



走化性方程式の質量量子化

曾我 悠利

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻, D1

Email: sogayuri.q6@dc.tohoku.ac.jp

Keller-Segel方程式の有限時刻爆発解

VS

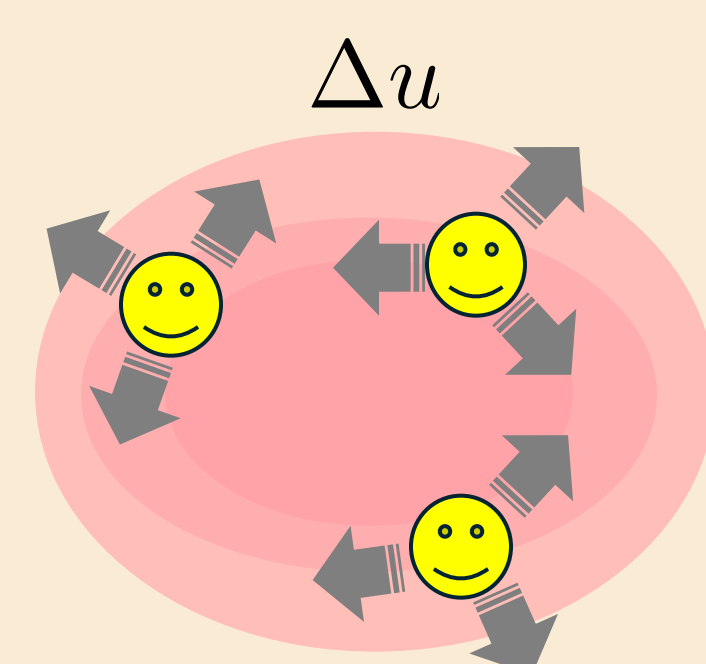
走化性方程式(P)の無限時刻爆発解

1. 導入

走化性と拡散現象

以下を満たす (u, w) を考える.

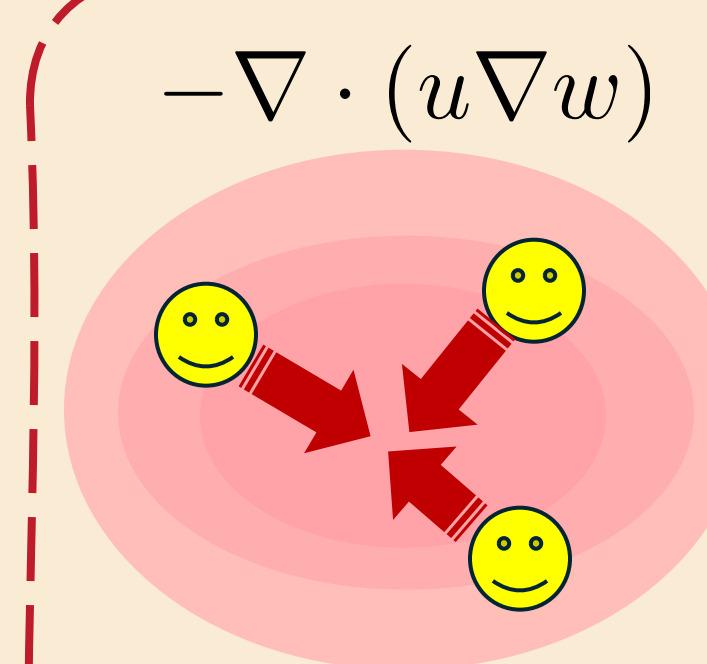
$$u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla w)$$



ランダム拡散

有界

VS



凝集

爆発

Keller-Segel 方程式

(モデル提唱: E. F. Keller, L. A. Segel [1])

$$(KS) \begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla w), \\ w_t = \Delta w - w + u. \end{cases}$$

有限時刻爆発解

$$T_{\max} < \infty,$$

$$\limsup_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty$$

類似点

質量保存則

$$\|u(t)\|_{L^1(\Omega)} = \|u_0\|_{L^1(\Omega)}$$

定常問題

エネルギー汎関数

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) \leq 0$$

考察する走化性方程式

(モデル提唱: X. Fu et al. [2])

$$(P) \begin{cases} u_t = \nabla \cdot (e^{-v} (\nabla u - u \nabla v)), \\ v_t = \Delta v - v + u. \end{cases}$$

無限時刻爆発解

$$T_{\max} = \infty$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty$$

(Fujie-Jiang [3])

2. 主結果

(P)の初期値境界値問題を考察する. ただし,

領域 $\Omega = B_R = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < R\}$ とし, 境界条件は0-ノイマン

境界条件を課す. また, 初期値は (u_0, v_0) とする.

定理1 (S.)

(u, v) を (P) の球対称な時間大域解とする. このとき, 以下は同値である.

(i) (u, v) が無限時刻爆発する.

(ii) $a > 1$ に対し, $\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} e^{av(x,t)} dx = \infty$.

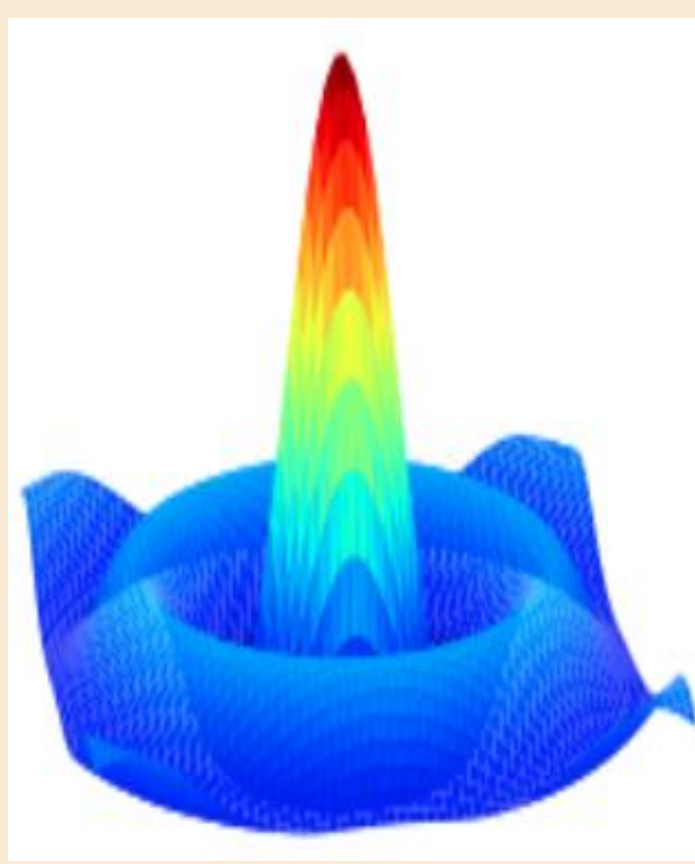
注意: (KS)の場合, 解が有限時刻爆発することと同値条件は

$$\limsup_{t \rightarrow T_{\max}} \int_{\Omega} u \log u dx = \infty$$

爆発解のより詳細な研究

質量保存則

右図のような解の凝集現象が期待される!!



$$(P) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) + \int_{\Omega} u e^{-v} |\nabla(\log u - v)|^2 dx + \|v_t\|_{L^2(\Omega)}^2 &= 0 \\ \mathcal{F}(t) &= \int_{\Omega} (u \log u - uv) dx + \frac{1}{2} (\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2) \end{aligned}$$

定理2 (S.)

初期条件 $\|u_0\|_{L^1(\Omega)} > 8\pi$ を課す. (P) の球対称な無限時刻爆発解 (u, v) が

$$\inf_{t \geq 0} \mathcal{F}(t) > -\infty, \quad (1)$$

を満たしてゐるならば, 増大列 $\{t_k\}$ が存在して, 次が成立する.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u(x, t_k) \xi(x) dx = \|u_0\|_{L^1(\Omega)} \xi(0).$$

3. 比較

	(P)	(KS)	(PE)
m	$m = \ u_0\ _{L^1(\Omega)} > 8\pi$	$m \geq 8\pi$ (Nagai-Senba-Suzuki [5])	$m = 8\pi$ (Senba-Suzuki [6])
$\mathcal{F}(t)$	$m = 8\pi$ のみ $\inf_{t \geq 0} \mathcal{F}(t) = -\infty$	$\inf_{t \geq 0} \mathcal{F}(t) > -\infty$ (Mizoguchi [4])	

(P)において, 質量量子化の爆発機構が実現されない可能性がある!!

4. 証明の概略

定理1

補題

$\int_{\Omega} u e^v dx \leq \varepsilon \implies$ 任意の $t \in (0, \infty)$ に対し,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u \log u) \varphi dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \varphi dx \\ + \frac{1}{4} \int_0^t e^{s-t} \int_{\Omega} e^{-v} \frac{|\nabla u|^2}{u} \varphi dx \leq C. \end{aligned}$$

ただし, $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^2)$ はテスト関数

r $x=0$

Sobolevの不等式により, 次の函数不等式を導く:

$$\int_{\Omega} u^2 \varphi dx \leq 2K^2 \int_{B_{2r}} u e^v dx \int_{\Omega} e^{-v} \frac{|\nabla u|^2}{u} \varphi dx + C \|u_0\|_{L^1(\Omega)}$$

時間大域的評価

質量保存則と $\Omega \setminus \{0\}$ 上での v の有界性

$$\sup_{t>0} \int_{B_r} u e^v dx \leq \varepsilon$$

補題と函数不等式

$$\sup_{t>0} \int_0^t e^{s-t} \int_{B_{2r} \setminus B_r} u^2 dx ds \leq C(r).$$

u に対する環状領域上での高い正則性

Moserの反復法により,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} e^{av(x,t)} dx < \infty \iff \sup_{t>0} \|u(t)\|_{L^\infty} < \infty.$$

定理2

★ (u, v) : $\Omega \setminus \{0\}$ 上でヘルダー連続

★ 仮定 (1)

$(u(t_k), v(t_k)) \rightarrow \exists (u_\infty, v_\infty)$ s.t.

$$u_\infty |\nabla(\log u_\infty - v_\infty)|^2 = 0 \text{ in } \Omega \setminus \{0\}$$

定理1 & Mizoguchi [4] & $\|u_0\|_{L^1(\Omega)} > 8\pi$

$\Omega \setminus \{0\}$ 上で $u_\infty \equiv 0$

参考文献

- E. F. Keller and L. A. Segel, J. Theoret. Biol. 26 (1970).
- X. Fu, L.-H. Tang, C. Liu, J.-D. Huang, T. Hwa, P. Lenz, Phys. Rev. Lett. 108 (2012).
- K. Fujie, J. Jiang, Calc. Var. 60 (92) (2021).
- N. Mizoguchi, SIAM J. Math. Anal. 52 (2020).

- T. Nagai, T. Senba, T. Suzuki, Hiroshima Math. J. 30 (2000).
- T. Senba, T. Suzuki, Asymptot. Anal. 32 (2002).
- T. Suzuki, Free energy and self-interacting particles, 2005.
- Y. Soga, Nonlinear Anal. RWA 88 (2026).