

Left Regular Band を用いたマルコフ連鎖の分析 Analysis of Markov chains using a Left Regular Band

東北大学 理学研究科数学専攻 博士3年 学際高等研究教育院 博士研究教育院生 中川 由宇斗

yuto.nakagawa.r5@dc.tohoku.ac.jp

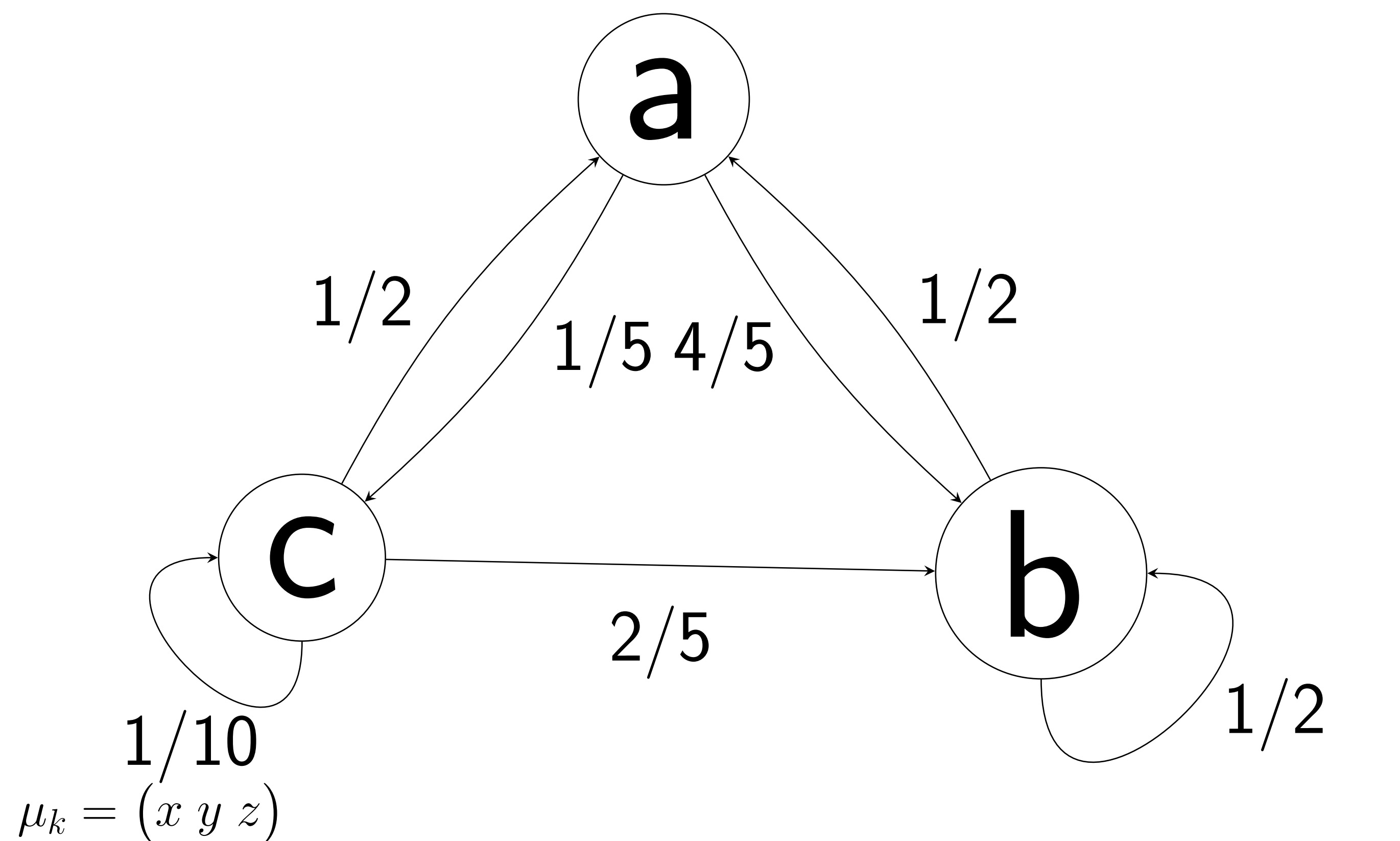
キーワード

確率論, マルコフ連鎖, 推移確率行列, Left Regular Band

マルコフ連鎖

過去の状態に依存せず, 現在の状態だけで定まる確率過程を**マルコフ連鎖**という. (例: カードシャッフル・チェスの駒の動き). マルコフ連鎖は, ある正方行列 P (**推移確率行列**) で表現することができる.

$|\Omega| = 3$ のときの遷移図と推移確率行列



$$\mu_k = (x \ y \ z)$$

$$\mu_{k+1} = \mu_k P = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & 1/5 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 2/5 & 1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2y + 1/2z \\ 4/5x + 1/2y + 2/5z \\ 1/5x + 1/10z \end{pmatrix}$$

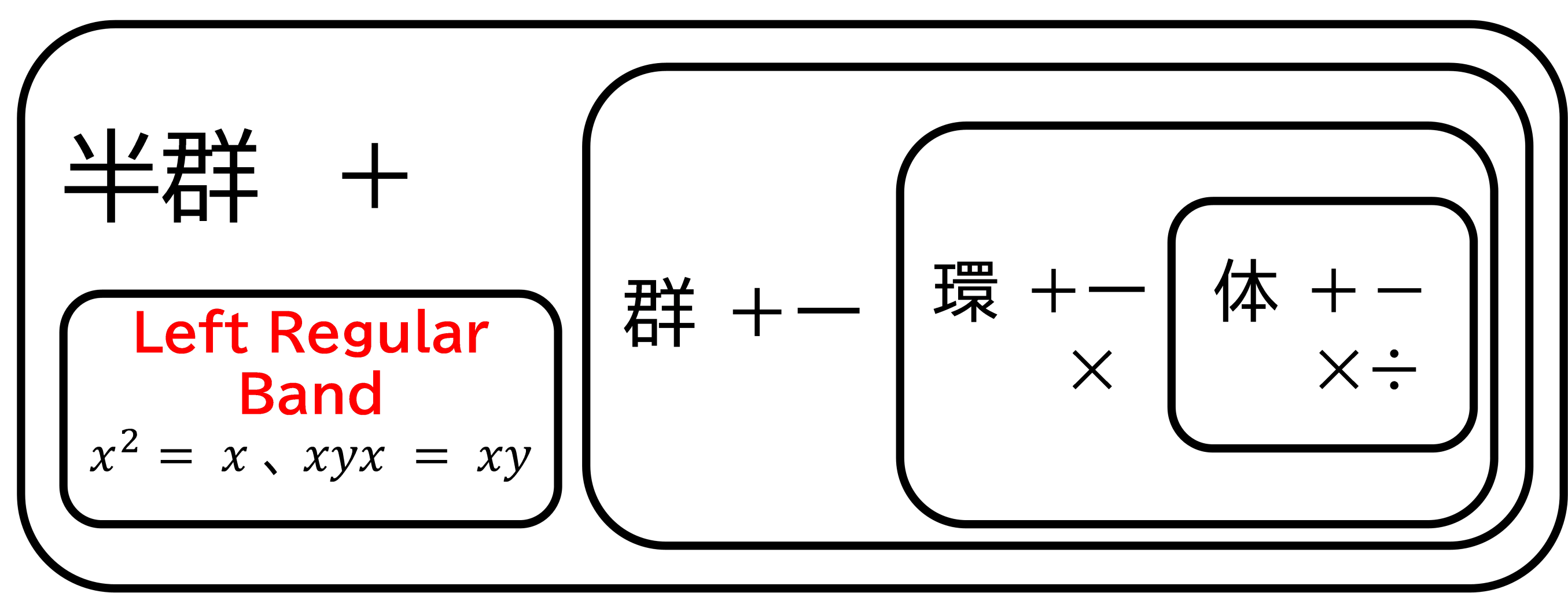
$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2/11 \\ 1 & 1 & -5/22 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1/3 & 16/27 & 2/27 \\ -1/3 & 2/9 & 1/9 \\ 0 & -22/27 & 22/27 \end{pmatrix}$$

マルコフ連鎖は, (統計) 物理学や情報といった数学以外の分野においても用いられる.

例: マルコフ連鎖モンテカルロ法・機械学習・ページランク

半群・Left Regular Band

S が **半群**: S 上の演算 $(*)$ が結合則 $((x * y) * z = x * (y * z))$ を満たす.



但し自明群は除く

Tsetlin library (Brown (2000) [1])

分布 $\{v_i\}_{i=1}^n$ が与えられている. 本棚に n 冊の本がある. 「確率 v_i で本 i を取り除き, それを一番左に戻す」という操作を繰り返すことで得られる S_n ($1 \sim n$ の並び替え全体) 上のマルコフ連鎖を **Tsetlin library** という.

Tsetlin library の操作の例 ($n=9$)

8 を選ぶ v_8 7 3 5 1 8 9 2 4 6
左端に移動 \rightarrow 8 7 3 5 1 9 2 4 6
 \rightarrow 8 7 3 5 1 9 2 4 6

Tsetlin library の推移確率行列の固有値と重複度 ($X \subset [n]$)

$$\lambda_X = \sum_{i \in X} v_i, \quad m_X = d_{n-|X|}, \quad d_k = k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} = \#\{\sigma \in S_k \mid \forall i \sigma_i \neq i\}$$

モンモール数: 攪乱順列の個数. $S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$ $d_3 = 2$

先行研究 (Brown (2000) [1])

単位元を持つ LRB S 上の分布 $\{w_x\}_{x \in S}$ を与える. 「確率 w_x で選んだ x を左からかける」という操作で, マルコフ連鎖を考えられる. このとき, P は対角化可能であり, 次で表される固有値を持つ.

$$\lambda_X = \sum_{\text{supp } y \leq X} w_y, \quad m_X = \sum_{Y \geq X} \mu(X, Y) c_Y$$

p色版 Tsetlin library

本棚に n 冊の本と, p 色 ($0 \sim p-1$) のカバーがある. 「確率 v_i で本 i ($1 \leq i \leq n$) を取り出し, 確率 c_j で色 j ($0 \leq j \leq p-1$) のカバーに取り替える. その後にその本を一番左に動かす」という操作を繰り返すことで得られる $G_{n,p} := C_p \times S_n$ 上のマルコフ連鎖を **p色版 Tsetlin library** と呼ぶ.

操作の例 ($n=8, p=3$), $(a, 0) = a, (b, 1) = b, (c, 2) = c$

v_4 7 3 5 1 4 2 8 6
数字4を選ぶ \rightarrow 4 7 3 5 1 2 8 6
色1に変える \rightarrow 4 7 3 5 1 2 8 6
 c_1 4 7 3 5 1 2 8 6

定理1 p色版 Tsetlin library の固有値と重複度

$$\lambda_X = \sum_{i \in X} v_i, \quad m_X = D_{n-|X|,p} \quad (X \subset [n]), \quad D_{k,p} = k! p^k \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j! p^j}$$

p色版モンモール数 $G_{2,2} = \{12, 12, 12, 12, 21, 21, 21, 21\}$. $D_{2,2} = 5$
 $D_{k,p} := \#\{\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k) \in G_{k,p} \mid \tau_i = (\sigma_i, a_i) \forall i \text{ “}\sigma_i \neq i \text{ または } a_i \neq 0\text{”}\}$

riffle shuffle

n 枚のカードそれぞれに, $(0, 1)$ のいずれかの番号を一様に割り振る. 「0 を割り振ったカードを, そのままの順で左に移動する」という操作によって得られる S_n 上のマルコフ連鎖を **(2-)riffle shuffle** という.

(2-)riffle shuffle の操作の例 ($n=7$)

2 5 3 1 4 6 7 \rightarrow 5 1 4 2 3 6 7
1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1

注意: Tsetlin library と riffle shuffle は, 与える分布を変えることによって **同じ LRB** (「braid arrangement」) を用いて表現することができる.

定理2 (2-)riffle shuffle の固有値と重複度

$$\lambda_k = 2^{k-n}, \quad m_k = s_1(n, k) \quad (0 \leq k \leq n)$$

第一種スターリング数: $x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1) = \sum_k s_1(n, k) x^k$
 S_n の元において k 個のサイクルに分解する個数. $s_1(3, 3) = 1$ (1)(2)(3)
 $s_1(3, 2) = 3$ (12)(3), (13)(2), (23)(1), $s_1(3, 1) = 2$ (123), (132)

	Tsetlin library	p色版 Tsetlin library	riffle shuffle
重複度の背景	$\sum_{k=0}^n {}_n C_k d_k = n!$	$\sum_{k=0}^n {}_n C_k D_{k,p} = n! p^n$	$\sum_{k=0}^n s_1(n, k) = n!$

経歴

2013年~2016年	山形県立山形中央高等学校 普通科	卒業
2016年~2020年	東北大学 理学部数学科	卒業
2020年~2022年	東北大学大学院 理学研究科数学専攻 学際高等研究教育院 修士研究教育院生	修了
2022年~2025年	東北大学大学院 理学研究科数学専攻 学際高等研究教育院 博士研究教育院生	修了 予定

TA・RAの経験あり 専門学校にて非常勤講師に従事 日本数学会会員
教員免許 (高校 数学・理科 中学 数学・理科・社会) 学芸員資格所持
学部: 281単位 (124) 修士: 67単位 (30) 博士: 22単位 (20) 修得
研究発表 28回 (口頭16回 ポスター12回)

[1] K. S. Brown, *Semigroups, rings, and Markov chains*, J. Theoret. Probab. **13** (2000), no. 3, 871–938, DOI 10.1023/A:1007822931408.

[2] F. a. S. Nakano Taizo and Sakurai, *Top to random shuffles on colored permutations*, Discrete Appl. Math. **339** (2023), 336–348.

[3] F. N. Yuto Nakagawa, *Tsetlin library on p-colored permutations and q-analogue*, to appear in Mathematical Journal of Okayama University.