半群理論を用いた
分布型遅延項をもつバーガーズ方程式の研究

小川実里 (お茶の水女子大学 / 理研 AIP)
joint work with 久保隆徹 (お茶の水女子大学)

時間遅れを持つ交通流の数理モデル [Kubo, Ueda 2022 [1]]

- $t > 0$: 時間
- $x \in \mathbb{R}$: 車の位置
- $\rho = \rho(t,x)$: 車の密度
  (未知関数)
- ν, V_m, ρ_m : 正定数
- $q = q(t,x)$: 車の流量.

運転手が混雑状況を把握してから車の速度を調整するまでの
時間遅れを考慮するため, 次を仮定する:

$$v(t,x) = V_m\left(1 - \frac{\rho(t-\tau)}{\rho_m}\right) - \frac{\nu}{\rho}\partial_x\rho,$$

$$q = \rho v = \rho\left\{V_m\left(1 - \frac{\rho(t-\tau)}{\rho_m}\right) - \frac{\nu}{\rho}\partial_x\rho\right\}.$$

が成り立ち, 交通流の保存則

$$\partial_t\rho + \partial_x q = 0,$$

に代入することで時間遅れをもつ交通流の数理モデルを得る:

$$\begin{cases} \partial_t\rho - \nu\partial_x^2\rho + \partial_x(\rho V(\rho_\tau)) = 0 & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ \rho(\theta, x) = \rho_0(\theta, x) & -\tau \le \theta \le 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{(DE)}$$

- $\rho_\tau(t,x) = \rho(t-\tau, x)$,
- $V(\rho)$: 与えられた C^1 級関数,
- $\rho_0(\theta,x)$: $-\tau \le \theta \le 0$ を満たす θ に対して与えられた関数.

[Kubo, Ueda 2022 [1]] では, (DE)に対する一意解
$\rho \in C([-\tau,\infty] : H^1)$ がアプリオリ評価から得られ,

$$\|\rho(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^\infty \left(\|\partial_t\rho(s)\|_{L^2}^2 + \|\partial_x\rho(s)\|_{H^1}^2\right) ds \le C_0(1 + I_0^4)I_0^2$$

を満たす.
C_0 は τ に依存しない正定数で, I_0 は ρ_0 と τ に依存する正定数.

Remark

- $V_m\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$:
  交通量が増える (減る) と車は速度を下げる (上げる)
- $-\frac{\nu}{\rho}\partial_x\rho$: 車の前方が
  混雑している (空いている) と車は速度を下げる (上げる)

問題

次の時間遅れをもつバーガーズ方程式を考える.

$$\begin{cases} \partial_t\rho - \nu\partial_x^2\rho + \partial_x\left\{\rho\left(1 - \int_{t-\tau}^t f(t-s)\rho(s)\,ds\right)\right\} = 0 & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ \rho(\theta,x) = \rho_0(\theta,x) & -\tau \le \theta \le 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{(OP)}$$

ただし,
- $\rho = \rho(t,x)$: 未知関数
- $\tau > 0$: 時間遅れのパラメータ
- ν : 正定数
- f : 重み関数, $\int_0^\tau |f(t)|dt =: M_f < \infty$
- $\rho_0(\theta,x)$: $-\tau \le \theta \le 0$ に対して与えられた重み関数

積分方程式の導出 [Bátkai, Sussana 2005 [2]]

$$z(t,\theta,x) := \rho(t+\theta, x).$$

(OP)に代わり, 次の方程式を考える (P) :

$$\begin{cases} \partial_t\rho - \nu\partial_x^2\rho + \partial_x\left\{\rho\int_{-\tau}^0 f(-\theta)z(t,\theta)\,d\theta\right\} = 0 & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t z = \partial_\theta z & -\tau \le \theta \le 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ \rho(\theta,x) = \rho_0(\theta,x) & -\tau \le \theta \le 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

$$\partial_t\begin{pmatrix}\rho \\ z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\nu\partial_x^2 & 0 \\ 0 & -\partial_\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\partial_x\{\rho(t)V(z)(t)\} \\ 0\end{pmatrix}$$

ただし, $V(z)(t) = \int_{-\tau}^0 f(-\theta)z(t,\theta)\,d\theta$.
微分作用素に対する半群 $\mathcal{T}_0(t)$ が生成されると知られており,
(P)に対応する積分方程式は以下の(IE)のように与えられる :

$$\begin{pmatrix}\rho \\ z\end{pmatrix} = \mathcal{T}_0(t)\begin{pmatrix}\rho(0) \\ z(0)\end{pmatrix} - \int_0^t \mathcal{T}_0(t-s)\begin{pmatrix}\partial_x\{\rho(s)V(z)(s)\} \\ 0\end{pmatrix} ds. \qquad \text{(IE)}$$

$\mathcal{T}_0(t)$ の定義 [Bátkai, Sussana 2005 [2]]

ここで, $\mathcal{T}_0(t) = \begin{pmatrix}S(t) & 0 \\ S_t & T_0(t)\end{pmatrix}$ は以下で与えられる :

- $\{S(t)\}_{t\ge0}$ は $-\nu\partial_x^2 + \partial_x$ によって生成される半群,
- $S_t : H^1$ から $C([-\tau,0] : H^1)$ への作用素;
  $$(S_t x)(\theta) = \begin{cases} 0 & (t+\theta \le 0) \\ S(t+\theta)x & (t+\theta > 0) \end{cases},$$
- $\{T_0(t)\}_{t\ge0}$: $C([-\tau,0] : H^1)$ 上のべき零左シフト半群 i.e.,
  $$T_0(t)z(0,\theta) = \begin{cases} z(0,t+\theta) & (t+\theta \le 0) \\ 0 & (t+\theta > 0) \end{cases}.$$

時間大域解の存在と一意性

τ は正定数, K_0 は τ に依存しないある正定数とする.
初期履歴 $\rho_0 \in C([-\tau,0] : H^1)$ が,

$$\rho_0(0) \in L^1, \quad M_f(1+\tau)\left(\|\rho_0(0)\|_{L^1} + \sup_{-\tau\le\theta\le0}\|\rho_0(\theta)\|_{H^1}\right) \le K_0$$

を満たせば, (P)は一意解 $\rho(t) \in C([-\tau,\infty) : H^1)$ をもち,
$t > 0$ に対して以下を満たす:

$$\|\rho(t)\|_{L^1} \le C, \quad \|\rho(t)\|_{L^2} \le C(1+2\nu t)^{-\frac{1}{4}}, \quad \|\partial_x\rho(t)\|_{L^2} \le C(1+2\nu t)^{-\frac{3}{4}}.$$

ただし, C はある正定数.

- $C = \mathcal{O}(\nu^{-1})$ $(\nu \to 0)$,
- 重み関数により初期履歴に関する条件が変わる.

参考文献

[1] Takayuki Kubo and Yoshihiro Ueda. Existence theorem for global in time solutions to Burgers equation with a time delay. *Journal of Differential Equations*, 333:184–230, (2022).

[2] András Bátkai and Susanna Piazzera. *Semigroups for delay equations*. AK Peters/CRC Press, (2005).

[3] Takayuki Kubo and Yoshihiro Ueda. Large time behavior of solutions to burgers equation with a time delay. *Communications in Mathematical Analysis and Applications*, Vol.4, Iss.3:392–418, (2025).

g2570604@edu.cc.ocha.ac.jp