

特異点をもつ部分多様体の絶対全曲率

横浜国立大学 博士後期課程2年 山内 優太

問題

図形の凹凸具合を量るには？

曲面にはお椀のような出っ張った形状や、ポテトチップスのようなくびれたような形状のものが存在する。このような形状を数値として表すのに**ガウス曲率**が用いられる。

ガウス曲率

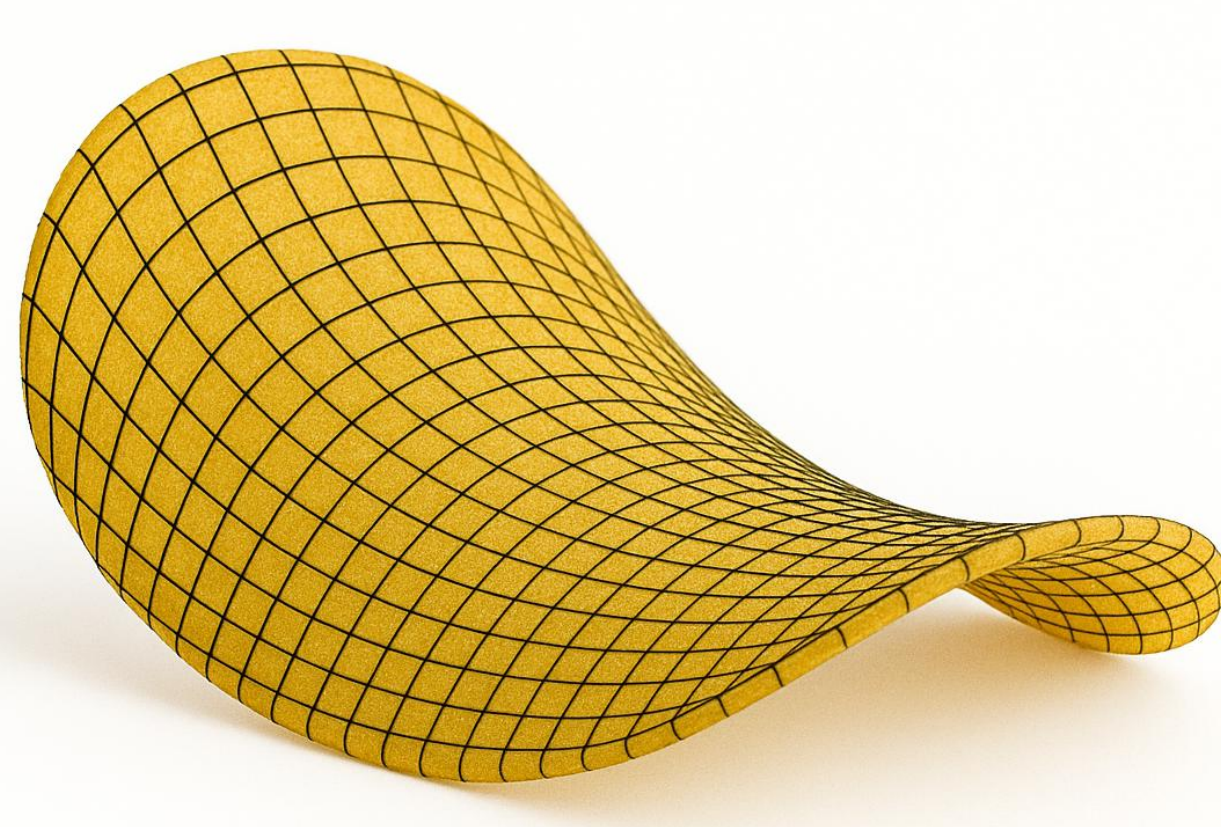
ガウス曲率 K とは曲面の各点での曲がり具合を表す値である。



$$K > 0$$

曲面は**お椀型**の形状

例：ボール、パラボラアンテナ



$$K < 0$$

曲面は**くびれた**形状

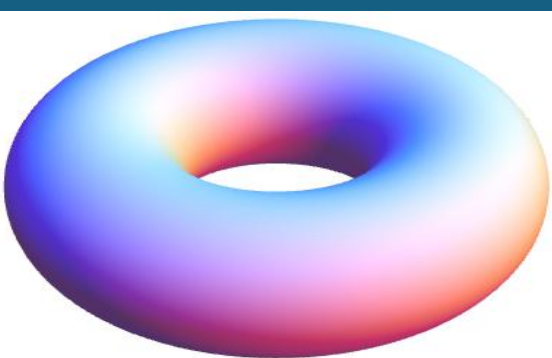
例：鞍、ポテトチップス

絶対全曲率

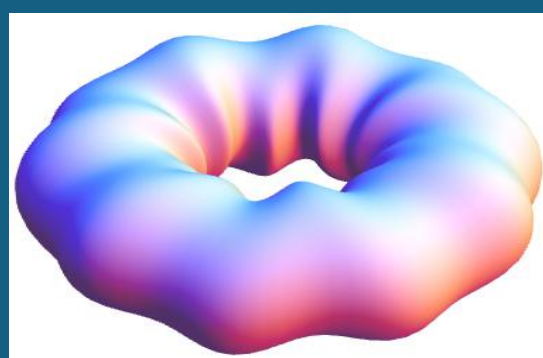
部分多様体 f 上でガウス曲率の絶対値を積分した量を絶対全曲率と呼ぶ。

$$\tau(f) = \frac{1}{\text{vol}(S^{n+r-1})} \int_B |K| d\mu$$

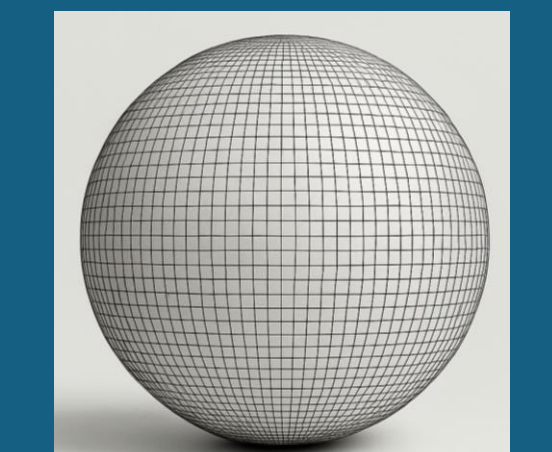
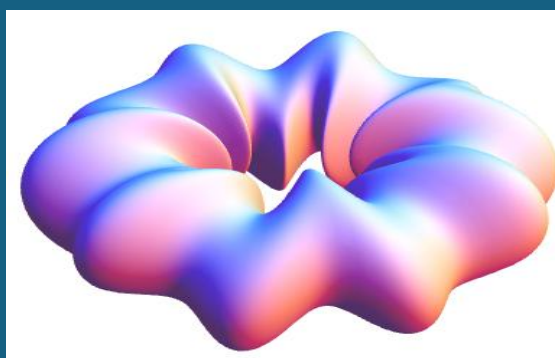
絶対全曲率 = 図形全体の凹凸の激しさ



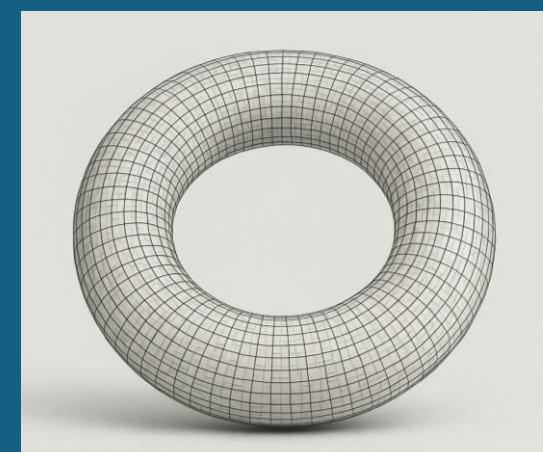
<



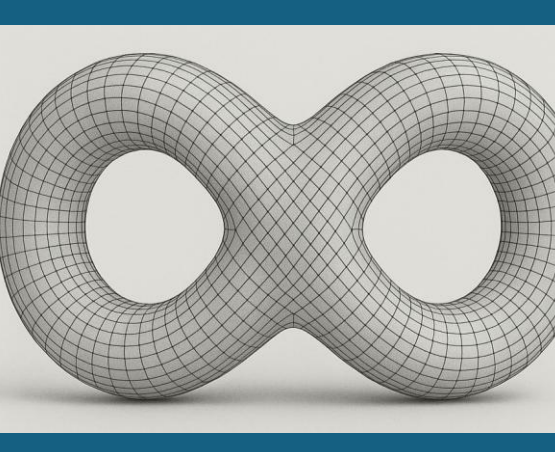
<



<



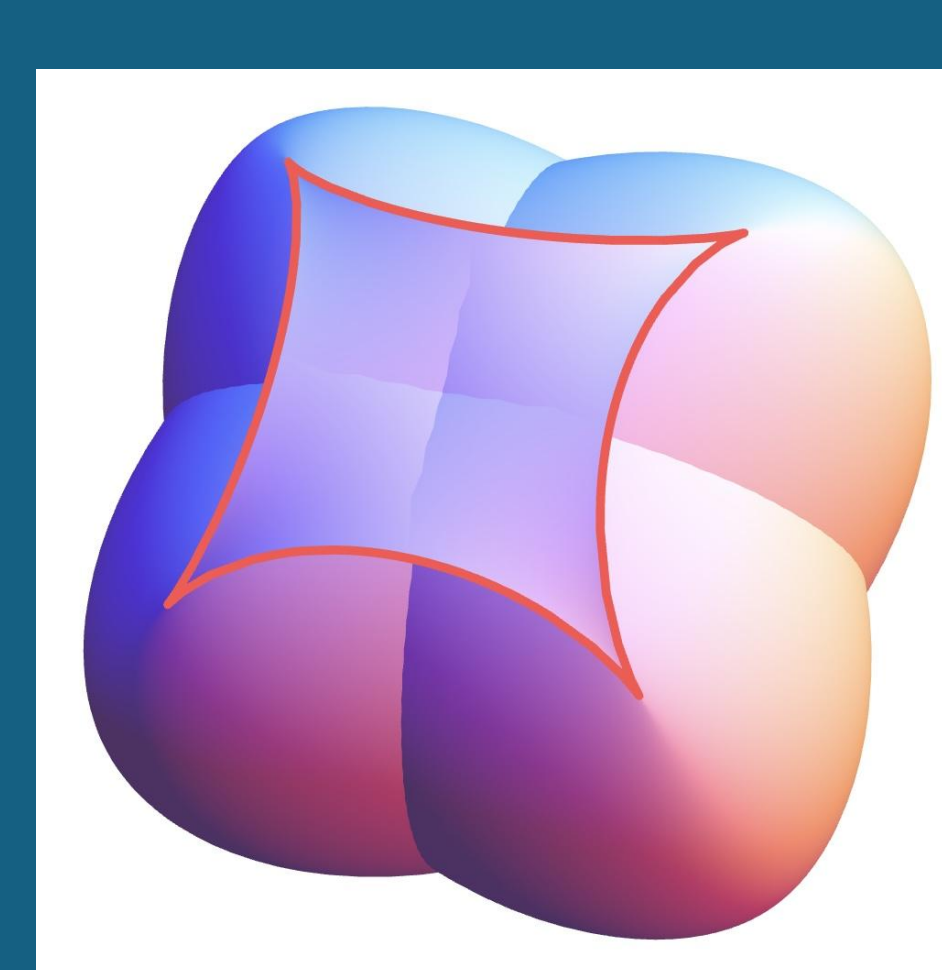
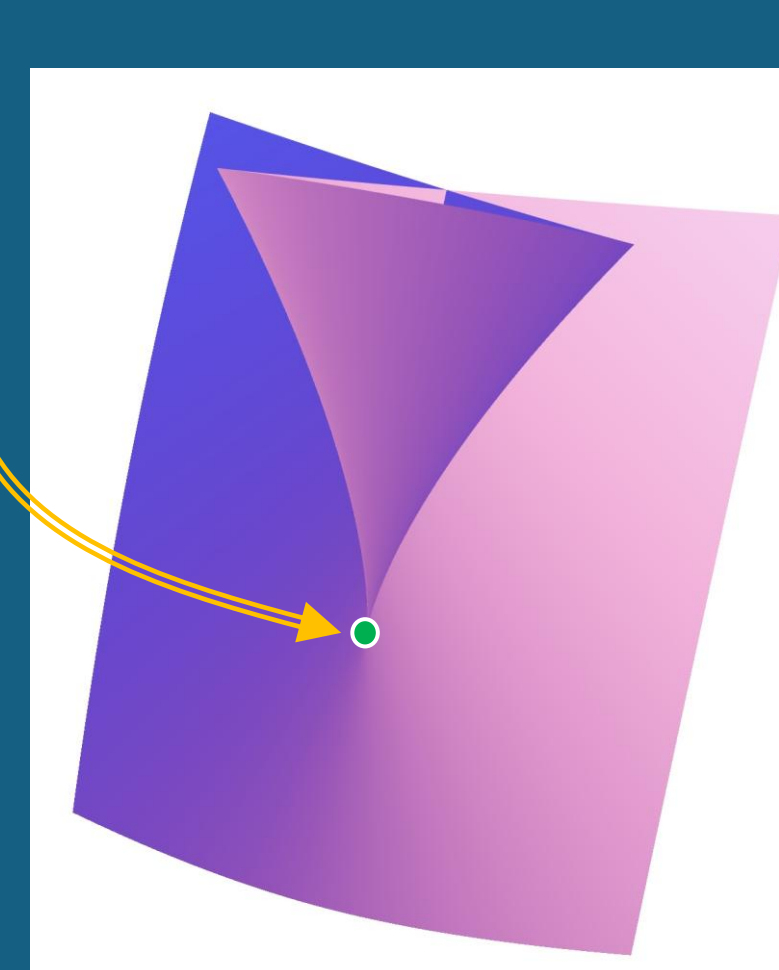
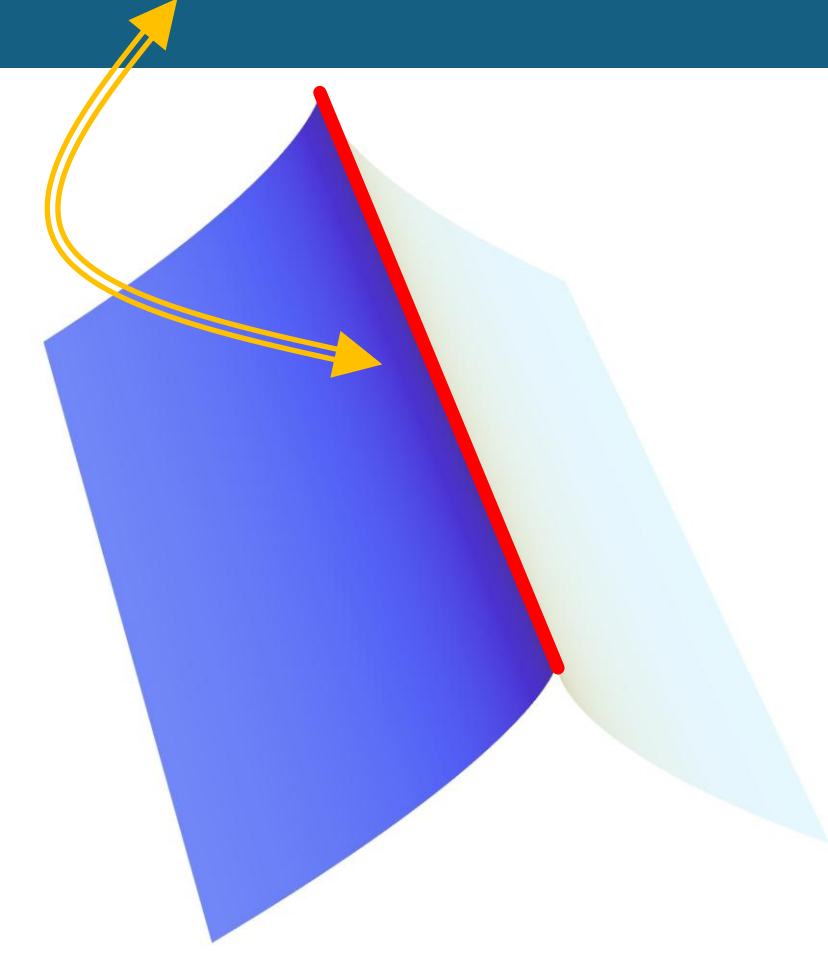
<



研究テーマ

特異点をもつ部分多様体に対しても Chern-Lashof の定理を拡張できるか

微分写像が退化する点を**特異点**と呼び、折り目や尖った点として現れることが多い



Kossowski-Scherfnerによる先行研究

3次元ユークリッド空間内の2次元波面に対し

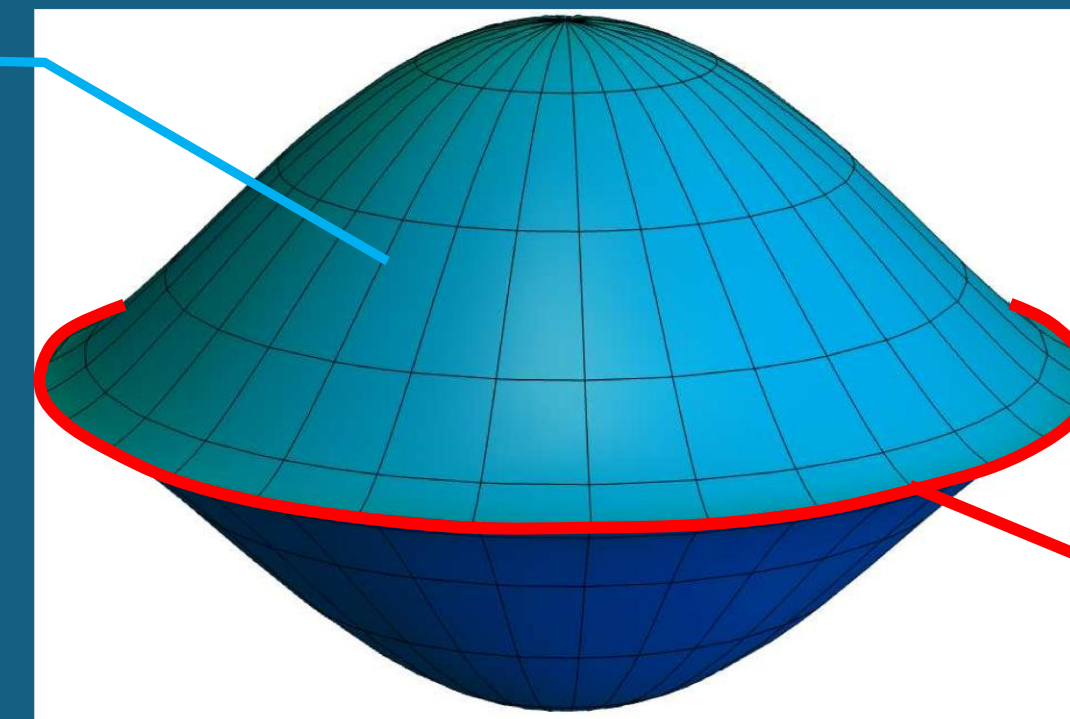
$$\tau(f) = \frac{1}{2\pi} \int_M |K| dA + \frac{1}{\pi} \int_\Sigma |\kappa| ds$$

と絶対全曲率は定義され、

$$\tau(f) \geq b_0 + b_1 + b_2$$

が成り立つ。

$$\int_M |K| dA$$



$$\int_\Sigma |\kappa| ds$$

定理 (Yamauchi)

$(n+r)$ 次元ユークリッド空間内の n 次元フロント $f: M^n \rightarrow R^{n+r}$ に対し

$$\tau(f) = \frac{1}{\text{vol}(S^{n+r-1})} \left(\int_B |K| d\mu + \int_{\bar{B}} |\bar{K}| d\bar{\mu} \right)$$

と絶対全曲率を定義する、この時

$$\tau(f) \geq b_0 + b_1 + \dots + b_n$$

が成り立つ。さらに、特異点がすべて第一種の場合

$$\tau(f) = 2 \Leftrightarrow$$

- ・ f が n 次元平面内の閉凸体
- ・ M と特異点集合 Σ がそれぞれ球面と同相
- ・ 特異点集合の像が f の像の境界と一致する

Chern-Lashofの定理

n 次元部分多様体 $f: M^n \rightarrow R^{n+r}$ に対し

$$\tau(f) \geq b_0 + b_1 + \dots + b_n$$

が成り立つ。さらに、

$$\tau(f) = 2 \Leftrightarrow f \text{ が } (n+1) \text{次元超平面内の凸超曲面}$$

絶対全曲率の最小性と凸性の関係も示されている

先行研究との比較

- ✓ 対象を**2次元**から **n 次元**へと拡張することに成功
- ✓ さらに、対象を**波面**から**フロント**へとより一般的なクラスに広げる
- ✓ その結果、 $\tau(f) = 2$ となるフロントを扱うことが可能になり、**絶対全曲率の最小性**と**凸性**の関係を解明することに成功した。