \geq (f, \phi_s) \quad \text{for all } s \in \Omega \quad (3)$$

$$\bar{u} - c \geq 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (4)$$

ただし、 $c$  は非負の定数とする。このとき、 $u \leq \bar{u}$  in  $\Omega$  が成り立つ。

(3)(4) を満たす  $\bar{u}$  を (1) の優解と呼ぶ。なお、劣解も優解同様に定められる。定理 2 の評価は特定の状態で最良であることもわかっている。また、この定理は領域全体での解包含を与えるが、実際には  $s$  を制限すれば特定の点での評価を与えることも可能である。この結果は、上記テスト関数  $\phi_s$  を用いて解  $u$  が

$$u(s) = \frac{(f, \phi_s)}{\|\phi_s'\|^2} = s(1-s)(f, \phi_s) \quad (5)$$

のように表現できることから証明される。本研究ではこの結果を多次元に拡張する。そのためのキーポイントは  $\phi_s$  が Green 関数の線形結合で表されることにある。

## 2 2 次元拡張

Green 関数  $G(x, y)$  は、以下の方程式の解として定義される：

$$\begin{cases} -\Delta_x G(x, y) = \delta(x - y) & \text{in } \Omega \\ G(x, y) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $\delta$  はディラックのデルタ関数である。本研究では、以下の形の試験関数  $\phi_s$  を用いる：

$$\phi_s(x) := a_0 G(s_0, x) + \sum_{i=1}^n a_i G(s_i, x) + C \quad (7)$$

ここで、 $s = \{s_i\}_{i=0}^n$  とし、 $s_0 \in \Omega$  は内部点、 $s_i \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  は外部点、 $a_i, C$  は定数である。

なお、1 次元の場合は上記  $\phi_s$  は以下のように「綺麗に」表される：

$$\begin{aligned} \phi_s(x) &= 2 \left( G_{s_0}(x) - \frac{G_{s_0}(x) - G_{-s_0}(x)}{G_{s_0}(1) - G_{-s_0}(1)} G_{s_0}(1) - \frac{G_{s_0}(x) - G_{2-s_0}(x)}{G_{s_0}(0) - G_{2-s_0}(0)} G_{s_0}(0) \right) \\ &= \frac{1}{s_0(1-s_0)} G_{s_0}(x) + a_{-s_0} G_{-s_0}(x) + a_{2-s_0} G_{2-s_0}(x) \end{aligned}$$

これは先に紹介した (2) と一致する。

**定理 2.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  を有界な多角形領域とし、 $u \in H_0^1(\Omega)$  を (1) の弱解とする。このとき、任意の  $\phi_s$  に対して次が成り立つ：

$$a_0 u(s_0) = \int_{\Omega} f \cdot \phi_s dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \phi_s ds \quad (8)$$

(証明の概要) この結果は、領域が凸である場合は Green の公式から導かれる。問題は非凸な場合であり、その場合も非凸点近傍を除いた領域上で Green の公式を適用し、その近傍の面積を零に近づけることにより証明される。

この定理により、解が直接的に表現される。特に、 $f \geq 0$  かつ  $\phi_s \geq 0$  の場合、以下の上界が得られる：

**系 3.**  $f \geq 0$  in  $\Omega$  かつ  $\phi_s \geq 0$  on  $\partial\Omega$  とする。このとき、(1) の解  $u \in H_0^1(\Omega)$  は以下を満たす：

$$u(s_0) \leq \frac{1}{a_0} \int_{\Omega} f \cdot \phi_s dx \quad (9)$$

**証明** 最大値原理から  $u \geq 0$  in  $\Omega$  である。したがって  $\frac{\partial u}{\partial n} \leq 0$  on  $\partial\Omega$  である。また、仮定より  $\phi_s \geq 0$  であるから (8) の第 2 項は負である。よって定理の結論が従う。

なお、 $s_0$  を領域全体で移動させ、それに伴って得られる (9) の右辺の上界として優解  $\bar{u}$  を構成できる。下からの評価も、 $\phi_s \leq 0$  on  $\partial\Omega$  という仮定のもとで同様に得られる。

### 3 適用例

図 1 は L 型領域  $(-1, 1)^2 \setminus [0, 1]^2$  上で (7) で表される  $\phi_s$  を計算したものである。ただし、内部点は  $s_0 = (-0.5, -0.5)$  とし、外部点は 8 点設定している。これはある初期値からスタートして、教師なし学習を用いることで、 $\phi_s$  が境界上でできるだけ 0 に近くなるように最適化したものである。 $\phi_s > 0$  が境界上で満たされるように上に平行移動したものと  $f$  の積分を計算することにより、系 3 から  $s_0$  における解の上界が計算できる。

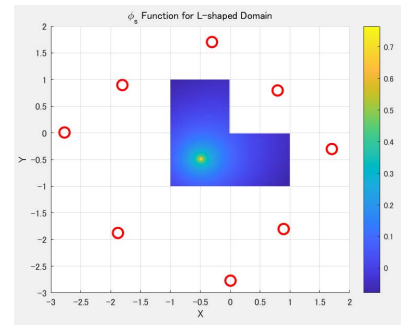


図 1. L 型領域  $(-1, 1)^2 \setminus [0, 1]^2$  上での  $\phi_s$ .

**謝辞** 本研究は JST 創発的研究支援事業 JPMJFR202S の支援を受けたものです。

## 熱方程式の Petrov 型全離散ガレルキン近似の事前誤差評価

水口 信<sup>1</sup>, 中尾 充宏<sup>2</sup>, 橋本 弘治<sup>3</sup>, 関根 晃太<sup>4</sup>, 大石 進一<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 中央大学, <sup>2</sup> 早稲田大学, <sup>3</sup> 中村学園大学, <sup>4</sup> 千葉工業大学

e-mail : mmizuguchi168@g.chuo-u.ac.jp

### 1 はじめに

本稿では、線形熱方程式の弱解とその近似解のひとつである Petrov 型全離散ガレルキン近似との定量的な誤差評価を論じる。Petrov 型全離散ガレルキン近似は一意的に存在すること、そして弱解の十分な正則性の仮定の下で高い収束性を出すことが示されている (see e.g., [1, 2]). しかし解の精度保証付き数値計算法で対象となる非線形偏微分方程式の弱解はその高い収束性を出すための正則性が期待できない。そのため弱解が「低い」正則性しか持てない場合の定量的な評価法がいくつか提案されてきた。例えば、[3] の計算法はいくつかの行列の固有値計算を組み合わせる技巧的な評価法を導出している。しかし全離散近似解が弱解に収束する毎にその行列のサイズが大きくなっていくため、ノルムの値を導出するのに計算コストがかかりすぎる欠点をかかえていた。そこで本講演では、その行列計算を使わない誤差評価法を提案し、その有効性を示す。

### 2 準備

$0 \leq a < b < \infty$  とし、 $J = (a, b)$  とする。  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}$ ) を有界領域とする。  $L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) をルベグ空間、  $H_0^1(\Omega)$  を 1 階ソボレフ空間でその境界が (トレースの意味で) 0 となる関数空間とする。  $f \in L^2(J; L^2(\Omega))$  とし、  $\nu > 0$  とする。 弱解  $u \in H^1(J; L^2(\Omega)) \cap L^2(J; H_0^1(\Omega))$  を

$$\begin{cases} (\partial_t u(t), v)_{L^2(\Omega)} + \nu(u(t), v)_{H_0^1(\Omega)} = (f(t), v)_{L^2(\Omega)} & \forall (t, v) \in J \times H_0^1(\Omega) \\ u(a) = u_0 \end{cases} \quad (1)$$

と定義する。ただし、ヒルベルト空間  $W$  に対して、  $(\cdot, \cdot)_W$  を  $W$ -内積とし、  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  とする。この弱解  $u$  に対して近似解を定めるため以下でいくつかの準備を与える。時間区間  $J = (a, b)$  に対して、

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b, \quad J_i = (t_{i-1}, t_i) \quad (1 \leq i \leq m)$$

と定義する。このとき、分割小区間  $\{J_i\}_{1 \leq i \leq m}$  に対して、  $J_i$  上高々  $k$  次式の空間を  $P_k(J_i)$  とおく。このとき高々  $k \in \mathbb{N}$  次の区分多項式からなる部分空間を  $V_k(J)$  と  $DV_k(J)$  のそれぞれを

$$V_k(J) := \{w \in C(J) \mid w|_{J_i} \in P_k(J_i)\}, \quad DV_k(J) := \{w \in L^2(J) \mid w|_{J_i} \in P_k(J_i)\}$$

とおく。ただし  $|_{J_i}$  は定義域を  $J_i$  に制限することを意味する。  $V_h(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$  を有限次元部分空間とする。さらに  $V_{h,k}(J \times \Omega) := V_h(\Omega) \otimes V_k(J)$ ,  $DV_{h,k}(J \times \Omega) := V_h(\Omega) \otimes DV_k(J)$  とする。このとき、任意の  $v_{h,k-1} \in DV_{h,k-1}(J \times \Omega)$  に対して、

$$\begin{cases} (\partial_t u_{h,k}, v_{h,k-1})_{L^2(J; L^2(\Omega))} + \nu(u_{h,k}, v_{h,k-1})_{L^2(J; H_0^1(\Omega))} = (f, v_{h,k-1})_{L^2(J; L^2(\Omega))} \\ u_{h,k}(a) = \hat{u}_0 \end{cases} \quad (2)$$

が成り立つ  $u_{h,k} \in V_{h,k}(J \times \Omega)$  を定義する。ただし、  $\hat{u}_0 \in V_h(\Omega)$  は弱解 (1) の初期データ  $u_0$  の与えられた任意の近似であり、  $u_{h,k}(a) := \lim_{t \rightarrow a+0} u_{h,k}(t)$  とおく。この  $u_{h,k} \in V_{h,k}(J \times \Omega)$  を Petrov 型全離散ガレルキン近似と呼ぶ。

### 3 主結果

我々の評価法を導出するためにいくつか必要な定数を与える．  $R_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h(\Omega)$  と  $P_{\tau,k} : L^2(J) \rightarrow DV_k(J)$  を

$$(w - R_h w, v_h)_{H_0^1(\Omega)} = 0 \quad \forall v_h \in V_h(\Omega), \quad (u - P_{\tau,k} u, v_k)_{L^2(J)} = 0 \quad \forall v_k \in DV_k(J)$$

と定義する．ただし  $\tau := \max_{1 \leq i \leq m} |J_i|$  とおく．さらに定数  $C_\Omega(h)$ ,  $C_k(\tau)$ ,  $\lambda_h$  はそれぞれ

$$\begin{cases} \|u - R_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega(h) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} & \forall u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u - P_{\tau,k} u\|_{L^2(J)} \leq C_k(\tau) \|\partial_t u\|_{L^2(J)} & \forall u \in H^1(J) \\ \lambda_h := \sup_{u_h \in V_h(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u_h\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{\|u_h\|_{L^2(\Omega)}^2} < \infty \end{cases}$$

を満たすと仮定する．これらの定数を用いて我々はいくつかのノルム評価を導出した．その中のひとつを紹介する．

#### 定理 1

$u$  を (1) の弱解とし,  $u_{h,k}$  を (2) の Petrov 型全離散ガレルキン近似とする．このとき,

$$\begin{aligned} & \|u - u_{h,k}\|_{L^2(J; H_0^1(\Omega))}^2 \\ & \leq \nu^{-1} \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + K(h, \tau, k) \left( \nu \max(\|\hat{u}_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2) + \|f\|_{L^2(J; L^2(\Omega))}^2 \right) \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし

$$K(h, \tau, k) := \frac{C_\Omega(h)^2 + \nu^2 \lambda_h C_\tau (k-1)^2 + 4\nu C_\tau (k-1)}{\nu^2}.$$

である．

[3] による既存の計算法では  $L^2(J; H_0^1(\Omega))$  ノルムの誤差定数を得るために全離散近似を構成する基底関数の次元と同等のサイズの行列が必要であった．しかしこの定理 1 によって得られた定数はほぼ手計算のみで算出できる値のみで構成された評価となっている．その他に導出したノルム評価や既存の計算法との比較は講演時に話す．

#### 参考文献

- [1] A.K. Aziz and P.monk, Continuous Finite Elements in Space and Time for the Heat Equation, Math. Comp., 52(1989), 255-274
- [2] N. Ahmed and G. Matthies, Higher order continuous Galerkin-Petrov time stepping schemes for transient convection-diffusion-reaction equations, ESAIM: M2AN, 49(2015), 1429-1450
- [3] K. Hashimoto, M.T. Nakao, T. Kimura, and T. Minamoto, Constructive error analysis of a full-discrete finite element method for the heat equations, Jpn. J. Ind. Appl. Math., 36(2019), 777-790

# 分布遅延項を含む遅延微分方程式における分数調波解の精度保証

中川 新<sup>1</sup>, 大石 進一<sup>1</sup>, 関根 晃太<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 早稲田大学, <sup>2</sup> 千葉工業大学

e-mail : nakagawa.a@akane.waseda.jp

## 1 はじめに

分布遅延項を含む遅延微分方程式によるモデリングは様々な分野で試みられている。本研究では Ghil ら [1] により提唱された El Niño 方程式に現れる遅延項を分布遅延項へ拡張した方程式 (1)

$$\begin{cases} dx(t)/dt = \int_0^\tau -w(a) \tanh \kappa x(t-a) da + \beta \cos \omega t \\ w(a) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq a < \tau/4, 3\tau/4 < a \leq \tau \\ 2/\tau & \text{if } \tau/4 \leq a \leq 3\tau/4 \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

における分数調波解の存在を大石、関根の手法 [2] に基づき精度保証付き数値計算を用いて示す。本発表では大石、関根の手法を用いる上で必要となる被積分関数の周期性を利用した重積分の効率的な誤差評価方法と、残差のノルムの計算量を削減する手法を発表した後に、精度保証の結果を述べる。

## 2 各種定義

$[0, 2\pi]$  上の二乗可積分な関数からなるヒルベルト空間  $L^2[0, 2\pi]$  上の周期的なソボレフ空間  $H_P^1$  を  $H_P^1 := \{x \in H^1[0, 2\pi] | x(t) = x(t+2\pi)\}$  とし、その部分空間で  $n$  次元のフーリエ基底で張られた関数空間を  $E_n$  とする。また、定数  $\omega_m := \omega/m$  を定義する。作用素  $N : H_P^1 \rightarrow L^2[0, 2\pi]$ ,  $F : H_P^1 \rightarrow L^2[0, 2\pi]$  を、 $N(x) := -\frac{1}{\omega_m} \left\{ \int_0^\tau -w(a) \tanh \kappa x(t-\omega_m a) da + \beta \cos mt \right\}$ ,  $F(x) := dx(t)/dt + N(x)$  と定義する。 $F(x) = 0$  の  $2\pi$  周期解の存在を証明と (1) 式の  $1/m$  分数調波解の存在証明は同値である。加えて、射影作用素  $P_n : H_P^1 \rightarrow E_n$  と  $x_0 \in E_n$  におけるフレシェ微分の有限次元への射影  $J[x_0] : E_n \rightarrow E_n$  をそれぞれ  $P_n x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^n (a_i \cos it + b_i \sin it)$ ,  $J[x_0]h(t) = P_n F'[x_0]h(t)$  と定義する。

## 3 重積分の誤差評価の効率化

$\phi_0 = 1/2$ ,  $\phi_{2i-1}(t) = \sin it$ ,  $\phi_{2i}(t) = \cos it (i \geq 1)$  とすると、 $J[x_0]$  の  $ij$  成分は

$$J[x_0]_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{d\phi_j(t)}{dt} + \frac{1}{\omega_m} \left( \int_0^\tau f(a) \frac{\alpha \kappa \phi_j(t - \omega_m a)}{\cosh^2(\kappa x_0(t - \omega_m a))} da \right) \right\} \phi_i(t) dt$$

である。 $t$  に関する積分はオイラー・マクローリンの公式、 $a$  の積分に関してはニュートン・コーツの公式（以下 NC 公式と呼称する）を利用する。重積分の誤差評価  $E := \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\tau}{4}}^{\frac{3}{4}\tau} g(a, t) dadt - \sum_{i=0}^{N_a} \sum_{j=0}^{N_t-1} c_i h_a h_t g(a_i, t_j)$  は kv ライブラリ [3] の double-newtoncotes.hpp の実装に倣い、

$$|E| \leq \frac{\tau}{2} \times 2\pi \left( d_n h_a^{e_n} \sup_{a \in (\frac{\tau}{4}, \frac{3}{4}\tau), t \in (0, 2\pi)} \left| \frac{\partial^{e_n} g}{\partial a^{e_n}} \right| + \frac{|B_{2r+2}|}{(2r+2)!} h_t^{2r+2} \sup_{a \in (\frac{\tau}{4}, \frac{3}{4}\tau), t \in (0, 2\pi)} \left| \frac{\partial^{2r+2} g}{\partial t^{2r+2}} \right| \right)$$

と得られる。ただし  $c_i$  は分点  $a_i$  における NC 公式の係数、 $h_a, h_t$  は  $a, t$  に関する数値積分の刻み幅、 $d_n, e_n$  は  $n$  次の NC 公式の誤差係数と対応する微分回数である。 $a, t$  に関する偏微分の評価は以下の補題 1 を用いることで基底  $\phi_i, \phi_j$  を取り替えることによる計算量の増大を抑える事が可能である。

**補助定理 1**  $k \geq 0$  とし、 $f(t) \in C_P^k[0, 2\pi]$  とする。 $g(a, t) = f(a, t) \sin(it) \cos(jt - j\omega_m a)$  と置くと、 $t \in [0, 2\pi]$ ,  $a \in [\frac{\tau}{4}, \frac{3}{4}\tau]$  と  $i, j \in \{1, 2, \dots, 2n-1, 2n\}$ , に対して以下の不等式が成立する。

$$\left| \frac{\partial^k g(a, t)}{\partial a^k} \right| \leq \sum_{l=0}^k {}_k C_l (j\omega_m)^l \left| \frac{\partial^{k-l} f(a, t)}{\partial a^{k-l}} \right|, \quad \left| \frac{\partial^k g(a, t)}{\partial t^k} \right| \leq \sum_{l=0}^k {}_k C_l (i+j)^l \left| \frac{\partial^{k-l} f(a, t)}{\partial t^{k-l}} \right|$$

#### 4 残差のノルム計算の効率化

大石、関根の手法では近似解  $x_0$  における  $\|F(x_0)\|_{L^2[0, 2\pi]}$  の評価が必要となる。 $r(t) := F(x_0)$  と書き換え、 $I_i := [ih_t, (i+1)h_t]$  と定義すると  $\|r(t)\|_{L^2[0, 2\pi]}$  の上界は以下のようにして得られる。

$$\|r(t)\|_{L^2[0, 2\pi]} \leq \sqrt{\frac{2}{N_t} \sum_{i=0}^{N_t-1} \sup_{t \in I_i} |r(t)|^2} \leq \sqrt{\frac{2}{N_t} \sum_{i=0}^{N_t-1} \left( \max_{j=i, i+1} |r(jh_t)| + \frac{1}{8} h_t^2 \sup_{t \in I_i} |r''(t)| \right)^2} \quad (3)$$

$t$  を変化させるごとに  $r(t)$  内の定積分の被積分関数も変化するため、 $O(N_t N_a)$  の計算量が要求される。そこで、以下の手順を踏むことで計算量を  $O(N_t + N_a)$  へ削減させる。

- 1)  $h_t = \omega_m h_a$  として被積分関数に関するタイムステップごとのテーブル  $f[i]$  を作成する。
- 2)  $f[i]$  を元に  $a$  に関する数値積分のテーブル  $F[i]$  を作成する。数値積分に複合同形則を適用する場合は  $F[i] = h_a(f[i]/2 + \sum_{j=1}^{N_a-1} f[i+j] + f[i+N_a]/2)$  と得られる。次の時刻での値は  $F[i+1] = F[i] + h_a\{(-f[i] + f[i+N_a]) + (-f[i+1] + f[i+1+N_a])\}/2$  により得られる。

#### 5 精度保証の成功した例

図 1, 2 は精度保証が成功している  $2\pi/\omega$  周期解 ( $m = 1$ ) の波形と相図である。また、表 1 には精度保証結果を示す。ただし表 1 の各項目と  $b(r_0)$  が満たすべき条件は [2] を参考して頂きたい。

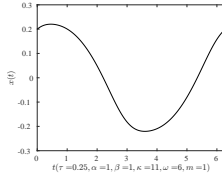


図 1.  $2\pi$  周期解の波形

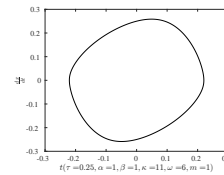


図 2.  $2\pi/\omega$  周期解の相図

表 1.  $2\pi/\omega$  周期解の精度保証結果

$M_n$	$M$	$\eta$	$b(r_0)$
3.358	11.77	$8.213 \times 10^{-10}$	$3.520 \times 10^{-5}$

#### 参考文献

- [1] Ghil, Michael and Zaliapin, Ilya and Thompson, Sylvester, A delay differential model of ENSO variability: parametric instability and the distribution of extremes, *Nonlinear Processes in Geophysics*, Vol. 15:3 (2008), 417–433
- [2] Oishi, Shin'ichi and Sekine, Kouta, Inclusion of periodic solutions for forced delay differential equation modeling El Niño, *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE*, Volume. 12:3 (2021), 575–610
- [3] Kashwagi, Masahide, kv library, (2024), <http://verifiedby.me/kv/>