

Lévy過程に対する処罰問題と条件付問題

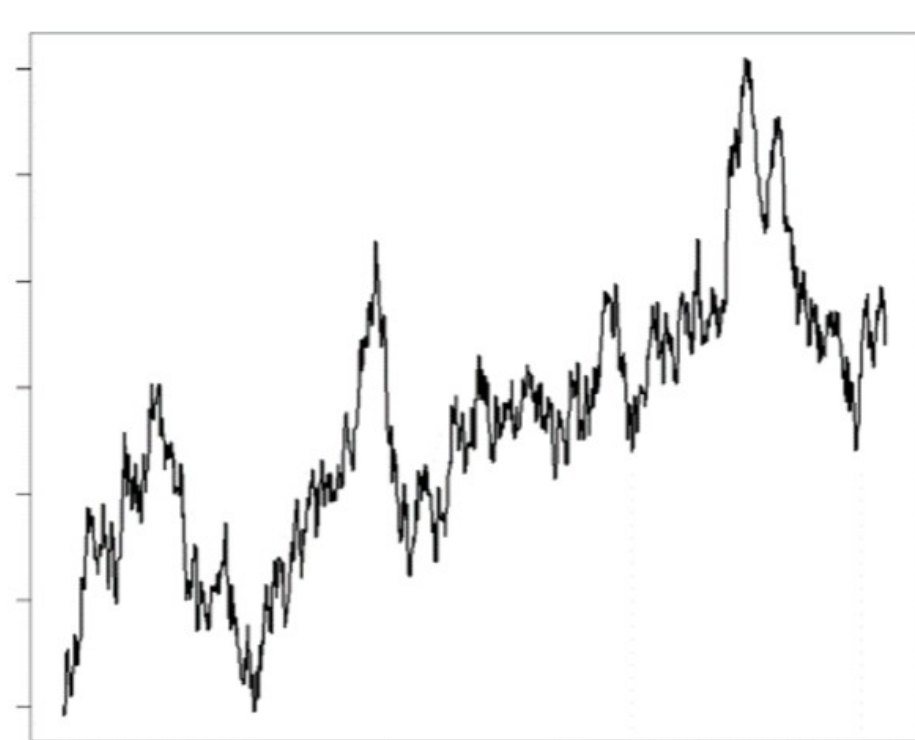
伊庭 滉基 (大阪大学 大学院理学研究科 数学専攻 D2)

1. Lévy過程とは？

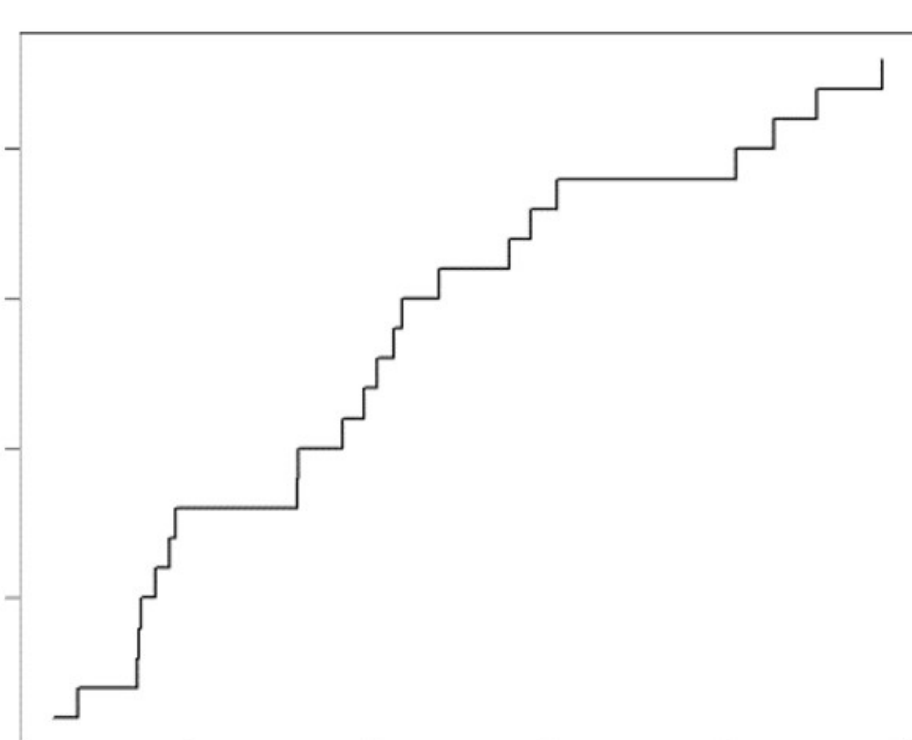
- 確率過程：時間経過でランダムに変化する系。
- 確率過程の典型例：
 - Brown運動：浮遊微粒子の拡散などのモデル。
 - Poisson過程：地震の発生回数などのモデル。
- Lévy過程：これらを含む確率過程のクラス。

確率過程

Lévy過程



Brown運動

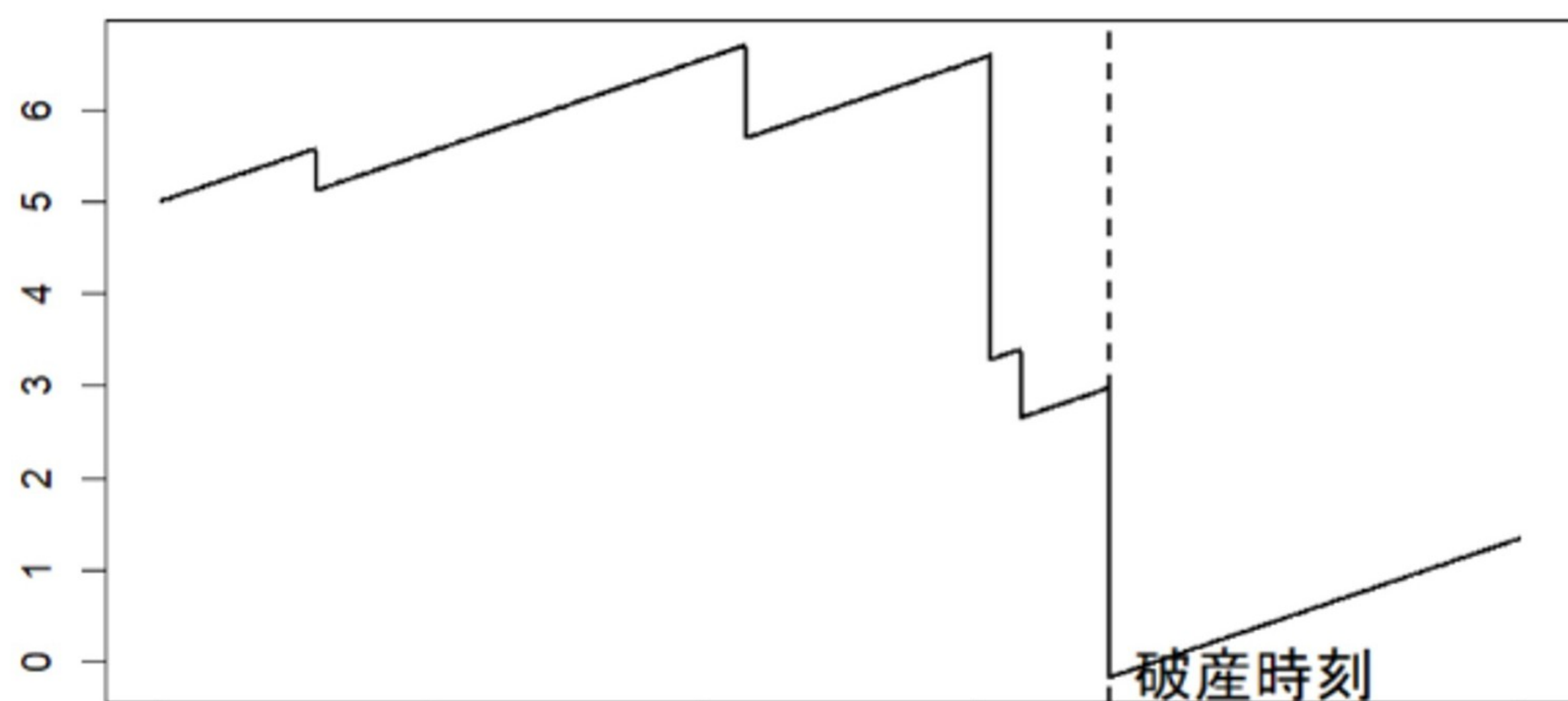


Poisson過程

2. Lévy過程の数理モデル

Cramér-Lundberg過程：保険会社の総資産モデル。

顧客からの保険料徴収による線形増加と、事故の発生によるランダムな保険金請求での下方へのジャンプ。

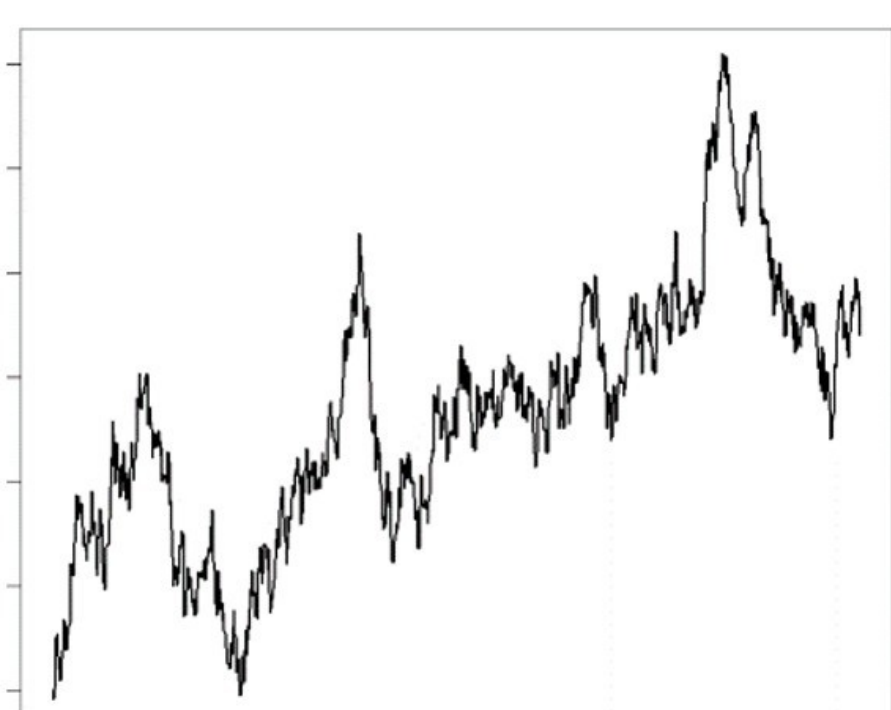


3. 条件付問題 (Conditioning)

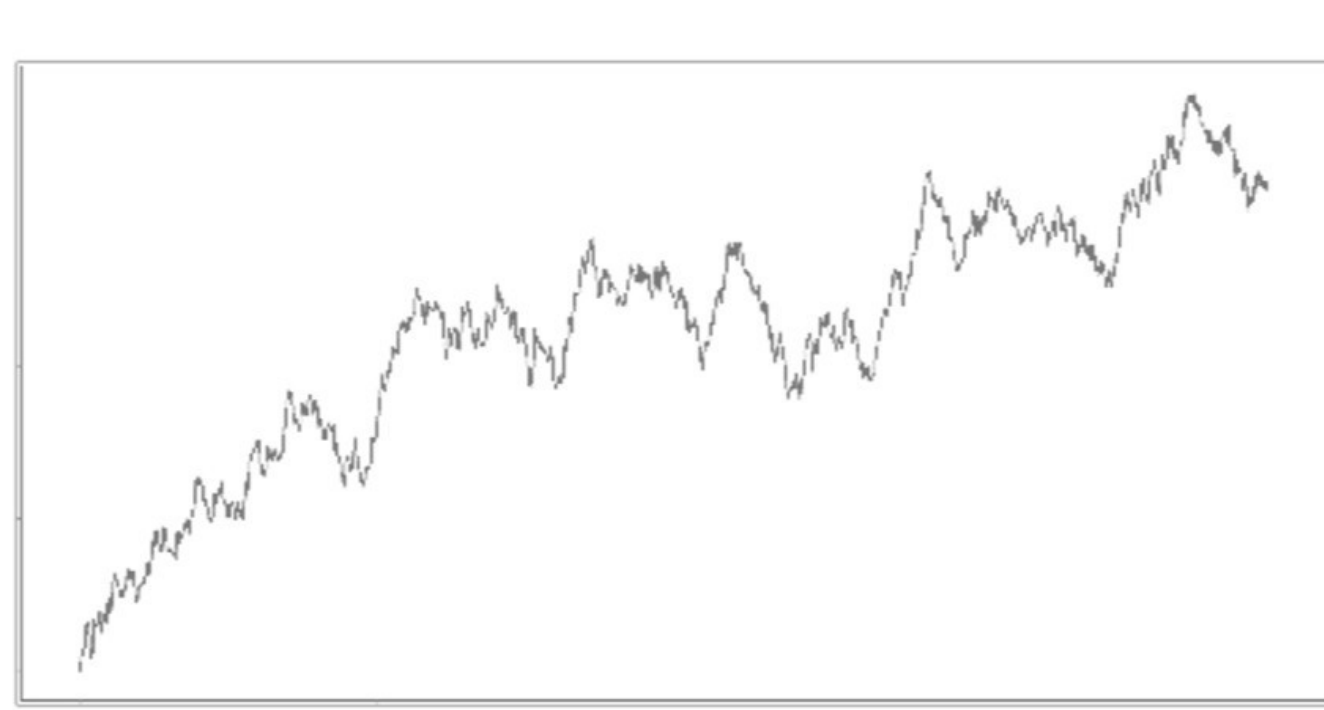
条件付問題：「特定の集合に行かないという条件」の下での確率過程のふるまいを考える問題。

確率過程	論文	回避集合
Brown運動	Knight (1969)	$\{0\}$
Lévy過程	Choumont-Doney (2005)	$(0, \infty)$
	Pantí (2017)	$\{0\}$
	Döring et al. (2019)	有界区間
	I. (2025+)	有界 F_σ -集合

「一点に行かない」という条件付問題



Brown運動



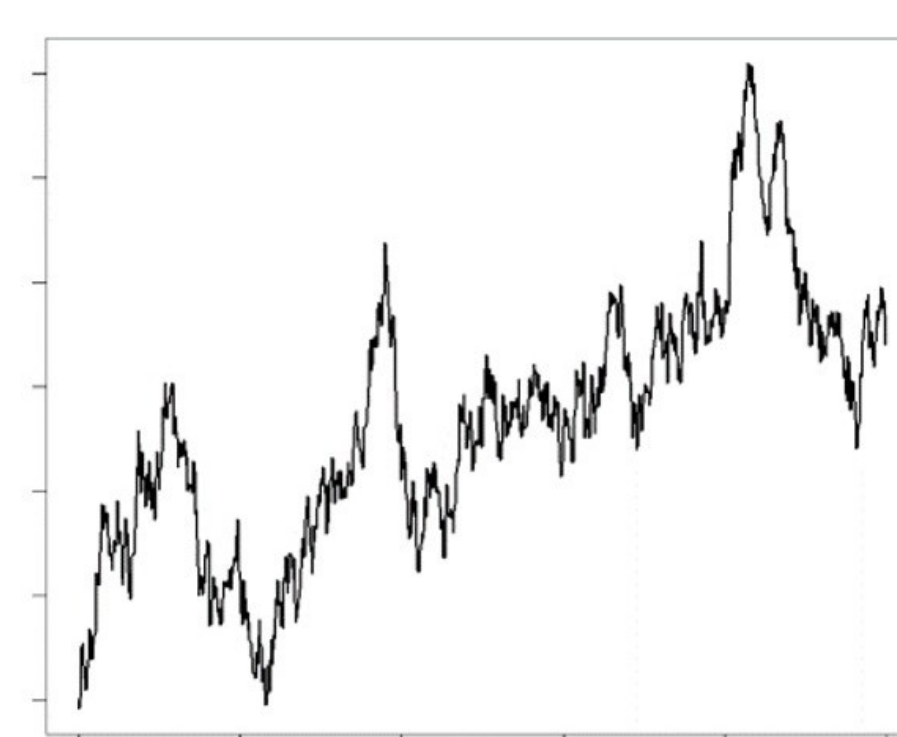
3次元Bessel過程

4. 処罰問題 (Penalization)

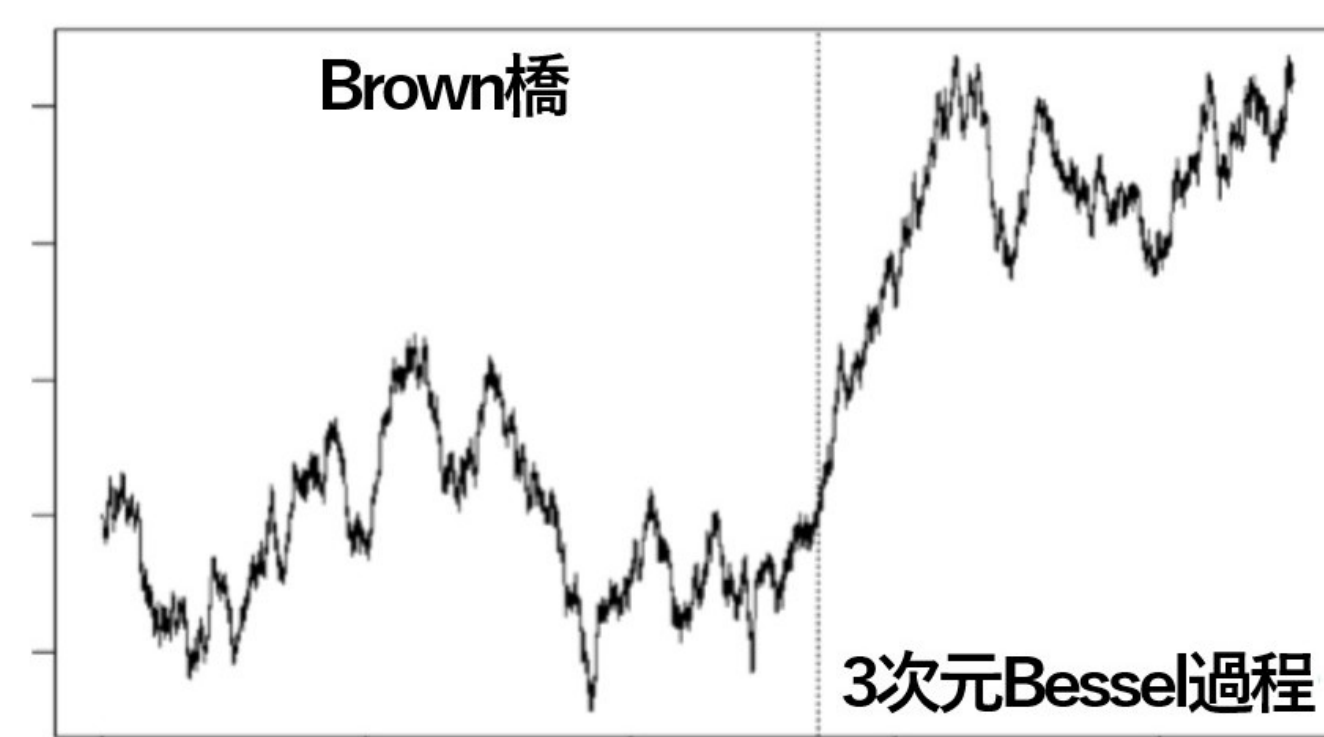
処罰問題：「特定の集合に行きづらいという条件」の下での確率過程のふるまいを考える問題。

確率過程	論文	処罰集合
Brown運動	Roynette et al. (2006)	一般
Random walk	Debs (2009)	一点
拡散過程	Salminen-Vallois (2009)	一点
Lévy過程	Takeda-Yano (2023)	一点
	I. (2025+)	有限点

「一点に行きづらくする」という処罰問題



Brown運動



Brown橋と3次元Bessel過程の連結

5. 厳密な主結果

以下を仮定：

- X は再帰的な1次元Lévy過程。
- X の特性指数 $\Psi(\lambda)$ は以下を満たす：

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{q + \Psi(\lambda)} \right| d\lambda < \infty.$$

この条件下で、以下が成立：

- 有界連続な q -resolvent density $r_q(x)$ をもつ。
- Renormalized zero resolvent $h(x)$ が定義できる：
$$h(x) := \lim_{q \rightarrow 0+} \{r_q(0) - r_q(-x)\}.$$
- $a \in \mathbb{R}$ での(連続な)局所時間 (L_t^a) が存在する。

Theorem (I. (2025+), arXiv: 2501.02776)

0を含む有界 F_σ -集合 A に対して、以下を定義：

$$\varphi_A(x) := h(x) - \mathbb{P}_x[h(X_{T_A})].$$

このとき、

$$\lim_{q \rightarrow 0+} \mathbb{P}_x(\Lambda | e_q < T_A) = \mathbb{P}_x \left[1_\Lambda \cdot \frac{\varphi_A(X_t)}{\varphi_A(x)} 1_{\{T_A > t\}} \right].$$

Theorem (I. (2025+), arXiv: 2507.00457)

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ に対して、以下を定義：

$$\Gamma_t^{(n)} := \exp \left(- \sum_{k=1}^n \lambda_k L_t^{a_k} \right),$$

$$\varphi_{\Gamma^{(n)}}(x) := \varphi_{\{a_1, \dots, a_n\}}(x) + \langle P_n(x), (\mathbb{E}_n - \mathbb{J}_n)^{-1} I_n \rangle.$$

このとき、

$$\lim_{q \rightarrow 0+} \frac{\mathbb{P}_x[F_t \cdot \Gamma_{e_q}^{(n)}]}{\mathbb{P}_x[\Gamma_{e_q}^{(n)}]} = \mathbb{P}_x \left[F_t \cdot \frac{\varphi_{\Gamma^{(n)}}(X_t)}{\varphi_{\Gamma^{(n)}}(x)} \Gamma_t^{(n)} \right].$$