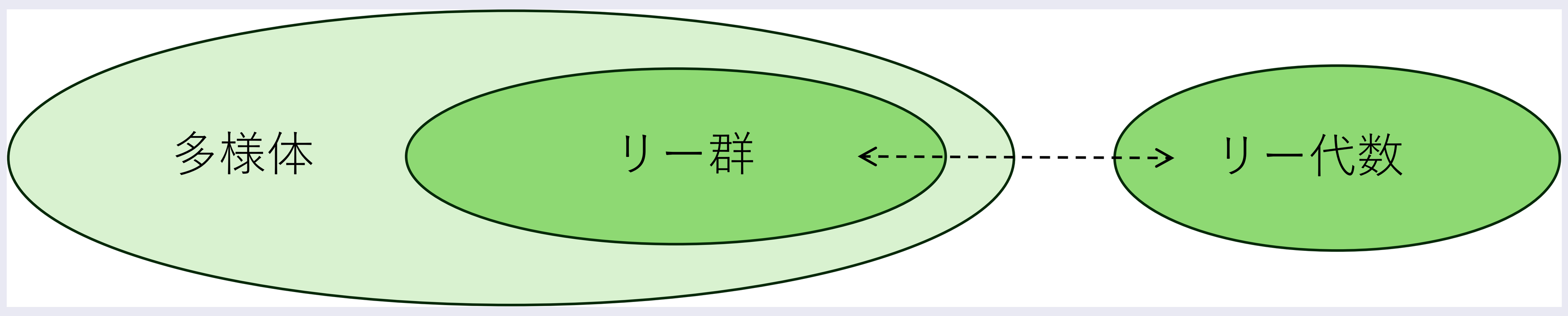
クイバーから得られる冪零リー代数

*溝口史華, 田丸博士(大阪公立大学)

微分幾何学における問題

多様体(リー群)は，いつどのような幾何構造を持つか？



レビ分解

$\mathfrak{g}$	$=$ $\mathfrak{s}$	$+$ $\mathfrak{r}$	
リー代数	半単純	可解 ⊃	$\boxed{\text{冪零}}$
	↓		↓
	分類されている		分類もなく，一般論は困難

冪零リー代数

$\mathfrak{g}$: リー代数, $\mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}^{i-1}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$

$\mathfrak{g}$がmステップ冪零リー代数

: $\iff$ $\mathfrak{g}^{m-1} \neq 0$, $\mathfrak{g}^m = 0$

※括弧積をm回取ると0になるリー代数.

2ステップの場合には盛んに研究されているが，ステップ数が高い場合は，未解明な点が多い.

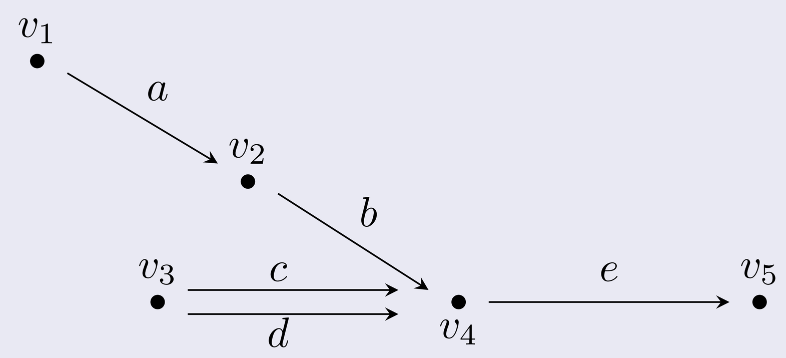
- 扱いやすい冪零リー代数(特に，ステップ数が高い場合)の例を構成する.
- その冪零リー代数が，いつどのような幾何構造を持つか調べる.

クイバー

クイバー：点と矢印で表された図.

道: 向きが正しくつながっている矢の列. 矢の個数を道の長さという.

例



- 長さ1の道: a, b, c, d, e
- 長さ2の道: ab, be, ce, de
- 長さ3の道: abe

クイバーから得られるリー代数

サイクルを含まない**クイバー** $\Rightarrow$ $\boxed{\text{冪零リー代数}}$

得られた冪零リー代数は，いつどのような幾何構造を持つか?

Q：クイバー

$$\mathfrak{n}_Q = \mathrm{span}\{Q\text{のすべての道}\}$$

Qの道x, yに対して，積を以下で定める:

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & (xy\text{が道}(x\text{の終点と}y\text{の始点が一致する})), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

この積を用いて，括弧積を

$$[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$$

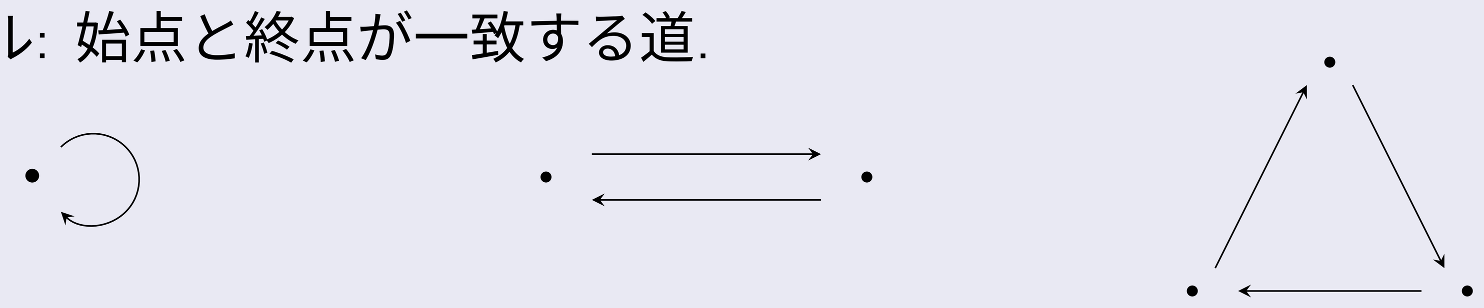
とし，双線形に定めると，リー代数となる.

Q：サイクルを含まないクイバー

このとき，リー代数$\mathfrak{n}_Q$は，冪零リー代数であり，Qのすべての道の長さ最大値が$\mathfrak{n}_Q$のステップ数である.

※道の最大値が大きなクイバーを考えると，ステップ数の高い冪零リー代数を構成できる.

サイクル: 始点と終点が一致する道.



例

$$\bullet \xrightarrow{a} \bullet \xrightarrow{b} \bullet \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{n}_Q = \mathrm{span}\{a, b, ab\}$$

- $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a = ab$
- $[a, ab] = 0$, $[b, ab] = 0$

$$\mathfrak{n}_Q \simeq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\} : 3\text{次元ハイゼンベルグ代数}$$

クイバーから冪零リー代数を構成するメリット

- 扱いやすい具体例が得られる.
- 任意のステップ数の冪零リー代数が得られる.
- 新しい具体例が多く得られる.

結果

リッチソリトン

(M, g): リーマン多様体, ric_g: リッチ曲率テンソル.

(M, g): リッチソリトン

$\iff$ $\exists c \in \mathbb{R}$, $\exists X \in \mathfrak{X}(M)$ s.t.

$$\mathrm{ric}_g = c \cdot g + \mathcal{L}_X g.$$

※微分同相写像や拡大縮小で動かしたリッチフロー方程式の解.

- (M, g): リッチ平坦 $\iff$ $\mathrm{ric}_g = 0$
- (M, g): アインシュタイン $\iff$ $\mathrm{ric}_g = c \cdot g$ $(c \in \mathbb{R})$

※リッチソリトンはアインシュタインの一般化

定理(M.-田丸, 2024)

サイクルを含まないクイバーから得られる冪零リー代数に対応する単連結冪零リー群は，いつでも左不変リッチソリトンを許容する.

今後の展望(その他の幾何構造)

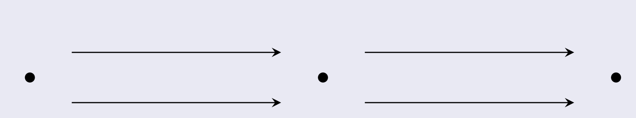
リッチ平坦擬リーマン計量(M. , 2024)

クイバーから得られる冪零リー代数が2ステップのとき，それに対応する単連結冪零リー群は，いつでも左不変リッチ平坦擬リーマン計量を許容する.

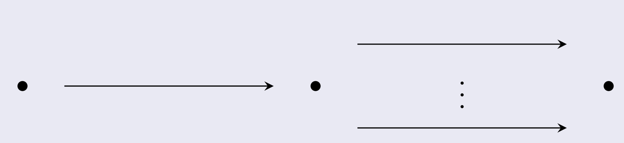
シンプレクティック構造(M. , 2024)

クイバーから得られる冪零リー代数が2ステップのとき，それに対応する単連結冪零リー群が，左不変シンプレクティック構造を許容する必要十分条件は，

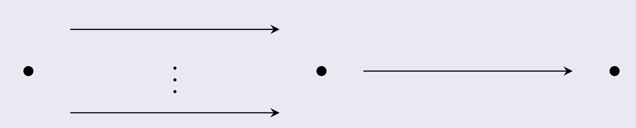
- 次元が偶数，
- クイバーの連結成分は次のいずれか.



$(2, 2)$-type



$(1, n)$-type



$(n, 1)$-type

$(1, 0)$-type

3ステップ以上の場合は，未解明である.

- Mizoguchi, F. and Tamaru, H., "Nilpotent Lie algebras obtained by quivers and Ricci solitons", arXiv:2405.11184.
- Mizoguchi, F, "Two-step nilpotent Lie algebras obtained by quivers and geometric structures, to appear.