

## 平行円板間の層流に対する精度保証付き数値計算

### Numerical verification for fluid flow between parallel circular disks

渡部 善隆 (Yoshitaka Watanabe)<sup>1</sup>, Shuting Cai<sup>2</sup>

<sup>1</sup>九州大学 (Kyushu University), <sup>2</sup>Fujian Jiangxia University

e-mail : watanabe.yoshitaka.003@m.kyushu-u.ac.jp

Consider the steady laminar flow of an incompressible fluid between parallel circular permeable or impermeable disks. The distance between the disks is taken to be  $2h$  ( $h > 0$ ), and the radius of the disks is  $R > 0$ . We assume that an incompressible fluid extending beyond  $r = \pm R$  is confined between planes  $z = \pm h$  and that the lower disk is porous (permeable) and the upper disk is a porous or nonporous solid (impermeable). In the case of two porous disks, we also assume that they have the same permeability. Finally, we assume that  $h \ll R$ , so that edge effects can be neglected. Let  $v_0 \in \mathbb{R}$  be the magnitude of the injection or suction velocity. A cylindrical polar coordinate system  $(r, \theta, z)$  is chosen with the origin at the center of the area between the two disks. The  $r$  axis is in a plane parallel to the disks, and  $z$  axis is perpendicular to the disks. Let  $v_r$  and  $v_z$  be the component of velocity in the radial and axial directions, respectively. 図 1 shows the flow configuration for permeable upper and lower disks for the injection case.

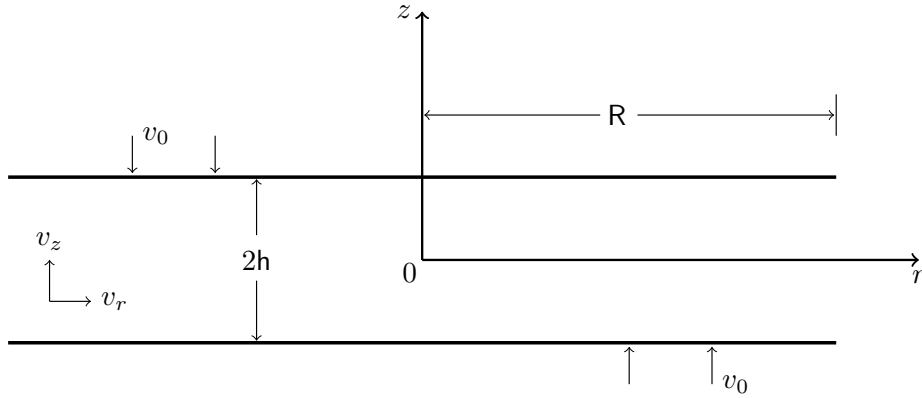


図 1. Flow between two permeable disks (injection case)

We assume that, for the governing Navier–Stokes equations with the continuity equation in cylindrical polar coordinates, there is no tangential velocity component ( $v_\theta = 0$ ) and the remaining quantities are independent of  $\theta$ . Then the equations for  $v_r$  and  $v_z$  are written as:

$$\begin{cases} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_z}{h} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \lambda^2} \right), \\ v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_z}{h} \frac{\partial v_z}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\rho h} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \lambda^2} \right), \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{h} \frac{\partial v_z}{\partial \lambda} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where  $p$  is the pressure field,  $\nu \geq 0$  is the kinematic viscosity of the fluid,  $\rho > 0$  is the density, and  $\lambda := z/h$  is the dimensionless axial coordinate. When the upper disk is permeable, the

boundary conditions on  $v_r$  and  $v_z$  are

$$v_r(r, \pm 1) = 0, \quad v_z(r, \pm 1) = \pm v_0, \quad (2)$$

and when the upper disk is impermeable, they are

$$v_r(r, \pm 1) = v_z(r, 1) = 0, \quad v_z(r, -1) = -v_0. \quad (3)$$

Note that  $v_0 > 0$  indicates suction at the disks, whereas  $v_0 < 0$  indicates injection. For the Navier–Stokes equations (1), Elkouh [1] introduced a stream function  $\psi(r, \lambda) = v_0 r^2 / 2 f(\lambda)$  so that

$$v_r(r, \lambda) = -\frac{1}{r h} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\frac{v_0 r}{2 h} f'(\lambda), \quad v_z(r, \lambda) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = v_0 f(\lambda), \quad (4)$$

and the continuity equation in (1) is satisfied. Substituting (4) into (1), we have

$$\frac{v_0 r}{2 h} \left( \frac{v_0}{2 h} (f')^2 - \frac{v_0}{h} f'' f + \frac{\nu}{h^2} f^{(3)} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (5)$$

$$\frac{v_0^2}{h} f' f - \frac{\nu v_0}{h^2} f'' = -\frac{1}{\rho h} \frac{\partial p}{\partial \lambda}. \quad (6)$$

Since the left-hand side of (6) is a function of  $\lambda$  only, differentiation (6) with respect to  $r$  gives  $\frac{\partial^2 p}{\partial \lambda \partial r} = 0$ . Therefore, differentiating (5) with respect to  $\lambda$ , we have

$$f^{(4)} - R f^{(3)} f = 0. \quad (7)$$

Here,  $R := \frac{v_0 h}{\nu}$  is the suction ( $v_0 > 0$ )/injection ( $v_0 < 0$ ) Reynolds number, which is allowed to be negative. From (2) and (3), the boundary conditions for  $f$  are obtained as

$$f'(\pm 1) = 0, \quad f(\pm 1) = \pm 1 \quad (8)$$

for the permeable case and

$$f'(\pm 1) = f(1) = 0, \quad f(-1) = -1 \quad (9)$$

for the impermeable case. We will refer to equation (7) as Elkouh's equation, in honor of the person who first derived this equation. In the present talk, we propose a computer-assisted proof of the existence of solutions for Elkouh's equation (7) with boundary conditions (8) or (9) based on [2]. Various existence proofs with mathematically rigorous error bounds show the validity of the presented numerical verification method.

**謝辞** 本研究は科学研究費 (課題番号 24H00694) の助成を受けたものである。

## 参考文献

- [1] Abdel F. Elkouh, Laminar flow between porous disks, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 93(4) (1967), 31–38.
- [2] Yoshitaka Watanabe and Shuting Cai, A computer-assisted proof for solutions of Elkouh's equation related to Navier-Stokes equations, *Fixed Point Theory and Algorithms for Sciences and Engineering*, 7 (2025). <https://doi.org/10.1186/s13663-025-00790-9>

# Gray-Scott 方程式の Dirichlet 境界値問題における 逆作用素ノルムの評価法

## Estimation of the Inverse Operator Norm in Dirichlet Boundary Value Problems for the Gray-Scott Equation

山口 滉介 (YAMAGUCHI Kosuke)<sup>1</sup>, 関根 晃太 (SEKINE Kouta)<sup>1</sup>,

水口 信 (MIZUGUCHI Makoto)<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 千葉工業大学 (Chiba Institute of Technology), <sup>2</sup> 中央大学 (Chuo University)

e-mail : s2131151ph@s.chibakoudai.jp

### 1 はじめに

近似解の精度保証に用いる Newton-Kantorovich の定理では, 逆作用素ノルム, 残差のノルム, Lipschitz 定数の評価が必要である. 特に, 逆作用素ノルムの評価は, 厳密解と近似解の誤差を上から評価した不等式  $\|z - \hat{z}\|_V \leq \rho$  を得るために重要である. そこで, 本研究では, Gray-Scott 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{D_u} \{u^2 v - (F + k)u\} & \text{in } \Omega, \\ -\Delta v = \frac{1}{D_v} \{-u^2 v + F(1 - v)\} & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

における逆作用素ノルムの評価法を提案し, 近似解に対して精度保証付き数値計算を行う.

### 2 提案手法

直積空間  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  をそれぞれ  $V, X, V^*$  と略記する. また,  $V$  上の内積にシグマ内積を導入した空間を  $\sigma$  と略記する.

作用素  $\mathcal{B}: V \rightarrow V$  を

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &:= \mathcal{A}_\sigma^{-1} \mathcal{F}'[\hat{z}] \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{B} + \mathcal{B}^*) + i \frac{1}{2i}(\mathcal{B} - \mathcal{B}^*) := \frac{1}{2}(\mathcal{B}_1 + i\mathcal{B}_2) \end{aligned}$$

と定義する. ここで,  $\|\psi\|_V \leq K \|\mathcal{F}'[\hat{z}]\psi\|_{V^*}$  となる定数  $K$  が存在するとする. このとき,  $\mathcal{F}'[\hat{z}]$  が全単射であり,  $\mathcal{F}'[\hat{z}]^{-1}$  が存在し, さらに,  $\|\mathcal{F}'[\hat{z}]^{-1}\|_{V^*, V} \leq K$  となる. 定数  $K$  の最良値は

$$\begin{aligned} \sup_{\mathcal{X}=(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \in \sigma \setminus \{(0,0)\}} \frac{\|\mathcal{X}\|_\sigma}{\|\mathcal{A}_\sigma^{-1} \mathcal{F}'[\hat{z}]\mathcal{X}\|_\sigma} &= \sup_{\mathcal{X}=(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \in \sigma \setminus \{(0,0)\}} \frac{\|\mathcal{X}\|_\sigma}{\|(\mathcal{B}_1 + i\mathcal{B}_2)\mathcal{X}\|_\sigma} \\ &\leq \frac{1}{\inf_{\mathcal{X}=(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \in \sigma \setminus \{(0,0)\}} \left| \frac{(\mathcal{B}_1 \mathcal{X}, \mathcal{X})_\sigma}{(\mathcal{X}, \mathcal{X})_\sigma} + \frac{i(\mathcal{B}_2 \mathcal{X}, \mathcal{X})_\sigma}{(\mathcal{X}, \mathcal{X})_\sigma} \right|} \\ &= \frac{1}{|\lambda_1 + i\lambda_2|} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \end{aligned}$$

と評価できる. この固有値  $\lambda_1$  は以下の定理 [1] で評価する.

**定理 2.1.**  $\lambda_1^{(i)}, \lambda_h^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) がそれぞれ, ある固有値問題における  $i$  番目の固有値であり,

$$\|(\mathbf{I} - \mathcal{P}_N)u\|_X \leq C_h \|(\mathbf{I} - \mathcal{P}_N)u\|_V, \quad \forall u \in V$$

を満たす正の定数  $C_h$  が存在するとする.  $C_h$  を含む定数  $C_{h,d}$  を用いて,

$$\frac{\lambda_h^{(i)}}{1 + C_{h,d}^2 \lambda_h^{(i)}} \leq \lambda_1^{(i)} \leq \lambda_h^{(i)}$$

が成り立つ.

### 3 数値計算例

$\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$  として, (1) の  $D_u, D_v, F, k$  にそれぞれ  $5.0 \times 10^{-6}$ ,  $1.0 \times 10^{-5}$ ,  $1.6 \times 10^{-6}$ ,  $3.0 \times 10^{-5}$  を代入し, 近似解  $(\hat{u}, \hat{v})^T$  を Legendre 基底の線形結合により表現した. 基底  $\phi_i(x)$  は,

$$P_i(x) = \frac{(-1)^i}{i!} \left( \frac{d}{dx} \right)^i x^i (1-x)^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

を用いて,

$$\phi_i(x) := \frac{1}{i(i+1)} x(1-x) \frac{dP_i}{dx}(x), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

と定義する.  $\hat{u}_1, \hat{v}_1$  のグラフをそれぞれ図 1, 2 に示す.

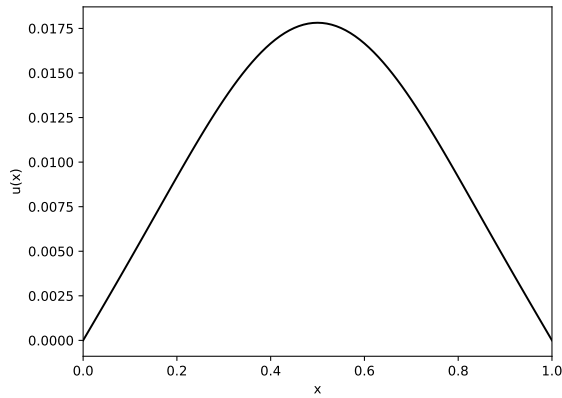


図 1. 近似解  $\hat{u}_1$

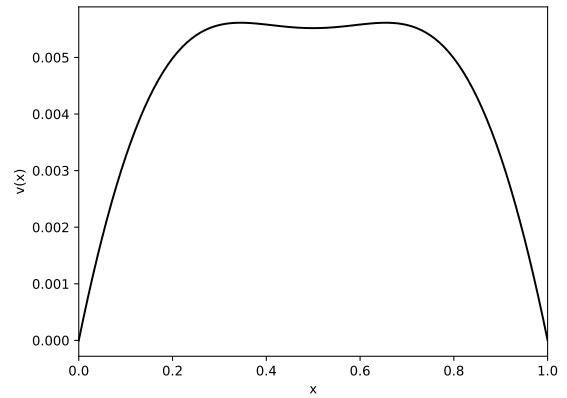


図 2. 近似解  $\hat{v}_1$

表 1. 近似解  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1)$  に対する数値計算結果

$N$	$C_h$	$C_{h,d}$	$\lambda_h^{(1)}$	$ \lambda_h^{(1)} $	$K$
20	$2.13 \times 10^{-2}$	0.643	$[-0.0228, 0.184]$	0	—
40	$1.16 \times 10^{-2}$	0.347	$[0.123, 0.184]$	0.123	8.10
60	$7.88 \times 10^{-3}$	0.238	$[0.155, 0.184]$	0.155	6.44

表 1 より, Legendre 基底の次数  $N = 20$  のとき,  $|\lambda_h^{(1)}|$  の下界が 0 となったため,  $\|\mathcal{F}'[\hat{z}]^{-1}\|_{V^*, V}$  の評価に失敗した.

### 参考文献

- [1] Xuefeng Liu. A framework of verified eigenvalue bounds for self-adjoint differential operators. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 267, pp. 341–355, 2015. The Fourth European Seminar on Computing (ESCO 2014).

### 3 変数のフィッツヒュー・南雲方程式の解に特化した精度保証付き数値計算法

#### Numerical Verification Method to Solutions of the Three-Component FitzHugh-Nagumo Equation

浅野 凌一郎 (Ryouichirou Asano)<sup>1</sup>, 関根 晃太 (Kouta Sekine)<sup>1</sup>,

<sup>1</sup> 千葉工業大学 (Chiba Institute of Technology)

e-mail : s2131006OA@s.chibakoudai.jp

## 1 背景

微分方程式を計算機で解くとき、丸め誤差や打ち切り誤差など様々な誤差が発生する。また、真の解が存在しない場合もある。そのため、真の解の存在を保証しつつその精度を保証する必要がある。その手法として精度保証付き数値計算が存在する。

本研究では三変数のフィッツヒュー・南雲方程式の Dirichlet 境界値問題の解に対して精度保証付き数値計算を行う。

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u = f(u) - \epsilon(av + bw) & \text{in } \Omega \\ -\Delta v = u - v & \text{in } \Omega \\ -d^2 \Delta w = u - w & \text{in } \Omega \\ u = v = w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

## 2 $\tilde{\mathcal{F}}$ ノルム

線形作用素  $\mathcal{B}$  と  $\mathcal{C}$  をそれぞれ  $\mathcal{B} := (-\Delta + I)^{-1}$ ,  $\mathcal{C} := (-\Delta + \frac{1}{d^2}I)^{-1}$  とし,  $(u, v)_{H_0^1} := (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$  を用いて, 不安定解をもつ方程式に適用できる  $\tilde{\mathcal{F}}$  内積を導入する。

この時,  $H_0^1(\Omega)$  上の内積を次のように定める。

$$(u, v)_{\tilde{\mathcal{F}}} := (\nabla u, \nabla v)_{L^2} + \left( \frac{1}{\epsilon^2} (\alpha + 3\hat{u}^2 \gamma + \epsilon(a\mathcal{B} + b\mathcal{C}))u, v \right)_{L^2} \quad (2)$$

また, この内積から誘導されるノルムを

$$\|u\|_{\tilde{\mathcal{F}}} := \sqrt{(u, u)_{\tilde{\mathcal{F}}}} \quad (3)$$

で定義する。ここで,  $W$  を  $H_0^1(\Omega)$  に  $\tilde{\mathcal{F}}$  の内積を導入した Hilbert 空間とする。また,  $W_N$  を  $W$  の有限次元部分空間とし,  $W_{\perp}$  を  $W$  の  $W_N$  に対する直交補空間とする。また,  $W^{-1}$  を  $W$  の共役空間とし, そのノルムを

$$\|u\|_{\tilde{\mathcal{F}}^{-1}} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|v\|_{\tilde{\mathcal{F}}}} \quad (4)$$

とする。これらのノルムで Newton-Kantorovich の定理 [1] を考える。

## 3 逆作用素ノルムの評価

$d$  内積を以下のように定義する。

$$(u, w)_d := \left( \frac{f'[u] - \delta \mathcal{B}}{\epsilon^2} u, w \right)_{L^2} + \left( \frac{1}{\epsilon^2} (\alpha + 3\hat{u}^2 \gamma + \epsilon(a\mathcal{B} + b\mathcal{C}))u, w \right)_{L^2} \quad (5)$$

逆作用素ノルムの評価をするに際し、以下のように離散化された固有値問題を解く必要がある。

$$\text{Find } \eta^h \in \mathbb{R} \text{ and } u_h \in W_h \text{ s.t. } (u_h, w_h)_{\tilde{\mathcal{F}}} = \eta^h (u_h, w_h)_d, \forall w_h \in W_h(\Omega) \quad (6)$$

直交射影  $\mathcal{P}_{h,\tilde{\mathcal{F}}} : H_0^1(\Omega) \rightarrow W_h$  は  $(u - \mathcal{P}_{h,\tilde{\mathcal{F}}}u, \phi_h)_{\tilde{\mathcal{F}}} = 0, \phi_h \in W_h$  を満たすとする。また定数  $C_{h,d}$  は不等式

$$\|v - \mathcal{P}_{h,\tilde{\mathcal{F}}}v\|_d \leq C_{h,d} \|v - \mathcal{P}_{h,\tilde{\mathcal{F}}}v\|_{\tilde{\mathcal{F}}}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (7)$$

を満たすとする。そのとき、劉・大石の定理 [2] より、 $i \leq n$  となる整数  $i$  番目の固有値  $\eta_i$  は

$$\frac{\eta_i^h}{1 + C_{h,d}^2 \eta_i^h} \leq \eta_i \leq \eta_i^h \quad (8)$$

を満たす。これによって逆作用素ノルムを評価することができる。

## 4 結果

実験ではルジャンドル基底の次数を 40 として近似解を作成した。また、 $\alpha, \beta, \gamma, a, b, d$ , にそれぞれ  $\alpha = 0.25, \beta = 1.25, \gamma = 1.0, a = 2.5, b = 0.1, d = 0.06$ , を代入し、 $\epsilon$  を 0.046 から 0.06 の範囲で変化させた。作成した近似解を図 1 に示し、精度保証の結果を表 1, 2 に示す。 $\epsilon = 0.04$  の近似解では  $K^2 RG \leq \frac{1}{2}$  という条件を満たさなかったため、精度保証できなかった。

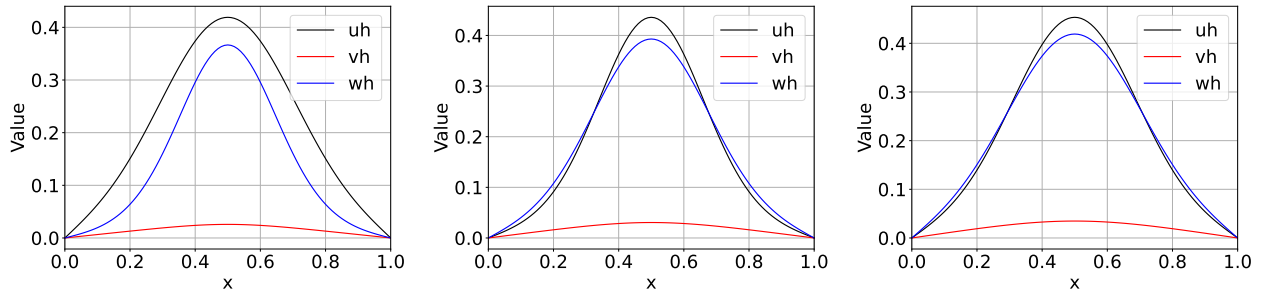


図 1:  $\epsilon = 0.04, 0.05, 0.06$  の近似解

表 1:  $K, R, G$  の数値的検証結果

$\epsilon$	$K$	$R$	$G$
0.06	4.2332	6.7321e-09	2892.25
0.05	3.90602	1.50775e-08	4444.43
0.04	3.71715	5.30749e-06	7920.27

表 2:  $K^2 RG, \|\hat{u} - u^*\|_{\tilde{\mathcal{F}}}$  の数値的検証結果

$\epsilon$	$K^2 RG$	$\ \hat{u} - u^*\ _{\tilde{\mathcal{F}}}$
0.06	0.000348917	2.85033e-08
0.05	0.00102238	5.8923e-08
0.04	0.580827	Verification failed

## 参考文献

- [1] 大石進一, 精度保証付き数値計算, コロナ社, 2000.
- [2] X. Liu, S. Oishi, Verified eigenvalue evaluation for the Laplacian over polygonal domain of arbitrary shape, SIAM J. Numer. Anal, 51 (2013), 1634–1654.

# 教師あり学習による精度保証付き数値積分のパラメータ選定の試み

## A Trial on Parameter Selection for Verified Numerical Quadrature Using Supervised Learning

石神 匠吾 (Ishigami Shougo)<sup>1</sup>, 関根 晃太 (SEKINE Kouta)<sup>1</sup>,

<sup>1</sup> 千葉工業大学 (Chiba Institute of Technology)

e-mail : s2581006dw@s.chibakoudai.jp

### 1 はじめに

研究で扱う自然科学や工学に現れる積分は，原始関数が初等関数や特殊関数で表せないことがある．表せても計算に手間がかかることが多い．さらに，観測値や測定値などは原始関数を持たない．このような場合に利用するのが数値積分である．この数値積分公式には補完型公式としてニュートン・コーツ公式がある．このニュートン・コーツ公式を使って被積分関数に対して指定された範囲で数値積分を行う際には，分割数や数値積分公式の選択が必要になる．これらのパラメータの選択は，研究者の経験則または自動数値積分を用いて行われてきた．しかしこれらのパラメータの選択には問題がある．研究者の経験則で決める場合は，自身が希望する誤差になるまで繰り返しパラメータの設定が必要になる．また自動数値積分の場合は，許容限界誤差や計算回数の上限，数値積分公式の設定が必要である．これらの問題は，数値積分の精度とリソースの最適化において大きな課題となる．

本研究では，数値積分を行う際に精度に基づいてパラメータを決定する教師あり学習モデルを作成する．その精度を基にパラメータを選択するには被積分関数の各点や誤差，計算時間に関するデータが必要である．この誤差を導出するために，データセットを kv ライブラリ [1] を用いて精度保証付き数値積分で作成する．この作成したデータセットを用いて，教師あり学習を行い，パラメータを推定することを目的としている．

実際のユーザの利用方法を図 1 に示す．ユーザは被積分関数の各点と希望誤差，計算時間を教師あ

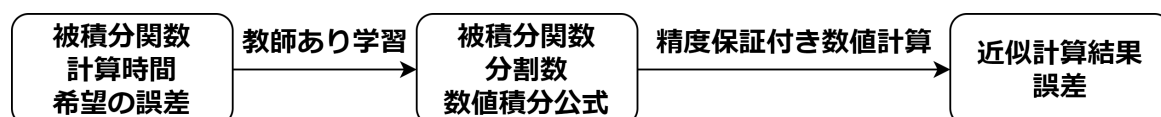


図 1. ユーザの利用方法概要

り学習の入力として与えることで，教師あり学習の出力結果を得てそのパラメータを使って精度保証付き数値計算をして数学的に正しい結果を得られるようにしている．

### 2 提案手法

#### 2.1 データセットの作成方法

パラメータを推定するには，学習データセットを様々な関数の特性を考慮して作成する必要がある．本研究では初等関数を利用して学習データセットを作成した．この時に，指数関数等の値が急激に変わるような関数は数値計算が難しいため除いた．作成した学習データセットの例を表 1 に示す．start と end は被積分関数の区間内のいくつかの点を示している．この時に，データセットの前処理として分割数を  $\frac{1}{\sqrt{\text{分割数}}}$  と正規化することで学習が不安定になるのを防いでいる．

テストデータも初等関数を用いて作成した．この時に手計算できないような初等関数をテストデー

表 1. 学習データセットの例

被積分関数の各点	誤差	計算時間	分割数	数値積分公式
start ... end	0.198	0.1	0.01	4 次多項式

タに組み込んだ。

## 2.2 学習モデル

学習データセットを利用してニューラルネットワークで学習する際の、入出力方法と重みとバイアスの更新方法を図 2 に示す。この時の重みとバイアスの更新方法として分割数のユニットにつながっ

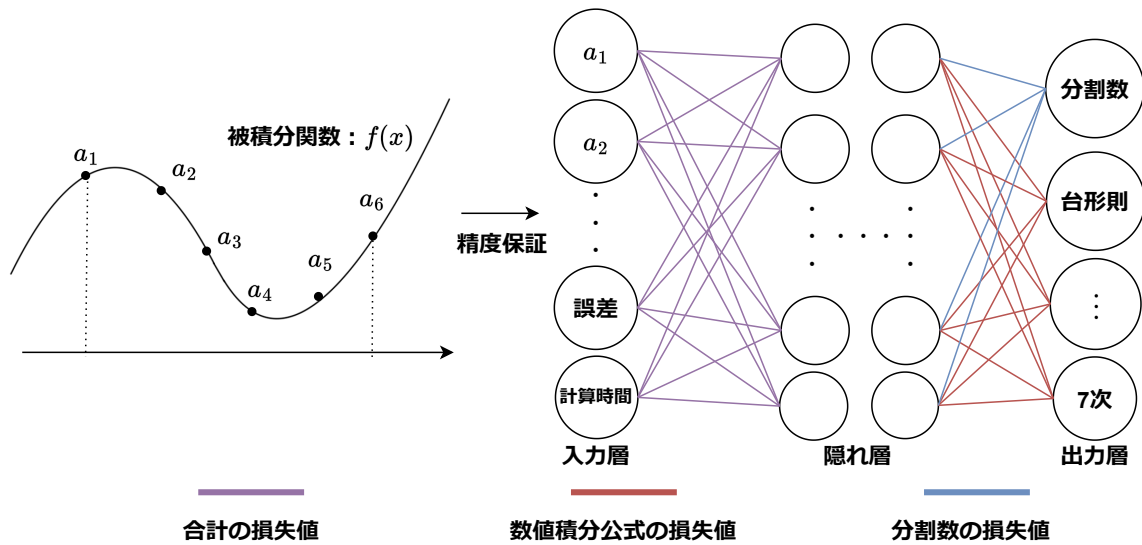


図 2. ニューラルネットワークの概要と重みとバイアスの更新方法

ているユニットは分割数の損失値だけを使って更新している。数値積分公式のユニットも同様である。その他の重みとバイアスは分割数と数値積分公式の損失値の和で更新されている。

## 2.3 ハイパーパラメータの設定方法

モデル構築の設定に必要なハイパーパラメータ (学習率, 層数, ユニット数, ドロップアウト率) の設定をベイズ最適化を用いて決定した。分割数と数値積分公式の損失値が最小になることを目標にしてハイパーパラメータを設定している。この時のハイパーパラメータの選択範囲を表 2 に示す。

表 2. ハイパーパラメータの設定範囲

学習率	層数	ユニット数	ドロップアウト率
$10^{-5} \sim 10^{-2}$	1 ~ 16	8 ~ 2592	0 ~ 0.5

教師あり学習の出力結果と精度保証した結果は、講演時に示す。

## 参考文献

- [1] kv - C++ による精度保証付き数値計算ライブラリ, <http://verifiedby.me/kv/>.