異分野異業種研究交流会2025

粘性表面準地衡方程式の解の一意性

*岡崎 大輝 (東北大学大学院 理学研究科 数学専攻 D1)
岩渕 司 (東北大学大学院 理学研究科)

導入

表面準地衡方程式

$$\begin{cases} \partial_t\theta + \Lambda^\alpha\theta + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\theta = 0, & t>0, x\in\mathbb{R}^2, \\ \mathbf{u} = \nabla^\perp\Lambda^{-1}\theta, & t>0, x\in\mathbb{R}^2, \\ \theta(0,x) = \theta_0(x), & x\in\mathbb{R}^2. \end{cases} \quad \text{(SQG)}$$

$\Lambda^\alpha\theta = (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\theta = \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^\alpha\widehat{\theta}(\xi)]$: 分数冪ラプラシアン,
$(0<\alpha\le 2)$, $\nabla^\perp = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$, $\nabla^\perp\Lambda^{-1}$: Riesz変換.

方程式の物理的背景

θ : 流体のポテンシャル温度, $\mathbf{u}$: 流体の速度場.
地球上の中緯度帯, 大きい空間スケール ➡ 準地衡近似,
地球表面に制限 ➡ 表面準地衡方程式,
境界における摩擦の影響(Ekman層)
➡ 分数冪ラプラシアン $(\alpha = 1, \Lambda)$.

関数空間の定義

定義(非斉次Besov空間)

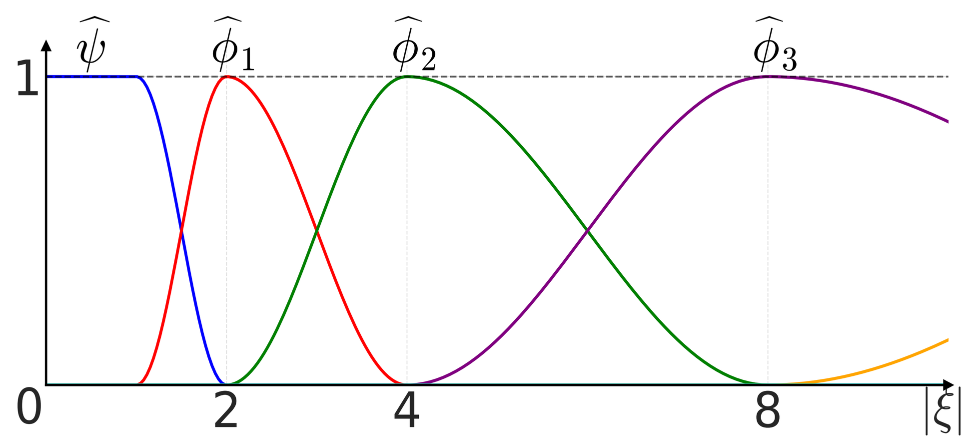
$s\in\mathbb{R}$, $1\le p,q\le\infty$ とする. 非斉次Besov空間 $B^s_{p,q}$ を以下で定義する.

$$B^s_{p,q} = B^s_{p,q}(\mathbb{R}^2) := \{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) \mid \|f\|_{B^s_{p,q}} < \infty\}.$$

ここで,

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} := \|\psi * f\|_{L^p} + \left\|\left\{2^{sj}\|\phi_j * f\|_{L^p}\right\}_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{l^q}$$

である. また, $\{\psi\}\cup\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ はLittlewood-Paleyの2進単位分解であり, そのFourier変換 $\widehat{\psi}$, $\widehat{\phi}_j$ の概形は以下である.



注意

- s: 正則性指数, p: 可積分性指数, q: 補間指数.
- $B^s_{p,1}\subset W^{s,p}\subset B^s_{p,\infty}$.
- 方程式の初期値問題の適切性の観点から, $s = 1-\alpha+2/p$ のとき $B^{1-\alpha+\frac{2}{p}}_{p,q}$ は(SQG)に対するスケール臨界空間であると呼ばれる.

解の定義(軟解)

$T>0$, $0<\alpha\le 2$, $1\le p,q\le\infty$, $\theta_0\in B^{1-\alpha+\frac{2}{p}}_{p,q}$ とする.
関数 $\theta : [0,T]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が(SQG)の軟解であるとは, 以下がすべての $t\in[0,T]$ と急減少関数 $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ に対して成り立つことをいう.

$$\begin{cases} \theta\in C([0,T];B^{1-\alpha+\frac{2}{p}}_{p,q}), \\ \mathbf{u}\theta = (\nabla^\perp\Lambda^{-1}\theta)\theta\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2), \\ {}_{\mathcal{S}'}\langle\theta(t),\phi\rangle_{\mathcal{S}} = {}_{\mathcal{S}'}\langle e^{-t\Lambda^\alpha}\theta_0,\phi\rangle_{\mathcal{S}} + {}_{\mathcal{S}'}\left\langle\int_0^t e^{-(t-s)\Lambda^\alpha}(\mathbf{u}\theta)\,\mathrm{d}s, \nabla\phi\right\rangle_{\mathcal{S}}. \end{cases}$$

ここで, $e^{-t\Lambda^\alpha}\theta_0 = \mathcal{F}^{-1}[e^{-t|\xi|^\alpha}\widehat{\theta}_0(\xi)]$ は分数冪ラプラシアンから生成される半群である.

参考文献
[1] L. C. F. Ferreira, Commun. Math. Sci. **9** (2011), no. 1, 57-62.
[2] T. Iwabuchi and T. Okazaki, Commun. Math. Sci. **23** (2025), no. 4, 935-946.
[3] T. Iwabuchi and R. Ueda, Partial Differ. Equ. Appl. **5** (2024), no. 5, Paper No. 29, 9.
[4] H. Wang and Z. Zhang, Comm. Math. Phys. **301** (2011), no. 1, 105-129.

解の一意性

Q. 与えられた初期値に対する(SQG)の解は, 初期値と同じ関数空間において一意に定まるか?

解の存在証明 ➡ 滑らかな解を見つける.
(例: $\theta_0\in L^2$ に対して $\theta\in C([0,T];L^2)\cap L^2(0,T;\dot{H}^1)$.)
$L^2(0,T;\dot{H}^1)$: 非線形項 $((\mathbf{u}\cdot\nabla)\theta)$ の構造による正則性条件.
滑らかな解の存在 + 広い関数空間での解の一意性
➡ 解は滑らかになる. (正則性条件は自然と満たされる.)

先行研究

解の一意性

Ferreira [1] $1<\alpha<2$, $C([0,T];L^{\frac{2}{\alpha-1}})$.
岩渕–上田 [3] $\alpha=2$, $C([0,T];L^2)$.
岩渕–岡崎 [2] $\alpha=1$, $C([0,T];\dot{B}^0_{\infty,1})$.

解の存在

Wang–Zhang [4] $0<\alpha\le 1$,
$L^\infty(0,T;B^{1-\alpha}_{\infty,\infty})\cap\widetilde{L}^1(0,T;B^1_{\infty,\infty})$. (小さい初期値と解)

注意

1. $1<\alpha\le 2$ かつ $p\ge 2/(\alpha-1)$ のとき, 次が成り立つ.
$L^{2/(\alpha-1)}\subset B^0_{2/(\alpha-1),\infty}\subset B^{1-\alpha+2/p}_{p,\infty}\subset B^{1-\alpha}_{\infty,\infty}$.
2. $\dot{B}^0_{\infty,1}\subset L^\infty\subset B^0_{\infty,\infty}$.

今回の主目的

1. $1<\alpha\le 2$ のとき, $C([0,T];B^{1-\alpha+\frac{2}{p}}_{p,\infty})$ $(p\ge 2/(\alpha-1))$ における軟解の一意性. (正則性指数が負の空間)
2. $0<\alpha\le 1$ のとき, $C([0,T];B^{1-\alpha}_{\infty,\infty})$ における軟解の一意性. (正則性の仮定を課さない空間)

定理(岩渕–岡崎, arXiv: 2504. 21257)

$T>0$, $0<\alpha\le 2$ とする. このとき, (SQG)の軟解の一意性は以下の関数空間において成り立つ.

(1) $\frac{3}{2}<\alpha\le 2$, $p=\frac{4}{2\alpha-3}$ のとき, $C([0,T];B^{-\frac{1}{2}}_{p,\frac{p}{p-2}})$.

(2) $\alpha=\frac{3}{2}$ のとき, $C([0,T];B^{-\frac{1}{2}}_{\infty,1})$.

(3) $0<\alpha<\frac{3}{2}$ のとき, $C([0,T];B^{1-\alpha}_{\infty,\infty})$.

注意

$s<1/2$ のとき, $\mathbf{u}\theta = (\nabla^{\perp-1}\theta)\theta\notin\mathcal{S}'$ であるような $\theta\in B^s_{p,q}$ が存在する.

証明の概略 $(\alpha=2,\ \theta_0\in B^{-\frac{1}{2}}_{4,2})$

$\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$ を同じ初期値に対する(SQG)の軟解とし, その差を w とする. 次を示す: 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $0<T_\varepsilon\ll 1$ が存在して

$$\|w\|_{L^\infty(0,T_\varepsilon;B^{-\frac{1}{2}}_{4,2})}\le C\epsilon\|w\|_{L^\infty(0,T_\varepsilon;B^{-\frac{1}{2}}_{4,2})}.$$

上式から, $[0,T_\varepsilon]$ における解の一意性が導かれる. $[T_\varepsilon,T]$ における一意性についても, 軟解の時間に対する連続性を用いることで示すことができる. 上の評価を得るためには, 次の非線形項の評価が重要となる.

$$\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\Big(((\nabla^\perp\Lambda^{-1}\theta)\cdot\nabla)\theta\Big)\,\mathrm{d}s\right\|_{L^2(0,T;B^{-\frac{1}{2}}_{4,2})}$$

$$\le C\|((\nabla^\perp\Lambda^{-1}\theta)\cdot\nabla)\theta\|_{L^2(0,T;B^{-\frac{1}{2}-2}_{4,2})}\le C\|\theta\|_{L^\infty(0,T;B^{-\frac{1}{2}}_{4,2})}\|\theta\|_{L^2(0,T;B^{-\frac{1}{2}}_{4,2})}.$$