

完全グラフに対応する 2 種類の離散 ℓ^p ソボレフ不等式の最良定数

The best constants of two types of discrete ℓ^p Sobolev inequalities on a complete graph

山岸 弘幸 (Hiroyuki Yamagishi)¹, 渡辺 宏太郎 (Kohtaro Watanabe)²,
永井 敦 (Atsushi Nagai)³

¹ 東京都立産業技術高等専門学校 (Tokyo Metropolitan College of Industrial Technology),

² 防衛大学校 (National Defense Academy), ³ 津田塾大学 (Tsuda University)

e-mail : yamagisi@metro-cit.ac.jp

1 主結果

$N = 2, 3, 4, \dots$ とする. 完全グラフ K_N の頂点数は N , 辺数は $N(N-1)/2$ である. 頂点 i ($0 \leq i \leq N-1$) に同一種の原子を配置し, 辺の集合を $e = \{(i, j) | 0 \leq i < j \leq N-1\}$ として, 辺 (i, j) で隣接する 2 つの原子のバネ定数を 1 とする線形バネで結ばれた完全グラフ K_N の古典力学モデルを考える. $u = {}^t(u(0), u(1), \dots, u(N-1)) \in \mathbb{C}^N$ と置く. 特に完全グラフ K_4 は, 正 4 面体の点と頂点の関係を示した平面図のグラフと同じである.

$0 < p < \infty$ とする. 離散 ℓ^p ソボレフ不等式は, $u(i)$ の絶対値の最大値の p 乗を, 上から ℓ^p ノルムで与えられたポテンシャルエネルギーの定数倍で評価する不等式である. 定数倍のうち, 最も小さい定数が最良定数であり, 等号を達成するベクトルは最良ベクトルである. ポテンシャルエネルギーに減衰係数 a を含む場合と含まない場合の 2 種類の離散 ℓ^p ソボレフ不等式を考えた. 結論は次の通りである.

定理 1 $0 < p < \infty$ とする. 正定数 C が存在し, 任意の $u \in \mathbb{C}^N$ に対し, 離散 ℓ^p ソボレフ不等式

$$\left(\max_{0 \leq j \leq N-1} |u(j)| \right)^p \leq C \left(\sum_{0 \leq i < j \leq N-1} |u(i) - u(j)|^p + a \sum_{i=0}^{N-1} |u(i)|^p \right)$$

が成り立つ. C のうち, 最も小さい定数である最良定数は

$$C_0(a) = \begin{cases} \frac{1}{a + (N-1) \min\{1, a\}} & (0 < p \leq 1, \ 0 < a < \infty), \\ \frac{1}{a + (N-1) \left(1 + a^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{-(p-1)}} & (1 < p < \infty, \ 0 < a < \infty). \end{cases}$$

である. C を $C_0(a)$ で置き換え, $\max_{0 \leq j \leq N-1} |u(j)| = |u(0)|$ と仮定すると, 等号成立する $u \in \mathbb{C}^N$ は

$$\begin{cases} {}^t(1, s, \dots, s), & s \in [0, 1] & (p = a = 1), \\ {}^t(1, 1, \dots, 1) & & (0 < p \leq 1, \ 0 < a \leq 1), \\ {}^t(1, 0, \dots, 0) & & (0 < p \leq 1, \ 1 \leq a < \infty), \\ {}^t\left(1 + a^{-\frac{1}{p-1}}, 1, \dots, 1\right) & & (1 < p < \infty, \ 0 < a < \infty). \end{cases}$$

と平行である.

定理 2 $1 \leq p < \infty$ とする . 正定数 C が存在し , 任意の $\mathbf{u} \in \mathbb{C}_0^N = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N \mid u(0) + \cdots + u(N-1) = 0\}$ に対し , 離散 ℓ^p ソボレフ不等式

$$\left(\max_{0 \leq j \leq N-1} |u(j)| \right)^p \leq C \sum_{0 \leq i < j \leq N-1} |u(i) - u(j)|^p$$

が成り立つ . C のうち , 最も小さい定数である最良定数は

$$C_0 = \frac{(N-1)^{p-1}}{N^p}$$

である . C を C_0 で置き換え , $\max_{0 \leq j \leq N-1} |u(j)| = |u(0)|$ と仮定すると , 等号成立する $\mathbf{u} \in \mathbb{C}_0^N$ は

$${}^t(N-1, -1, \dots, -1) \in \mathbb{C}_0^N.$$

と平行である .

頂点数 N の完全グラフ K_N や頂点数 $N+N$ の完全二部グラフ $K_{N,N}$ に対応する離散 ℓ^p ソボレフ不等式の最良定数に関する先行研究と本講演 [1] と先行研究 [2, 3, 4] との関係は次の表の通りである . 完全グラフ K_N の $0 < p < 1$ かつ $a = 0$ の場合は , [5] にて準備中である .

Graph	a	$p = 2$	$0 < p < 1$	$p = 1$	$1 < p < \infty$
K_N	$a > 0$	[2]	[1]	[1]	[1]
K_N	$a = 0$	[2]	[5]	[1]	[4]
$K_{N,N}$	$a > 0$	[3]	—	—	—
$K_{N,N}$	$a = 0$	[3]	—	—	—

表 1. 離散 ℓ^p ソボレフ不等式の最良定数 .

参考文献

- [1] H. Yamagishi, K. Watanabe and A. Nagai, *The best constants of two types of discrete ℓ^p Sobolev inequalities on a complete graph*, to appear in Hiroshima Math. J.
- [2] H. Yamagishi, K. Watanabe and Y. Kametaka, *The best constant of three kinds of the discrete Sobolev inequalities on the complete graph*, Kodai Math. J., **37** (2014), 383–395.
- [3] H. Yamagishi, *The best constant of the discrete Sobolev inequalities on the complete bipartite graph*, Math. J. Okayama Univ., **64** (2022), 31–45.
- [4] H. Yamagishi, *The best constant of the discrete ℓ^p Sobolev inequality on the complete graph*, Yokohama Math. J., **66** (2020), 95–105.
- [5] S. Kukita, A. Nagai, K. Watanabe, H. Yamagishi, *The best constant of the discrete ℓ^p Sobolev inequality on the complete graph II*, in preparation.

Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式の楕円ソリトン解

Elliptic soliton solutions for the Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff equation

若松 大誠 (Taisei Wakamatsu)¹, 丸野 健一 (Ken'ichi Maruno)², Shangshuai Li³,
Da-jun Zhang³

¹ 早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 (School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University),

² 早稲田大学 理工学術院 (Faculty of Science and Engineering, Waseda University),

³ Department of Mathematics, Shanghai University

e-mail : waseda.wakama2@ruri.waseda.jp

1 概要

1974 年, Kuznetsov と Mikhailov は KdV 方程式の楕円ソリトン解を逆散乱法によって発見した [1]. “楕円ソリトン解” とは, Lamé type plane wave factor $\Phi_x(k) = \frac{\sigma(x+k)}{\sigma(x)\sigma(k)} e^{-\zeta(k)x}$ から構成される, 楕円関数で表される周期波の上を進行するソリトン解のことを指す. また, ζ, σ は Weierstrass の ζ, σ 関数であり, 以降登場する \wp も同様に Weierstrass の \wp 関数である.

最近, Nijhoff と Atkinson は ABS Lattice 方程式の, Yoo-Kong と Nijhoff は Lattice Potential KP 方程式の楕円ソリトン解を離散 Lamé 型 PWF と Cauchy 行列を用いて導出した [2, 3]. これらの発見により楕円ソリトン解に再度注目が集まり, 2022 年に Li と Zhang は KdV 方程式, KP 方程式の楕円ソリトン解を双線型形式を用いて導出し, 頂点作用素を用いて双線型形式の枠組みを確立した [4]. そして 2023 年, Kakei は Li と Zhang が確立した枠組みを佐藤理論の観点から説明した [5]. 本講演では, Li と Zhang が提案した方法を用いて KdV 方程式の 2 次元拡張である Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式の楕円ソリトン解とロンスキアン解を導出する.

2 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式

次の方程式を Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff (CBS) 方程式という:

$$u_z = \frac{1}{4}u_{xxy} + \frac{1}{2}(\partial_x^{-1}u_y)u_x + uu_y \quad (1)$$

CBS 方程式は KdV 方程式を拡張した方程式の 1 つと考えることができ, この拡張はトロイダル・リー代数を用いて説明される [6]. この方程式は 1975 年に Calogero が発見した方程式で, Bogoyavlenskii と Schiff は Calogero とは異なるアプローチでこの方程式を導出した. 特に, Schiff は Self-dual Yang-Mills 方程式からのリダクションでこの方程式を導出した [7, 8, 9].

3 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式のロンスキアン解

CBS 方程式 (1) は, 変数変換 $u = -2\wp(x) + 2(\log \tau)_{xx}$ を考えると, 双線型形式

$$\begin{cases} (D_x^4 - 4D_x D_t - 12\wp(x)D_x^2)\tau \cdot \tau = 0 \\ (D_y D_x^3 + 2D_y D_t - 6D_z D_x - 6\wp(x)D_y D_x)\tau \cdot \tau = 0 \end{cases} \quad (2)$$

が得られる. この変数変換及び第一式は, Li と Zhang が KdV 方程式の楕円ソリトン解を導出する際に用いた変換, 双線型形式と同じである. そしてこの双線型形式 (2) より,

$$\tau = \det(\varphi, \varphi_x, \varphi_{xx}, \dots, \varphi_{(N-1)x}) \quad (3)$$

$$\varphi_j = a_j^+ \Phi_x(k) e^{-\gamma_j} + a_j^- \Phi_x(-k) e^{\gamma_j}, \quad \gamma_j = \zeta(k_j)x - \frac{1}{2} \wp'(k_j)t + \ell_j y + \wp(k_j) \ell_j z + \gamma_j^{(0)}$$

を解にもつことが分かる. ただし a^+ , a^- は任意定数であり, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)^\top$ とする. また, 導出は基本的に KdV 方程式の場合と相違ないが, ロンスキアンが双線型形式を満たすかどうかの証明の際に, 行列式に対する Jacobi の恒等式を少し変形した次の恒等式を用いる.

$$\begin{vmatrix} x & x_n \\ A & y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & z_1 \\ A & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & y_1 \\ A & y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & x_{n+1} \\ A & z \end{vmatrix} = \det(A) \begin{vmatrix} x & x_n & x_{n+1} \\ a & y_1 & z_1 \\ A & y & z \end{vmatrix}$$

$$x = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{n-1}), \quad a = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{n-1})$$

$$y = (y_2 \quad y_3 \quad \cdots \quad y_n)^\top, \quad z = (z_2 \quad z_3 \quad \cdots \quad z_n)^\top, \quad A: (n-1)\text{次正方行列}$$

この恒等式により, KdV 方程式にはない y, z 微分の項を簡潔にすることができる.

4 Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式の楕円ソリトン解

ロンスキアン解 (4) において, $a_j^+ = 1$, $a_j^- = (-1)^j$ とした

$$\tau_{\text{Wr}} = \det(\varphi, \varphi_x, \varphi_{xx}, \dots, \varphi_{(N-1)x}) \quad (4)$$

$$\varphi_j = \Phi_x(k) e^{-\gamma_j} + (-1)^j \Phi_x(-k) e^{\gamma_j}, \quad \gamma_j = \zeta(k_j)x - \frac{1}{2} \wp'(k_j)t + \ell_j y + \wp(k_j) \ell_j z + \gamma_j^{(0)}$$

を考える. このとき,

$$\tau_N = \frac{\tau_{\text{Wr}}(x + \sum_{i=1}^N k_i, t)}{\tau_{\text{Wr}}(x, t)} \quad (5)$$

とすると, τ_N は双線型形式 (2) を満たし,

$$\tau_N = \sum_{\{\mu_k\}_{k=1}^N \in \{0,1\}^N} \frac{\sigma\left(x + 2 \sum_{i=1}^N \mu_i k_i\right)}{\sigma(x) \prod_{j=1}^N \sigma^{\mu_j}(2k_j)} \exp \left[\sum_{i=1}^N \mu_i \theta_i(x, t) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_i \mu_j A_{ij} \right] \quad (6)$$

$$\begin{cases} \theta_j = -2\zeta(k_j)x + \wp'(k_j)t + \ell_j y + \wp(k_j) \ell_j z + \theta_j^{(0)} \\ e^{a_{ij}} = \left(\frac{\sigma(k_i - k_j)}{\sigma(k_i + k_j)} \right)^2 \end{cases} \quad (7)$$

と表される.

参考文献

- [1] E. A. Kuznetsov and A.V. Mikhailov, Sov. Phys. JETP, Vol.40 (1974), p.855-859.
- [2] F.W. Nijhoff and J. Atkinson, Int. Math. Res. Not., Vol.2010 (2010), p.3837-3895.
- [3] S. Yoo-Kong and F.W. Nijhoff, J. Math. Phys., Vol.54 (2013), No.043511 (20pp).
- [4] X. Li and D.J. Zhang, J. Nonlinear Sci., Vol.32 (2022), No.70 (53pp).
- [5] S. Kakei, 2023, arXiv:2310.11679.
- [6] T. Ikeda and K. Takasaki, Int Math Res Not., Vol.2001 (2001), p.329-369.
- [7] F. Calogero, Lettere al Nuovo Cimento, Vol.14 (1975), p.443-447
- [8] O.I. Bogoyavlenskii, Uspekhi Mat. Nauk, Vol.45:4 (1990), p.1-86.
- [9] J. Schiff, in: 『Painlvé Transcendents』, eds. D. Levi and P. Winternitz, NATO ASI Series B, Vol.278 (1992), p.393-405

多成分短パルス型方程式の可積分性を保つ全離散化

Integrable fully discretizations of the multi-component short pulse type equations

堀 綾子 (Ayako Hori)¹, 丸野 健一 (Kenichi Maruno)², 田中 悠太 (Yuta Tanaka)²,
太田 泰広 (Yasuhiro Ohta)³, Bao-Feng Feng⁴

¹ 早稲田大学基幹理工学研究科 (Faculty of Science and Engineering, Waseda Univ.),

² 早稲田大学理工学術院 (Faculty of Science and Engineering, Waseda Univ.)

³ 神戸大学理学部 (Department of Mathematics, Kobe Univ.),

⁴ テキサス大学リオグランデバリー校 (University of Texas Rio Grande Valley)

e-mail : ayako0903@akane.waseda.jp

1 概要

多成分短パルス型方程式は、短パルス型方程式の多成分一般化として知られている [1]. 我々はこれまでに、多成分短パルス型方程式の N ソリトン解を Pfaffian を用いて表し、さらに空間方向の可積分性を保った離散化を行うことにより、一般的な境界条件に対応できる可積分な自己適合移動格子スキームの構築を行なった [2]. 本講演では、多成分短パルス方程式に対して、空間方向に加え時間方向の可積分性を保った離散化を行うことによって得られる全離散自己適合移動格子スキームの構築とその厳密解、さらに得られたスキームを用いた数値計算結果について報告する。

2 多成分短パルス方程式の可積分全離散化

多成分短パルス方程式

$$\begin{cases} u_{xt}^{(\mu)} = u^{(\mu)} + \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{\mu \in I, \nu \in J} c_{\mu\nu} u^{(\mu)} v^{(\nu)} \right) u_x^{(\mu)} \right)_x, & \mu \in I, \quad \nu \in J, \\ v_{xt}^{(\nu)} = v^{(\nu)} + \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{\mu \in I, \nu \in J} c_{\mu\nu} u^{(\mu)} v^{(\nu)} \right) v_x^{(\nu)} \right)_x, & I = \{1, 2, \dots, k\}, \quad J = \{1, 2, \dots, l\}, \end{cases}$$

の可積分な全離散自己適合移動格子スキーム

$$\begin{cases} \frac{u_{l,m+1}^{(\mu)} + u_{l-1,m}^{(\mu)}}{u_{l,m}^{(\mu)} + u_{l-1,m+1}^{(\mu)}} = \frac{1 - b(x_{l-1,m+1} - x_{l-1,m})}{1 - b(x_{l,m+1} - x_{l,m})} \frac{u_{l,m}^{(\mu)} + u_{l-1,m-1}^{(\mu)}}{u_{l,m-1}^{(\mu)} + u_{l-1,m}^{(\mu)}}, \\ \frac{v_{l,m+1}^{(\nu)} + v_{l-1,m}^{(\nu)}}{v_{l,m}^{(\nu)} + v_{l-1,m+1}^{(\nu)}} = \frac{1 - b(x_{l-1,m+1} - x_{l-1,m})}{1 - b(x_{l,m+1} - x_{l,m})} \frac{v_{l,m}^{(\nu)} + v_{l-1,m-1}^{(\nu)}}{v_{l,m-1}^{(\nu)} + v_{l-1,m}^{(\nu)}}, \\ \frac{x_{l,m+1} - x_{l,m}}{b} = - \sum_{\mu \in I, \nu \in J} c_{\mu\nu} u_{l,m}^{(\mu)} v_{l,m}^{(\nu)}, \end{cases} \quad (1)$$

は従属変数変換

$$u_{l,m}^{(\mu)} = \frac{g_{l,m}^{(\mu)}}{f_{l,m}}, \quad v_{l,m}^{(\nu)} = \frac{h_{l,m}^{(\nu)}}{f_{l,m}},$$

によって次の双線形形式から得られる:

$$\begin{cases} (1 - ab)(g_{l+1,m+1}^{(\mu)} f_{l,m} + g_{l,m}^{(\mu)} f_{l+1,m+1}) = (1 + ab)(g_{l+1,m}^{(\mu)} f_{l,m+1} + g_{l,m+1}^{(\mu)} f_{l+1,m}), \\ (1 - ab)(h_{l+1,m+1}^{(\nu)} f_{l,m} + h_{l,m}^{(\nu)} f_{l+1,m+1}) = (1 + ab)(h_{l+1,m}^{(\nu)} f_{l,m+1} + h_{l,m+1}^{(\nu)} f_{l+1,m}), \\ f_{l,m+1} f_{l,m-1} - f_{l,m}^2 = b^2 \sum_{\mu \in I, \nu \in J} c_{\mu\nu} g_{l,m}^{(\mu)} h_{l,m}^{(\nu)}. \end{cases} \quad (2)$$

双線形形式 (2) は Pfaffian 解

$$f_{l,m} = \text{Pf}(1, 2, \dots, M, M', \dots, 2', 1')_{l,m},$$

$$g_{l,m}^{(\mu)} = \text{Pf}(a^{(\mu)}, 0, 1, 2, \dots, M, M', \dots, 2', 1')_{l,m}, \quad h_{l,m}^{(\nu)} = \text{Pf}(b^{(\nu)}, 0, 1, 2, \dots, M, M', \dots, 2', 1')_{l,m},$$

をもち, Pfaffian の各要素は以下のように与えられる.

$$\text{Pf}(i, j)_{l,m} = \frac{p_i - p_j}{p_i + p_j} \phi_i(l, m) \phi_j(l, m), \quad (i, j')_{l,m} = \delta_{i,j},$$

$$\text{Pf}(j', i')_{l,m} = \frac{(p_i^2 - b^2)(p_j^2 - b^2)}{4(p_i^2 - p_j^2)} \sum_{\mu \in I, \nu \in J} c_{\mu\nu} a_i^{(\mu)} b_j^{(\nu)}, \quad (M \geq l \geq N+1, N \geq i \geq 1),$$

$$(a^{(\mu)}, i)_{l,m} = a_i^{(\mu)}, \quad (N \geq i \geq 1), \quad (b^{(\nu)}, j')_{l,m} = b_j^{(\nu)}, \quad (M \geq j \geq N+1).$$

ただし $\phi_i(l, m) = B_i \left(\frac{1+ap_i}{1-ap_i} \right)^l \left(\frac{p_i+b}{p_i-b} \right)^m$ とする. ここで N, M は $1 \leq N < M$ を満たす整数, $p_i, a_i^{(\mu)}, b_j^{(\nu)}, B_i$ は任意定数とし, 上記以外の Pfaffian の要素は 0 とする.

3 全離散自己適合移動格子スキームの数値計算への適用

図 1,2 は全離散自己適合移動格子スキーム (1) を用いた 2 成分複素短パルス方程式

$$u_{xt}^{(1)} = u^{(1)} + \frac{1}{2} \left((|u^{(1)}|^2 + |u^{(2)}|^2) u_x^{(1)} \right)_x, \quad u_{xt}^{(2)} = u^{(2)} + \frac{1}{2} \left((|u^{(1)}|^2 + |u^{(2)}|^2) u_x^{(2)} \right)_x,$$

の数値計算結果 $|u^{(1)}|, |u^{(2)}|$ を示す. 初期条件は 2 成分複素短パルス方程式の 2 ソリトン厳密解を与えた. 黄色の実線は厳密解を, 青の点線は数値解を, グラフ下部の赤い点は格子点の分布を表す. 変位の大きいところでは格子間隔が小さくなり, 変位の小さいところでは格子間隔が大きくなっていることが確認できる.

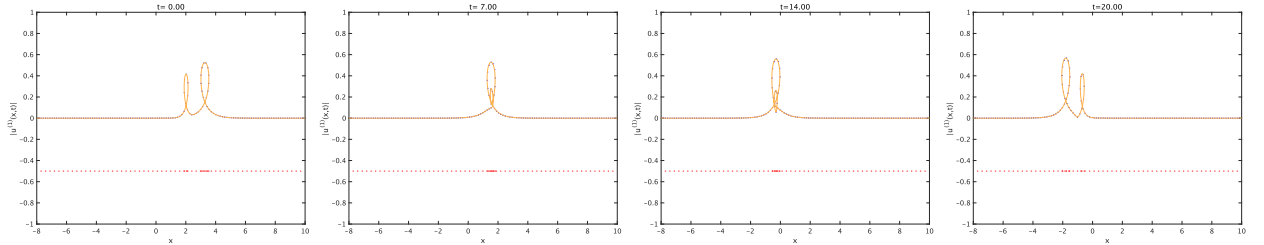


図 1. $|u^{(1)}|$ の 2 ループ・ソリトン相互作用

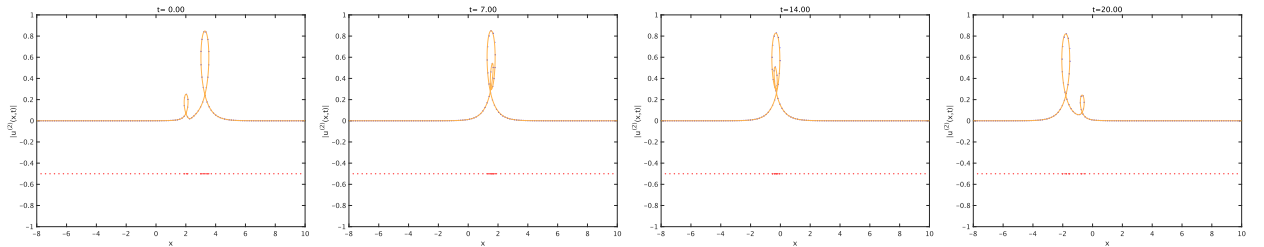


図 2. $|u^{(2)}|$ の 2 ループ・ソリトン相互作用

参考文献

- [1] Matsuno Y, *J. Math. Phys.* **57**. (2016), 111507.
- [2] Hori A, Maruno K, Ohta Y and Feng B F, arXiv : 2507.03880

4次元相空間保存系のダイナミクス

Phase Space Dynamics of 4D Volume-Preserving Systems

佐々 成正 (Narimasa SASA)¹

¹ 日本原子力研究開発機構 (Japan Atomic Energy Agency)

e-mail : sasa.narimasa@jaea.go.jp

1 概要

これまで我々は Poincaré 不変量 [1] に着目し、ハミルトン系に関する研究を行ってきた。例えば、1次元ハミルトン PDE 系、

$$H = \int h(q_1(x), \dots, q_M(x), p_1(x), \dots, p_M(x)) dx \quad (1)$$

において、系が並進対称性を持てば

$$I_2 = \sum_{i=1}^M \int q_i \frac{\partial p_i}{\partial x} dx \quad (2)$$

が保存量となる。この保存量 (2) が実は2次の Poincaré 不変量に等価であることに注目し、シンプレクティック数値解法 (正準変換) を用いた時間発展における (2) の数値的保存性について議論を行った [2, 3]。

この議論を単純に4次元以上の Poincaré 不変量にも拡張しようとするると困難を伴う。例えば4次の Poincaré 不変量に対応する無限小変換は上に挙げた並進対称性と比べても格段に複雑で、その対称性を満たすハミルトニアンの一般的な分類が難しいためである。そこで、本研究では4次の Poincaré 不変量そのものをハミルトニアンとして採用した時のダイナミクスを考察する。すなわち、4次の Poincaré 不変量に対応する無限小変換に対して不変な性質を持つ一番簡単な系のダイナミクスを考える事で、これまでの研究拡張の足掛かりにする事を目的とする。

2 4次の Poincaré 不変量

2自由度ハミルトン系、

$$H = H(q_1, q_2, p_1, p_2) \quad (3)$$

に対する4次の Poincaré 不変量は、

$$I_4 = \iiint_V dq_1 dp_1 dq_2 dp_2 = \int_{\partial V} q_1 \left| \frac{\partial(p_1, q_2, p_2)}{\partial(x, y, z)} \right| dx dy dz \quad (4)$$

で与えられる。V は相空間内のある4次元閉領域で、V を取り囲む境界領域 ∂V (3次元) での積分に置き換えている。その際、媒介変数として x, y, z を導入する。導入時は単なる媒介変数でしかないが、後程ハミルトニアンとして解釈する時には独立変数 (空間) として解釈し直すとする。この I_4 をハミルトニアンと解釈し、 $q_1(\mathbf{r}, t)$, $p_1(\mathbf{r}, t)$, $q_2(\mathbf{r}, t)$, $p_2(\mathbf{r}, t)$ ($\mathbf{r} = (x, y, z)$) に対する運動方程式を考えると、

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = \frac{\delta I_4}{\delta p_1} = -\nabla q_1 \cdot (\nabla q_2 \times \nabla p_2), \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{\delta I_4}{\delta q_1} = -\nabla p_1 \cdot (\nabla q_2 \times \nabla p_2) \quad (5)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} = \frac{\delta I_4}{\delta p_2} = -\nabla q_2 \cdot (\nabla q_1 \times \nabla p_1), \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} = -\frac{\delta I_4}{\delta q_2} = -\nabla p_2 \cdot (\nabla q_1 \times \nabla p_1) \quad (6)$$

が得られる．ここで， $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ である．

この方程式系を一般的に解くのは難しいため，まず波数をある一方向 ($2\pi \mathbf{p}_1/L$, $|\mathbf{p}_1|=1$) のみに制限し，その整数倍モードで展開した解，

$$\frac{q_1 + ip_1}{\sqrt{2}} = e^{i\mathbf{k}_{11} \cdot \mathbf{r}} \sum_{\ell} a_{1\ell} e^{i\frac{2\pi\ell}{L} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}}, \quad \frac{q_2 + ip_2}{\sqrt{2}} = e^{i\mathbf{k}_{21} \cdot \mathbf{r}} \sum_{\ell} a_{2\ell} e^{i\frac{2\pi\ell}{L} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}} \quad (7)$$

を考える．ここで， \mathbf{k}_{11} , \mathbf{k}_{21} はそれぞれ 3 次元定数ベクトルである．式 (7) のモード数を有限 (N) で近似すると，一番簡単なものとして次の形の解がある事がわかった．

$$a_{1\ell} = \frac{1}{N} C_{11} e^{-i\theta_2/2} \omega^{-(\ell-1)j} + \frac{1}{N} C_{12} e^{i\theta_2/2} \omega^{(\ell-1)j} \quad (8)$$

$$a_{2\ell} = \frac{1}{N} C_{21} e^{-i\theta_1/2} \omega^{-(\ell-1)j} + \frac{1}{N} C_{22} e^{i\theta_1/2} \omega^{(\ell-1)j} \quad (9)$$

但し， $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ と各係数は次の関係式を満たすとする．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta_1 + \theta_{02}) = C_1 \cos(\theta_2 + \theta_{01}) \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta_2 + \theta_{01}) = -C_2 \cos(\theta_1 + \theta_{02}) \quad (11)$$

$$2\gamma_1 C_{11}^* C_{12} \omega^{-1} = C_1 e^{i\theta_{01}} \sin \frac{2\pi j}{L}, \quad 2\gamma_1 C_{21}^* C_{22} \omega^{-1} = C_2 e^{i\theta_{02}} \sin \frac{2\pi j}{L} \quad (12)$$

$$\omega = e^{i\frac{2\pi j}{N}}, \quad \gamma_1 = \mathbf{k}_{11} \cdot (\mathbf{k}_{21} \times \mathbf{p}_1) \frac{2\pi}{L} \quad (13)$$

謝辞 本研究は JPSJ 科研費 JP24K06858 の支援により行われた．

参考文献

- [1] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Mechanics* (Pergamon Press, 1969).
- [2] N. Sasa, J. Phys. Soc. Jpn. **86**, 074006 (2017).
- [3] N. Sasa, J. Phys. Soc. Jpn. **91**, 054001 (2022).