非自励半群アプローチによる半線形放物型 PDE の解の長時間存在証明

Long-time existence proof of solutions to semilinear parabolic PDEs using a non-autonomous semigroup approach

高安 亮紀 (Akitoshi Takayasu)[1]
[1] 筑波大学 (University of Tsukuba)
e-mail：takitoshi@risk.tsukuba.ac.jp

時間依存の線形化作用素が生成する半群（発展作用素）に基づく半線形放物型偏微分方程式の厳密な数値求積法は, **非自励半群アプローチ**と呼ばれている [1]. この手法は, 初期値問題を時空間変数に関するバナッハ空間上の不動点形式として定式化し, 時間発展方程式に対する解の存在を計算機援用証明する. 本講演では, 複数の時間ステップにわたる発展作用素の効率的な評価を可能にする**マルチステップ法**による改良により, 厳密な求積が実行可能な時間を大幅に延長できることを紹介する.

時間発展方程式を空間方向に離散フーリエ変換して得られる無限次元常微分方程式系の初期値問題

$$\dot{u} = \mathcal{L}u + \mathcal{Q}\mathcal{N}(u), \quad u(0) = u_0, \quad t \in [0,\tau] \tag{1}$$

を考える. 解の局所存在時間を τ とし, 時間区間 $[0,\tau]$ を区間 $J_m = [\tau_{m-1}, \tau_m]$（$m = 1, 2, \ldots, M$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_M = \tau$）に分割し, 時間ステップと呼ぶ. 各ステップ幅は $h_m \stackrel{\text{def}}{=} \tau_m - \tau_{m-1}$. 各時間ステップ J_m において, 方程式の厳密解を $u_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(t)$ $(t \in J_m)$, 数値的に計算された近似解を $\bar{u}_m(t)$ と表す. 近似解全体を $\bar{u}(t)$ $(t \in [0,\tau])$ と書き, $\bar{u}(t) = \bar{u}_m(t)$ $(t \in J_m)$ が成り立つように定義する. さらに, 非線形項に関して $G_m(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}(u) - D\mathcal{N}(\bar{u}_m)u$ と定めると, そのフレッシェ微分は $DG_m(u) = D\mathcal{N}(u) - D\mathcal{N}(\bar{u}_m)$ となり, 特に $u = \bar{u}_m$ のとき $DG_m(\bar{u}) = 0$ が成り立つ.

本研究の目的は, 方程式 (1) の解を $\prod_{m=1}^{M} C(J_m, \ell^1_\nu)$ に厳密に包含することである. より正確には, 各 J_m において, $X_m \stackrel{\text{def}}{=} \ell^1\left(C^0(J_m)\right) = \left\{u : \|u\|_{X_m} \stackrel{\text{def}}{=} \left\|\|u\|_{C^0(J_m)}\right\|_\nu < +\infty\right\}$ と定義される空間 X_m を用いる. ここでのノルムは, 各フーリエ係数に対して C^0 ノルムを適用したものである. 我々は, 各 J_m において近似解 $\bar{u}$ の近傍に解を包含する. すなわち, 集合 $B_{r_m}(\bar{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in X_m : \|u - \bar{u}\|_{X_m} \le r_m\}$ に解が含まれることを示す. 結果的に方程式 (1) の解は $\prod_{m=1}^{M} C(J_m, \ell^1_\nu)$ に包含されることが検証される. このことは, 次の包含関係 $\boldsymbol{X} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{m=1}^{M} \ell^1\left(C^0(J_m)\right) \left(= \prod_{m=1}^{M} X_m\right) \subset \prod_{m=1}^{M} C(J_m, \ell^1_\nu)$ が成り立つこと, すなわち各 m に対して $X_m \subset C(J_m, \ell^1_\nu)$ が成立することに基づいている.

不動点形式は以下のように再帰的に定義される:

$$\boldsymbol{T}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \left(T_m(u)\right)_{m=1}^{M}, \ \left(T_m(u)\right)(t) \stackrel{\text{def}}{=} U_m(t, \tau_{m-1})\sigma_{m-1}(u) + \int_{\tau_{m-1}}^{t} U_m(t,s)\mathcal{Q}G_m(u(s))ds \ (t \in J_m). \tag{2}$$

ここで, $U_m(t,s)$ は, **非自励系**の微分作用素 $\mathcal{L} + \mathcal{Q}D\mathcal{N}(\bar{u}_m(t))$ によって生成される発展作用素を表し, σ_m は T_m を $t = \tau_m$ において評価したものである. すなわち,

$$\sigma_m(u) \stackrel{\text{def}}{=} U_m(\tau_m, \tau_{m-1})\sigma_{m-1}(u) + \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} U_m(\tau_m, s)\mathcal{Q}G_m(u(s))ds, \quad \sigma_0(u) = u_0$$

と定義される. なお, (2) より $\sigma_m(u) = \sigma_m\left(T_m(u)\right)$ が成り立つことに注意されたい.

再帰的に定義された T_m の定義 (2) から, T_m の明示的な表現を次のように得る:

$$(T_m(u))(t) =$$
$$U_m(t,\tau_{m-1})\left(\Phi_{m-1,0}u_0 + \sum_{j=1}^{m-1}\Phi_{m-1,j}\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}U_j(\tau_j,s)\mathcal{Q}G_j(u(s))ds\right) + \int_{\tau_{m-1}}^{t}U_m(t,s)\mathcal{Q}G_m(u(s))ds.$$

ここで, $\Phi_{m-1,j}$ ($j=0,1,\ldots,m-1$) は, 次の定義で与えられる:

$$\Phi_{m-1,j} \stackrel{\text{def}}{=} U_{m-1}(\tau_{m-1},\tau_{m-2})U_{m-2}(\tau_{m-2},\tau_{m-3})\cdots U_{j+1}(\tau_{j+1},\tau_j), \quad \Phi_{j,j} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Id}.$$

我々は, 次に示すバナッハの不動点定理に基づく標準的な縮小写像の原理を用いる.

定理 1（縮小写像の原理） 近似解 $\bar{u}\in\boldsymbol{X}$ とし, 定数 Y_m および単調非減少関数 $Z_m^i : [0,\infty)\to[0,\infty)$ が存在して, $m=1,2,\ldots,M$ および $i=1,2,\ldots,m$ に対して次が成立するとする.

$$\|T_m(\bar{u})-\bar{u}\|_{X_m}\le Y_m, \qquad \|DT_m(u)\|_{B(X_i,X_m)}\le Z_m^i(r_i), \quad \forall u\in B_{r_i}(\bar{u}).$$

このとき, もし正の実数列 $(r_m)_{m=1}^M$ が存在して,

$$Y_m + \sum_{i=1}^{m}\int_0^{r_i}Z_m^i(s)ds \le r_m, \qquad \sum_{i=1}^{m}Z_m^i(r_i) < 1$$

がすべての $m=1,2,\ldots,M$ に対して成立すれば, (2) で定義された写像 $\boldsymbol{T}$ は, 近傍の直積集合 $\prod_{m=1}^M B_{r_m}(\bar{u})$ において唯一の不動点 $\tilde{u}$ を持つ.

注意 2 定理 1 において Y_m および Z_m の評価を与えるために, 各 m に対して $j=0,1,\ldots,m-1$ における正の定数 $\boldsymbol{W}^{(\boldsymbol{J_m},\boldsymbol{\tau_j})}$ および $\boldsymbol{V_q}^{(\boldsymbol{J_m},\boldsymbol{\tau_j})}$ が存在し, 次の不等式の成立を仮定する.

$$\|U_m(\cdot,\tau_{m-1})\Phi_{m-1,j}\|_{B(\ell_\nu^1,X_m)} \le \boldsymbol{W}^{(\boldsymbol{J_m},\boldsymbol{\tau_j})}$$
$$\left\|U_m(\cdot,\tau_{m-1})\Phi_{m-1,j+1}\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}U_{j+1}(\tau_{j+1},s)\mathcal{Q}ds\right\|_{B(X_{j+1},X_m)} \le \boldsymbol{V_q}^{(\boldsymbol{J_m},\boldsymbol{\tau_j})} \qquad (j=0,1,\ldots,m-2)$$
$$\left\|\int_{\tau_{m-1}}U_m(\cdot,s)\mathcal{Q}ds\right\|_{B(X_m)} \le \boldsymbol{V_q}^{(\boldsymbol{J_m},\boldsymbol{\tau_{m-1}})}.$$

講演時には, 上記定理を用いた計算機援用証明手法の詳細と, 本手法を適用した計算機援用証明結果について概説する.

謝辞 本研究は科研費 (課題番号: 22K03411, 24K00538) の助成を受けたものである.

参考文献

[1] Gabriel W. Duchesne, Jean-Philippe Lessard, Akitoshi Takayasu. A rigorous integrator and global existence for higher-dimensional semilinear parabolic PDEs via semigroup theory. *Journal of Scientific Computing*, 102, 62, 2025.

Hadamard 微分の厳密計算による固有値の単純性の解析

Analysis of the Simplicity of Eigenvalues by Rigorous Computation of the Hadamard Derivative

遠藤 凌輝 (Ryoki Endo)[1], 劉 雪峰 (Xuefeng Liu)[2],
[1] 新潟大学 (Niigata University), [2] 東京女子大学 (Tokyo Woman's Christian University)
e-mail : endo@m.sc.niigata-u.ac.jp[1], xfliu@cis.twcu.ac.jp[2]

1 緒言

ラプラシアンの固有値と領域形状の関係はスペクトル幾何学の中心課題である。本研究では、R. Laugesen と B. Siudeja によって [1] において提起された

「正三角形ではない任意の三角形におけるディリクレ第 2 固有値 λ_2 は単純である」

という予想に対し、計算機援用証明による完全な解決を与える [2, 3]。正三角形では対称性から $\lambda_2 = \lambda_3$ となることが知られているため、この予想の証明は固有値が近接する「正三角形に近い」領域と、固有値が発散する「退化する」領域で特に困難となる。本稿では、これらの課題を克服するために開発した手法と、証明の根幹をなす主要定理を示す。

2 証明の戦略

証明は、三角形の形状に応じて以下の二つの補完的なケースに分けて行う。

1) **Case 1 (退化三角形):** 三角形が細長く退化していく領域を扱う。ここでは、固有値が発散する中での大小関係を、漸近解析に基づく厳密な評価式を用いて保証する。
2) **Case 2 (非退化三角形):** 主に正三角形近傍の領域を扱う。ここでは、近接固有値を分離するため、Hadamard 微分（形状微分）の考えに基づく新たな「差分商公式」を導入し、精度保証付き数値計算により評価する。

3 証明の主要定理

3.1 退化三角形における固有値評価

頂点が $(-1,0),(1,0),(s,t)$ で与えられる高さ t の三角形 $T(s,t)$ を考える。その k 番目のディリクレ固有値を $\lambda_k(s,t)$ とする。$t \to 0$ の極限では、$\lambda_k(s,t)$ は t^{-2} のオーダーで発散する。この発散挙動を精密に評価するため、$\lambda_k(s,t)$ を 1 次元 Schrödinger 作用素の固有値である $\bar{\mu}_k(s)$ と $\hat{\mu}_k^{t_0}(s)$ を用いて、以下のように評価する。

定理 1 (退化領域における固有値評価)**.** 与えられた $t_0 > 0$ に対し、k 番目のディリクレ固有値 $\lambda_k(s,t)$ は、任意の $t \in (0, t_0]$ において以下の上下界をもつ。

$$\frac{\pi^2}{t^2} + \frac{\underline{\mu}_k(s)}{t^{4/3}} \le \lambda_k(s,t) \le \frac{\pi^2}{t^2} + \frac{\hat{\mu}_k^{t_0}(s)}{t^{4/3}}$$

ただし、$\underline{\mu}_k(s) := \frac{\bar{\mu}_k(s)}{1+t_0^{2/3}/(3\pi^2)\bar{\mu}_k(s)}$ である。

この定理と $\hat{\mu}_2^{t_0}(s), \bar{\mu}_3(s)$ に対する評価から、$t \le t_0$ に対して $\lambda_2 < \lambda_3$ が保証される。

3.2　領域摂動に対する差分商公式

T^0 を、重複度 $m = N - n + 1$ のディリクレ固有値 $\lambda_n = \cdots = \lambda_N (=: \lambda)$ を持つ三角形領域とする。対応する固有空間を $E = \mathrm{span}\{u_n, \ldots, u_N\} \subset H_0^1(T^0)$ とする。

次に、微小なパラメータ $t > 0$ と方向ベクトル $\mathbf{e}$ によって定義されるアフィン変換 $S_t : T^0 \to T^t$ を考える。これにより、元の領域 T^0 は摂動領域 T^t へと写される。T^t 上でのディリクレ固有値問題を $-\Delta u^t = \lambda_i^t u^t$ と記述し、その固有値 λ_i^t と L^2 正規化された固有関数を u_i^t とする。

近接固有値の挙動を解析するため、二つの空間を比較する。一つは元の固有空間 E であり、もう一つは、摂動後の固有関数をアフィン変換で引き戻した関数 $\widetilde{u}_i^t = u_i^t \circ S_t$ によって張られる空間 $\widetilde{E}_t = \mathrm{span}\{\widetilde{u}_n^t, \ldots, \widetilde{u}_N^t\}$ である。重要なのは、$\widetilde{u}_i^t$ もまた T^0 上の関数であるため、二つの空間 E と $\widetilde{E}_t$ を同じ領域 T^0 上で比較できる点である。

固有値の変化率である差分商 $D_t\lambda_i = (\lambda_i^t - \lambda)/t$ の振る舞いを、以下の定理を用いて解析する。以下の公式は固有値が単純 $(n = N)$ の場合，Hadamard の変分公式に一致することに注意する。

定理 2 (差分商公式)**.** $\dim \widetilde{E}_t = \dim E$ と仮定する。$\widetilde{E}_t$ の基底を $\{\tilde{\phi}_i\}_{i=n}^N$、$E$ の基底を $\{\phi_j\}_{i=n}^N$ とする。領域変形を表す項 $F_{P_t^e}$ を用いて行列 M_t, N_t を

$$M_t := \left(F_{P_t^e} \left(\tilde{\phi}_i, \phi_j \right) \right), \quad N_t := \left(\left(\tilde{\phi}_i, \phi_j \right)_{T^0} \right)$$

と定義する。このとき、差分商 $D_t\lambda_i$ *(*$i = n, \ldots, N$*)* は、以下の一般化行列固有値問題の $(i - n + 1)$-番目の固有値 μ に一致する。

$$M_t\sigma = \mu N_t \sigma$$

さらに摂動後の固有関数は、対応する固有ベクトル $\sigma_i = (s_{ni}, \ldots, s_{Ni})^\intercal$ を用いて $\widetilde{u}_i^t = \sum_{j=n}^N s_{ji}\tilde{\phi}_j$ と表される。

この定理により、不安定な固有関数の計算を避け、より安定した行列の固有値計算に問題を帰着できる。近年開発された固有空間に対する厳密評価法を用いて行列 M_t, N_t を評価し、$D_t\lambda_2$ と $D_t\lambda_3$ が分離することを示せば、$\lambda_2 < \lambda_3$ が証明される。

4　結論

本研究は、退化領域に対する固有値の厳密評価（定理 1）と、非退化領域における差分商公式（定理 2）という二つの主要な数学的道具を開発・駆使することで、予想を完全に証明した。

参考文献

[1] Henrot, Antoine, Shape optimization and spectral theory, De Gruyter Open Poland, 2017.

[2] Endo, Ryoki and Liu, Xuefeng, The Second Dirichlet Eigenvalue is Simple on Every Non-equilateral Triangle, Part I: Nearly Degenerate Triangles, J. Differ. Equations (to appear), (2025).

[3] Endo, Ryoki and Liu, Xuefeng, The Second Dirichlet Eigenvalue is Simple on Every Non-equilateral Triangle, Part II: Nearly Equilateral Triangles, arXiv preprint arXiv:2305.14063, (2025).

行列積に対するGEMM-basedな試行型エミュレーションについて

GEMM Based Trial Emulation Methods for Matrix Multiplication

尾崎 克久 (OZAKI Katsuhisa)[1], 内野 佑基 (UCHINO Yuki)[2],
今村 俊幸 (IMAMURA Toshiyuki)[2]
[1] 芝浦工業大学 (Shibaura Institute of Technology), [2] 理化学研究所 (RIKEN)
e-mail : ozaki@shibaura-it.ac.jp

1　概要

本講演では，低精度演算を用いた行列積のエミュレーション手法の改良について議論する．一般的な高精度計算についての手法は枚挙に暇がないが，高速な BLAS の行列積の関数を活用したエミュレーション手法として [1] が知られている．これは，入力行列を仮数部の先頭からの非ゼロビット数に基づいて制限された複数の行列に分割し，それぞれの分割行列に対する行列積を無誤差で計算したうえで，それらの総和を求める方法である．入力行列を A，B として AB を計算するときには

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_{k-1} + A_k, \quad B = B_1 + B_2 + \cdots + B_{k-1} + B_k \tag{1}$$

と分割を行う．ここでは概ね $|A_i| \gg |A_{i+1}|$，$|B_i| \gg |B_{i+1}|$ が成立する．行列 $\underline{B}_i$ を

$$\underline{B}_i = \sum_{j=i}^{k} B_j, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

と定めたとき，

$$AB = \sum_{i+j \le k} A_i B_j + \sum_{i=1}^{k} A_i \underline{B}_{k-i+1} \tag{2}$$

と行列積を計算する．$i+j \le k$ のとき，$A_i B_j$ の計算において誤差は発生しない（ただし，オーバーフローやアンダーフローの場合を除く）．ここでは $k(k+1)/2$ 回の行列積を計算する．全体として行う計算は以下の 3 ステップに分類される．

Part 1:　(1) のように行列を分割する

Part 2:　(2) の行列積を計算する

Part 3:　(2) の行列積の結果の総和をとる

Part 1 では行列の足し引きにより行列を生成するため低コストであり，Part 2 では最適化された BLAS のルーチンを使用できる．Part 3 では必要な精度で計算を行う．なお，実際には Part 2 と Part 3 では処理が完全に分かれているわけではなく，個々の行列積を計算した直後に総和を取ることも可能である．

中国式剰余定理に基づいた行列積を考え，そこに現れる行列積をすべて無誤差で計算し，結果を構成する方法が本年に提案された [2]．この手法は CPU や GPU 上での計算で高速であることが示されている．計算の概要としては以下の 4 ステップに分類される．

Part 1:　s を事前に定め，s 個の互いに素な正の数 $m_1, \ldots, m_s$ を準備する．入力行列 A と B に対してスケーリングを行い，整数部を取り出して整数行列 A' と B' を得る．

Part 2:　以下 $k=1,\dots,s$ まで繰り返す．初期の行列 Z はゼロ行列とする．

Part 2-a:　A' と B' の各成分に対して，m_k に関する剰余を取ってできる行列 A'_k，B'_k を得る．ただし，剰余は負の数を許容する「対称範囲での剰余」とする．

Part 2-b:　$C'_k := A'_k B'_k$ を BLAS の関数で計算する．

Part 2-c:　$Z := Z + \alpha_k C'_k$ と更新する．α_k は事前に計算された定数である．

Part 3:　Z に関してリダクションを行う．

Part 4:　Part 1 で行ったスケーリングの逆スケーリングを行う．

本講演ではこの手法の改良について議論を行う．

2　提案手法の概要

行列積の試行型エラーフリー変換というものが提案されている [3]．行列積を無誤差で計算できることを保証しないが，実際に誤差が起きた可能性を低コストで検出可能な手法である．通常，文献 [1] の手法では多くの場合に A_iB_j $(i+j\le k)$ の仮数部の後半にゼロビットが入る．この場合は入力行列に対してより情報を含めても問題がなく，同じ行列積の回数でも精度の向上が見込める．

文献 [3] のアイデアを文献 [2] の手法に適用することを考える．u を単位の相対丸めとすると

$$nm_i^2 \le 4u^{-1}$$

を満たすように m_i を設定することで，行列積の計算における無誤差を担保していた．ここで，

$$2|a'_k|_{ij}, 2|b'_k|_{ij} \le \alpha m_i, \quad \alpha \ge 2,$$

とすると，計算中に丸め誤差が発生する可能性がある．これを [3] のスケーリングに基づき，オーバーフローにより無誤差を保証できない場合には

$$\alpha \le \frac{2\sqrt[3]{u^{-2}/n^2}}{m_i}$$

であれば $A'_k = A_k^{(1)'} + A_k^{(2)'}$ と 2 つの行列に分割し，$A_k^{(1)'}B_k$ と $A_k^{(2)'}B_k$ は無誤差で計算できる．この分割の詳細や定数 α を様々な値に設定した場合の数値実験結果については講演時に述べる．

謝辞　本研究は科研費（23K28100，　25H01109，25K03126）の補助を受けた．

参考文献

[1] K. Ozaki, T. Ogita, S. Oishi, S. M. Rump, Error-Free Transformation of Matrix Multiplication by Using Fast Routines of Matrix Multiplication and its Applications, Numerical Algorithms, Vol. 59 (2012), 95–118.

[2] K. Ozaki, Y. Uchino, T. Imamura, Ozaki Scheme II: A GEMM-oriented emulation of floating-point matrix multiplication using an integer modular technique, arXiv:2504.08009v3.

[3] K. Ozaki, T. Ogita, S. Oishi, Error-free transformation of matrix multiplication with a posteriori validation, Numerical Linear Algebra with Applications, Vol. 23 (2016), 931–946.

