

特異点付きアファイン極大曲面の特別なクラスと極小曲面論との関係 (arXiv:2507.10035)

松本 洵 (東京科学大学 理学院数学系数学コースD3)

(本研究は、JST次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2180の支援を受けたものです。)

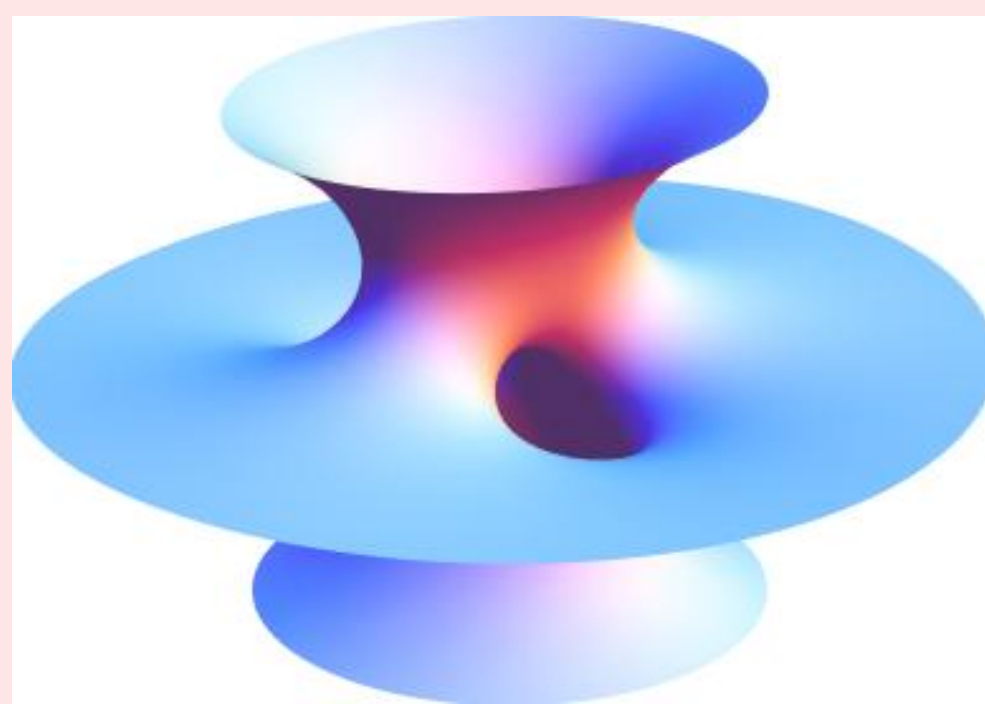
極小曲面とWeierstrassの表現公式

極小曲面 (極小はめ込み) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 平均曲率が恒等的に0である曲面。

$\rightsquigarrow$ 石鹸膜の数学的モデル。



カテノイド (懸垂面)



Costa 曲面 (Costa (1984))

((共形)極小はめ込みのWeierstrassの表現公式)

$$f = \text{Re} \int (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad (\Sigma : \text{Riemann面}). \quad (1)$$

Σ 上の有理型関数 g と正則1次微分形式 ω は周期条件+ α を満たす:

$$\text{周期条件:} \quad \text{Re} \int_c (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega = 0 \quad (\forall c \in H_1(\Sigma, \mathbf{Z}))$$

$\rightsquigarrow$ 複素解析と極小曲面論が結びつき、

多くの大域的な(完備, 有限全曲率な曲面の)性質や例が明らかになった。

$\rightsquigarrow$ このタイプの表現公式を持つ他の曲面について調べる。

アファイン極大曲面

- (局所強凸な) **アファイン極大曲面 (はめ込み)**
- アファイン極大曲面 $\iff$ アファイン平均曲率が恒等的に0 (Blaschke (1923)).
 $\rightsquigarrow$ ユークリッド空間内の極小曲面のアファイン微分幾何的類似物。
- アファイン極大曲面は局所的に次を満たす関数 $\varphi(x, y)$ のグラフで表される:

$$\varphi_{yy}\rho_{xx} - 2\varphi_{xy}\rho_{xy} + \varphi_{xx}\rho_{yy} = 0, \quad \rho := (\det(\text{Hess } \varphi))^{-3/4}. \quad (2)$$

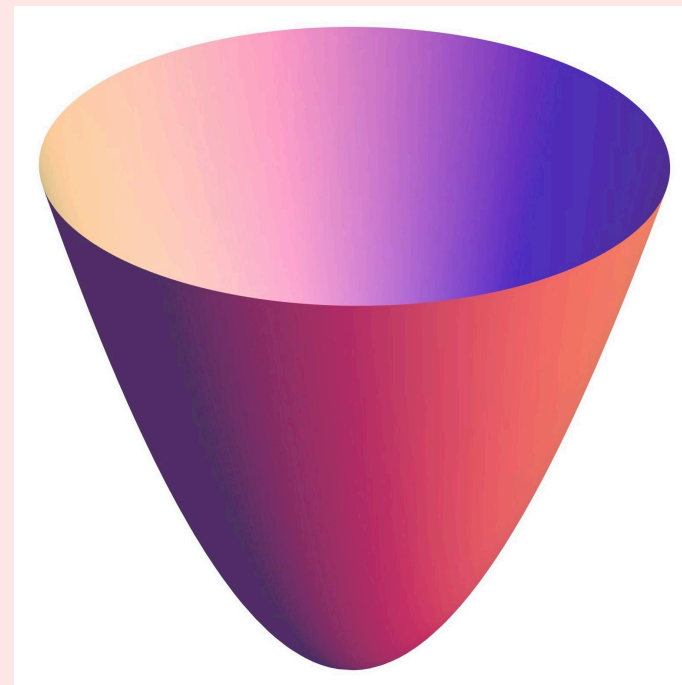
- Weierstrass型の表現公式がある。

- アファインBernsteinの定理

(Calabi (1958, 1982), Trudinger-Wang (2000), Li-Jia (2001))

「 $\mathbf{R}^3$ 内の“アファイン完備”なアファイン極大曲面は楕円放物面に限る」

$\rightsquigarrow$ アファイン極大曲面の大域理論においては特異点を許容する。



楕円放物面; $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

定義 1 (Aledo-Martínez-Milán (2009, 2011))

Σ : Riemann面, $\Phi : \mathbf{C}^3$ に値をとり Σ 上正則で以下の周期条件を満たす:

$$(1) N := \Phi + \bar{\Phi} \text{が1価}, \quad (2) \text{Re} \left(i \int_c (\Phi + \bar{\Phi}) \times d\Phi \right) = 0 \quad (\forall c \in H_1(\Sigma, \mathbf{Z})).$$

$$\rightsquigarrow \quad \psi := \text{Re} \left(i \int (\Phi + \bar{\Phi}) \times d\Phi \right) : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を**アファイン極大写像**とよび, N を**余法線写像**とよぶ。

Φ をアファイン極大写像の**Weierstrassデータ**とよぶ。

$\rightsquigarrow$ **完備** (かつ**regular**)アファイン極大写像の研究。

アファイン極大曲面の難しさ

- (解析学的な難しさ)
アファイン極大曲面の方程式(2)が高階 (極小曲面は2階楕円型)
- (**周期問題**) 与えられた Φ が周期条件を満たすか?:
 - 3つの複素関数の組 Φ が Σ 上1価とは限らない。
 - $(\Phi + \bar{\Phi}) \times d\Phi$ が Σ 上正則(有理型)でなく, しかも煩雑。
 $\rightsquigarrow$ これらが原因で周期問題を解くのが難しい。
- “Gauss写像”を Σ 上の有理型関数とみなす方法が知られていない。

$\rightsquigarrow$ アファイン極大写像のサブクラスを考える。

非固有アファイン球面

アファイン極大曲面の方程式(2)の自明な解:

$$\text{Hess } \varphi(x, y) = \varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 = 1$$

定義 2 (Martínez (2005))

Σ : Riemann面, $(F, G) : \Sigma \rightarrow \mathbf{C}^2$: 次の**周期条件**を満たす正則曲線

$$\text{周期条件:} \quad \text{Re} \int_c FdG = 0 \quad (\forall c \in H_1(\Sigma, \mathbf{Z})).$$

$$\psi := \left(\bar{F} + G, \frac{1}{2}(|G|^2 - |F|^2) + \text{Re} \left(GF - 2 \int FdG \right) \right) : \Sigma \rightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$$

を**非固有アファイン波面**とよぶ $\rightsquigarrow$ 特異点付き非固有アファイン球面

問. 非固有アファイン波面以外の“良い”性質を持つサブクラスは?

定義 3 (M)

$\psi : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$: アファイン極大写像, $N : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$: 余法線写像

ψ が**アファイン極大面** $\iff N$ が共形(極小)はめ込み。

- N が共形極小はめ込み $\Rightarrow N$ が(1)で表される:

$$N = \Phi + \bar{\Phi} = \text{Re} \int (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega, \quad \Phi = \frac{1}{2} \int (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega$$

- “Gauss写像” ν が立体射影 $\Pi : S^2 \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ で g と同一視できる:

$$\nu := \frac{N_z \times N_{\bar{z}}}{|N_z \times N_{\bar{z}}|} = \left(\frac{2 \text{Re}(g)}{1 + |g|^2}, \frac{2 \text{Im}(g)}{1 + |g|^2}, \frac{-1 + |g|^2}{1 + |g|^2} \right) = \Pi^{-1} \circ g$$

定理 4 (アファイン極大面のOsesrman型の不等式 (M))

アファイン極大面 $\psi : \Sigma = \bar{\Sigma}_\gamma \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbf{R}^3$

($\bar{\Sigma}_\gamma$: 種数 γ のコンパクトRiemann面)が

「弱完備 かつ 有限全曲率」特に「完備かつregular」ならば次が成立:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_\Sigma K_{d\sigma^2} dA_{d\sigma^2} = 2 \deg(g) \geq -\chi(\bar{\Sigma}_\gamma) + 2n \quad (\text{積分: 全曲率}).$$

さらに, 「完備かつregular」ならば “=” $\iff$ すべてのエンドが埋め込み。

定理 5 (M)

完備アファイン極大面が非固有アファイン波面 $\iff$ それが楕円放物面。

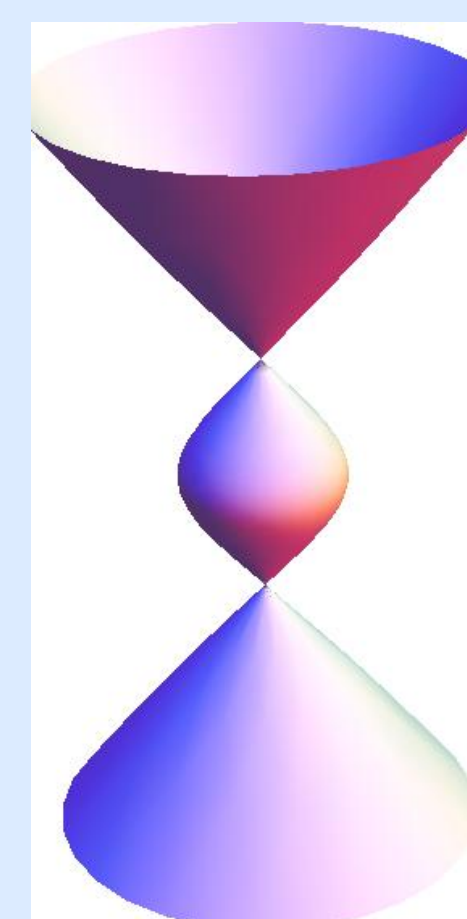
例 6 (M)

- (カテノイド型): $\Sigma = \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $g = z$, $\omega = \frac{dz}{z^2}$.
- (Enneper曲面型): $\Sigma = \mathbf{C}$, $g = z$, $\omega = dz$.
- (極小Möbiusの帯型 (Meeks (1981))):

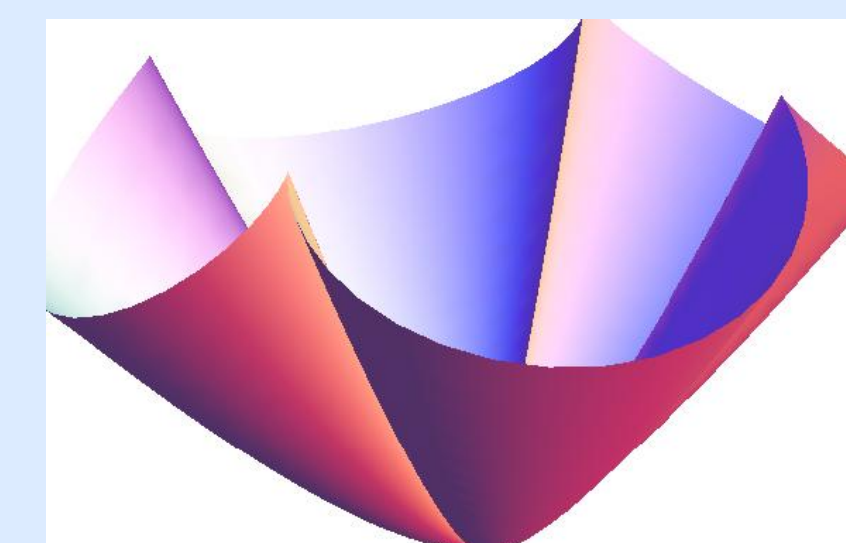
$$\Sigma = \mathbf{C} \setminus \{0\}, \quad g = z^2 \frac{z+1}{z-1}, \quad \omega = i \frac{(z-1)^2}{z^4} dz.$$

- Miyaoka-Sato (1994)型 ($\rightsquigarrow$ 任意の全曲率を持つ曲面が存在):

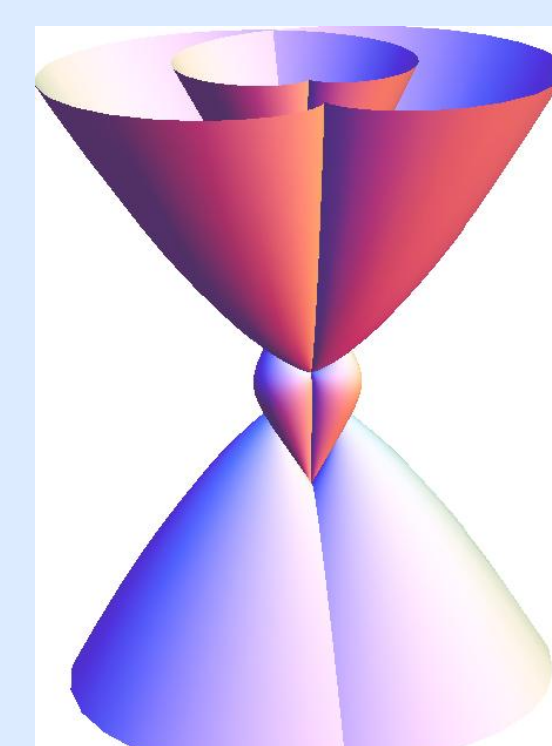
$$\Sigma = \mathbf{C} \setminus \{0\}, \quad g = \frac{z^n - a}{z^n - 1}, \quad \omega = \frac{(z^n - 1)^2}{z^m} dz$$



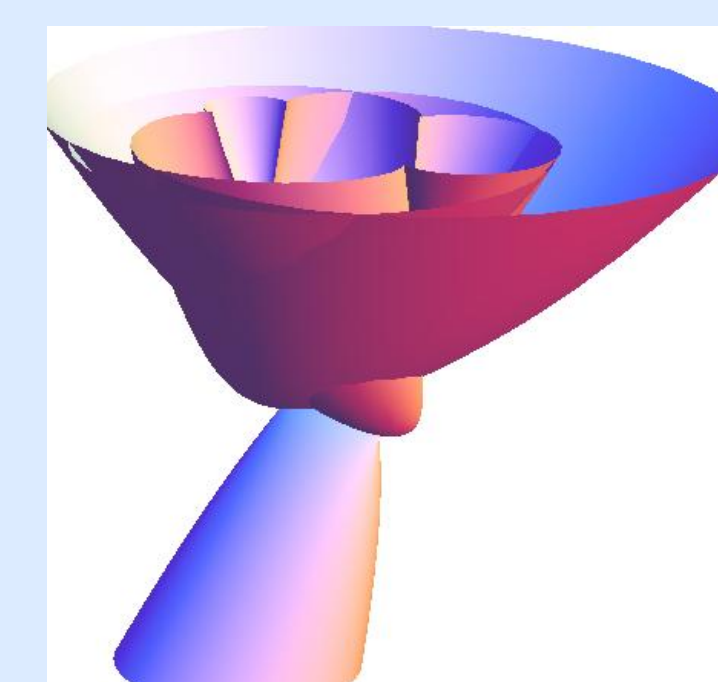
カテノイド型



Enneper曲面型



極小Möbiusの帯型



M-S型

(今後の展望)

問. 正の種数の (resp. irregularな) 完備アファイン極大写像はあるか?

- 非固有アファイン波面 $\Rightarrow$ **Yes** (Martínez (2005), M (2024)) (resp. **No**).

- 非固有アファイン波面以外 $\Rightarrow$ **Unknown**.