

マジョリゼーションに関連する凸幾何学のグラフ実現問題への応用

成田知将

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 PD

(用語) 一様ハイパーグラフ

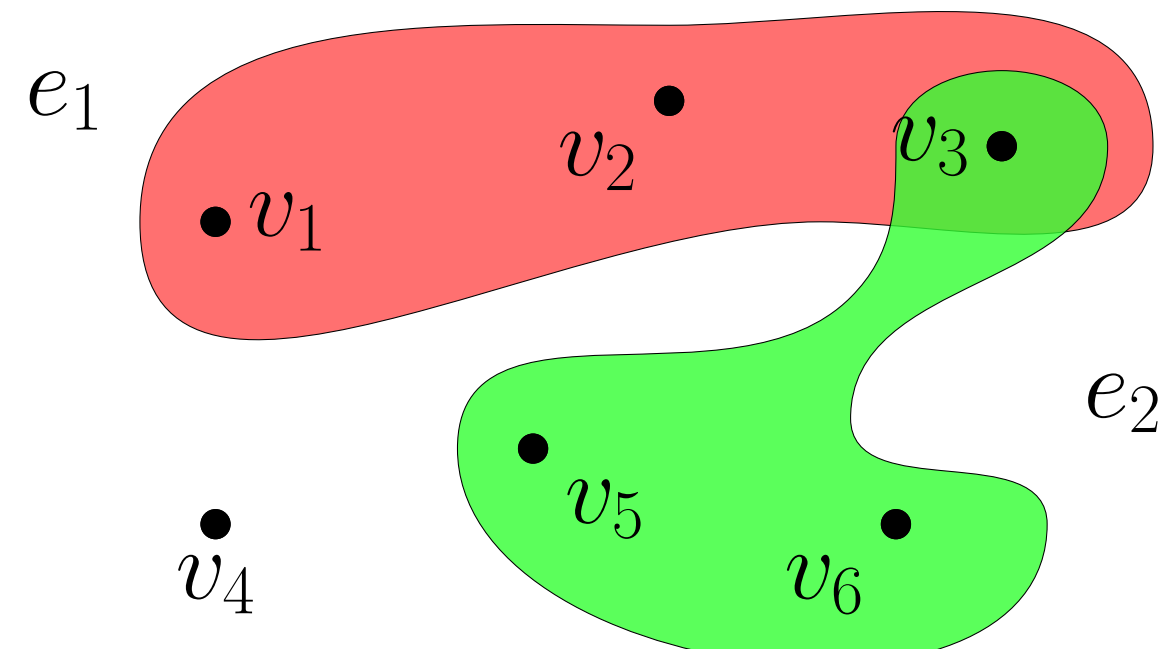
$V = \{v_1, \dots, v_n\}$: 頂点集合.

$E = \{e \subset V \mid |e| = k\} = \{e_1, \dots, e_m\}$: 辺集合.

さらに, E には同じ辺が含まれないとする.

このとき, $G = (V, E)$ を k -一様 (単純) ハイパーグラフという. 2一様ハイパーグラフは通常の単純グラフに他ならない.

(下の図: 3一様ハイパーグラフの例)



(用語) 重み付きでない一様ハイパーグラフの次数列

各頂点 $v_i \in V$ の次数 $\bar{d}_i := (v_i$ を含む辺の本数) $= \sum_{j: v_i \in e_j} 1$.

$\bar{D} := (\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n)$ を G の次数列という.

上の例: $\bar{D} = (1, 1, 2, 0, 1, 1)$

(用語) 重み付き一様ハイパーグラフの重み付き次数列

$w: E \rightarrow [0, +\infty)$: 重み

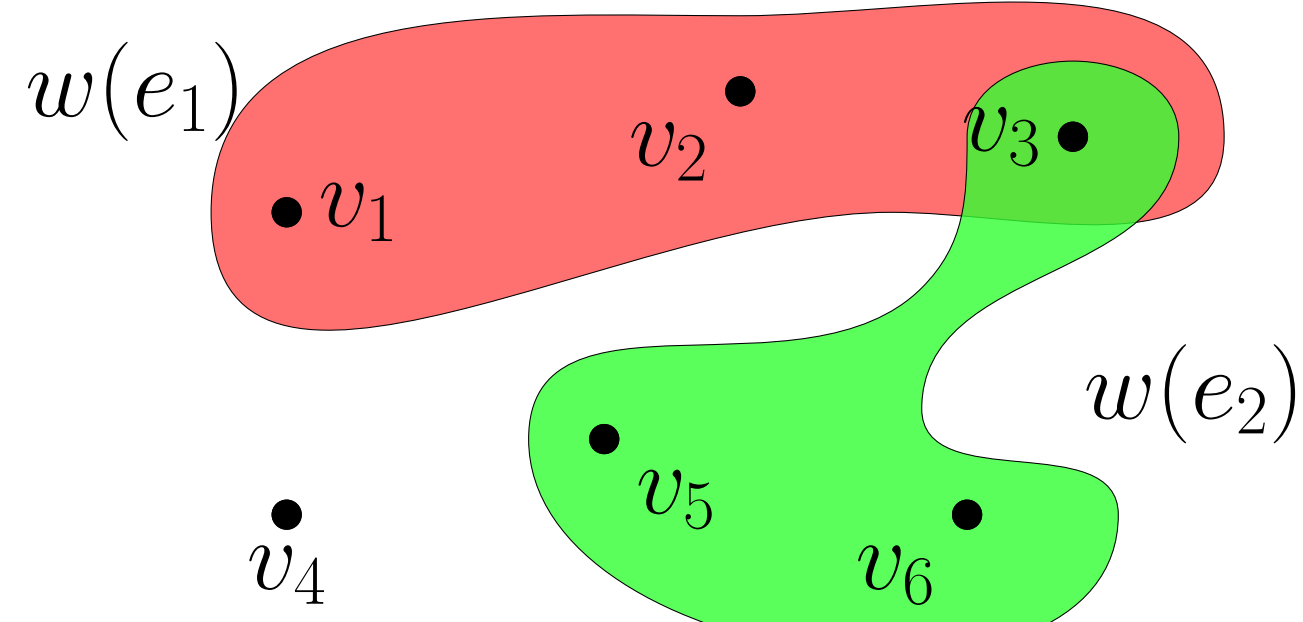
$G = (V, E, w)$: 重み付き k -一様ハイパーグラフ

各頂点 $v_i \in V$ の重み付き次数 $d_i := \sum_{j: v_i \in e_j} w(e_j)$.

$D := (d_1, \dots, d_n)$ を $G = (V, E, w)$ の重み付き次数列という.

上の例に重みをつけたとき:

$D = (w(e_1), w(e_1), w(e_1) + w(e_2), 0, w(e_2), w(e_2))$



グラフ実現問題とその歴史

グラフ実現問題 (重み付きでない場合): k を2以上の整数とする. 非負整数の有限列がある k -一様ハイパーグラフの次数列として実現するための必要十分条件は何か?

グラフ実現問題 (重み付きの場合): k を2以上の整数とする. 非負実数の有限列がある重み付き k -一様ハイパーグラフの重み付き次数列として実現するための必要十分条件は何か?

| | 重み付きでない | 重み付き |
|------------|---|---------------|
| $k = 2$ | Havel–Hakimi ('55, '62), Erdős–Gallai ('60), etc. | Hakimi('62) |
| $k \geq 3$ | Dewdney ('75) | Narita (2024) |

Narita (2024)の結果は, Hakimiの定理の一般化である.

定理 (Narita (2024))

k : 2以上の自然数, $n \geq k$ とする.

$D = (d_1, \dots, d_n)$: $d_1 \geq \dots \geq d_n \geq 0$ をみたす実数列

D がある重み付き k -一様ハイパーグラフの重み付き次数として実現する

\iff

$$kd_1 \leq \sum_{i=1}^n d_i.$$

さらに, この条件が成り立つとき, D を重み付き次数とするような重み付き k -一様ハイパーグラフ $G = (V, E, w)$ で, 重みが正の辺を高々 n 本しか持たないようなものが存在する.

定理の前半に $k = 2$ を代入したものはHakimi (1962)の結果に他ならない. Hakimiは定理の後半について言及していない.

Hakimiは数学的帰納法を用いたが, 私はマジョリゼーションの幾何学的特徴付けを用いた, 全く異なる手法による証明を与えた. (特に, $k = 2$ のとき別証明.)

定理の応用を見据えた解釈

設定

- 各頂点: 配達人
- 頂点の次数: その配達人の仕事量(の数値化)
- 各辺: 各オンラインストアから仕事を受ける配達人のグループ
- 各辺の重み: 各ストアが各配達人に割り振る仕事量

グラフ実現問題

自分の仕事量を指定した n 人の配達人がいる. 各オンラインストアが仕事を任せる配達人の数が必ず k 人になるような仕事の割り振り方は存在するか? ただし, 配達人は複数のストアの仕事を掛け持ちしてよい. また, スタアの数についての制限はない.

定理の解釈

定理の前半: 配達人の仕事量の最大値の k 倍が, 配達人全員の仕事量の総和以下なら, そのような仕事の割り振り方は存在する.

定理の後半: 仕事の割り振り方の中には, オンラインストアの数が n 社以下であるようなものが存在する.

《証明のキーポイント1》

以下, 簡単のため $k = 2$ (重み付きグラフ)の場合を説明する.

$a_{ij} = w(v_i v_j)$ という対応によって, 重み付きグラフ (V, E, w) と各成分が非負で対角成分が0の対称行列 $A = (a_{ij})$ が1対1対応する.

v_i の重み付き次数が d_i であるとは, 対応する A の i 行目の成分の和が d_i ということ.

そのような行列たちは空集合または(多くの場合で)閉凸多面体をなす.

《証明のキーポイント2: マジョリゼーション》

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$x = (x_{[1]}, \dots, x_{[n]})$ with $x_{[1]} \geq \dots \geq x_{[n]}$ とする.

$x, y \in \mathbb{R}^n$ が $1 \leq k \leq n - 1$ をみたす任意の k に対し, $\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]}$ を

みたし, かつ $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ をみたすとき, x は y によってmajorizeされる ($x \preceq y$)という.

$\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ が $x \in \mathbb{R}^n$ の成分の並び替えによって得られるとき, \tilde{x} は x の

permutationであるという.

ベクトル u が v_1, \dots, v_l の凸結合であるとは,

$$u = \sum_{i=1}^l c_i v_i, \quad \sum_{i=1}^l c_i = 1$$

をみたす非負実数 c_1, \dots, c_l が存在すること. c_1, \dots, c_l を結合係数という.

定理 (Rado (1952))

$x, y \in \mathbb{R}^n$ とする.

$x \preceq y$

$\iff x$ が y のあるpermutationsの凸結合として書ける (Rado)

定理の証明のスケッチ

(\implies)は容易.

(\impliedby) $S := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i$ とおく. 仮定より $(d_1, \dots, d_n) \preceq (S, S, 0, \dots, 0)$.

Radoの定理より, (d_1, \dots, d_n) は $(S, S, 0, \dots, 0)$ のpermutationsの凸結合で書けるが, その結合係数を用いて所望の対称行列が構成できる.

定理の後半については, 線形計画法の理論から, 上述の閉凸多面体の頂点に対応する重み付きグラフは重みが正の辺を高々 n 本しか持たないことがわかる.

参考文献

- A. K. Dewdney, *Proc. Amer. Math. Soc.* **53** (1975), 535–540.
P. Erdős and T. Gallai, *Mat. Lapok.* **11** (1960), 264–274. (Hungarian)
S. L. Hakimi, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **10** (1962), 496–506.
V. Havel, *Časopis Pěst. Mat.* **80** (1955), 477–480. (Czech).
K. Narita, *Australas. J. Comb.* **88**(2024), 282–293.
R. Rado, *J. London Math. Soc.* **27** (1952), 1–6.