

Discrete integrable systems associated with the deformation of cluster map of type D

Wookyung Kim¹

¹The University of Tokyo,

e-mail : kimw@ms.u-tokyo.ac.jp

1 Introduction

A discrete integrable system in a cluster algebra can be described by the iteration of the Liouville-integrable cluster map, which consists of cluster mutations. One can construct a family of such discrete dynamical systems by applying a novel approach: the deformation of cluster mutations introduced by Hone and Kouloukas in [1]. This approach modifies the cluster mutations in a way that preserves the natural presymplectic form. Recently, in [2, 3, 4], we have identified several successful examples of deformed integrable maps that retain integrability but no longer exhibit the Laurent property. This talk is based on the paper [4].

2 Deformation of type D_4 cluster map

Here we consider deformation of type D_4 cluster map, defined by

$$\varphi_{D_4} : (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = \left(\frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x'_1 x_3 x_4}{x_2}, \frac{1+x'_2}{x_3}, \frac{1+x'_2}{x_4} \right) \quad (1)$$

where x'_i for $1 \leq i \leq 4$ are new cluster variables generated by a sequence of mutations in the cluster algebra of type D_4 . Starting from the initial seed $(\mathbf{x}_{(0)}, Q)$, where $\mathbf{x}_{(0)} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ is initial cluster and Q is quiver of type D_4 , the orbit of φ_{D_4} is sequence of clusters $\{\mathbf{x}_{(t)}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ consisting of the elements of Laurent polynomial ring $\mathbb{Z}_{>0}[x_1^\pm, x_2^\pm, x_3^\pm, x_4^\pm]$. The orbit is completely periodic with period 4, that is $\mathbf{x}_{(t)} = \mathbf{x}_{(t+4)}$ for all $t \in \mathbb{Z}$. The map φ_{D_4} preserves the log-canonical 2-form, known as presymplectic form, as shown below.

$$\omega = \sum_{i < j} \frac{b_{ij}}{x_i x_j} dx_i \wedge dx_j = \frac{1}{x_1 x_2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{1}{x_2 x_3} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{1}{x_2 x_4} dx_2 \wedge dx_4$$

where coefficients b_{ij} encodes number of edges in the quiver. Since it is degenerate, one can reduce the number of degrees of freedom by introducing the new variables $u_1 = x_2$ and $u_2 = x_3 x_4 / x_1$, each of which is invariant under the flow generated by null distribution of ω . In these coordinates, the map can be reduced to a Liouville integrable map,

$$\hat{\varphi}_{D_4} : (u_1, u_2) \rightarrow \left(\frac{1+u_2+u_1 u_2}{u_1}, \frac{(1+u_1)(1+u_2)^2}{u_1 u_2^2} \right) \quad (2)$$

preserving symplectic form $\hat{\omega} = 1/u_1 u_2 du_1 \wedge du_2$. Let us apply deformation to φ_{D_4} by imposing the arbitrary parameters into the cluster map φ_{D_4} . Then the deformed map can be written as

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = \left(\frac{b_1 + a_1 x_2}{x_1}, \frac{b_2 + a_2 x'_1 x_3 x_4}{x_2}, \frac{b_3 + a_3 x'_2}{x_3}, \frac{b_4 + a_4 x'_2}{x_4} \right) \quad (3)$$

where a_j and b_j are non-zero arbitrary parameters. This deformed map preserves the same (pre) symplectic form, and after reduction to (u_1, u_2) it remains Liouville integrable. However, in exchange for admitting deformation of the cluster map, the iteration loses the Laurent property. To recover it, we lift the deformed map to a higher dimensional space where the Laurent property holds. This method, known as Laurentification, is established by constructing the variable transformation through the singularity confinement test for discrete systems. Here we consider the rational map $\pi : \mathbf{v} = (\hat{s}_0, \hat{r}_0, \hat{\tau}_0, \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3, \hat{\tau}_4, \hat{\eta}_0, b_3, b_4) \rightarrow (u_1, u_2)$ given explicitly by

$$u_{1,n} = \frac{\hat{\eta}_n}{\hat{\tau}_{n-1}\hat{\tau}_n}, \quad u_{2,n} = \frac{\hat{r}_n \hat{s}_n \hat{\tau}_{n-2}}{\hat{\tau}_{n+1} \hat{\tau}_n \hat{\tau}_{n-3}}. \quad (4)$$

Under suitable parameter constraints, the deformed map lifts via π to new cluster map ψ_{D_4} , which is defined by the sequence of mutations in new cluster algebra whose initial seed consists of cluster variables \mathbf{v} and quiver (\tilde{Q}_{D_4}) in Figure 1). Since iteration of ψ_{D_4} produces elements $\hat{s}_n, \hat{r}_n, \hat{\tau}_n, \hat{\eta}_n \in \mathbb{Z}_{>0}[b_3, b_4, \hat{s}_0^\pm, \hat{r}_0^\pm, \hat{\tau}_0^\pm, \hat{\tau}_1^\pm, \hat{\tau}_2^\pm, \hat{\tau}_3^\pm, \hat{\tau}_4^\pm, \hat{\eta}_0^\pm]$, the deformed map can be generated from elements in a cluster algebra. Therefore, the Laurent property is said to be restored.

3 Local expansion to type D_{2N}

This deformation can be extended to general type D_{2N} cases for $N \geq 2$, by considering the family of quivers $\tilde{Q}_{D_{2N}}$ in Figure 1, obtained via inserting certain quiver (local expansion) into the quiver labeled \tilde{Q}_{D_4} in the same figure. This extension allows us to construct a family of deformed maps associated with type D_{2N} that are conjectured to be integrable.

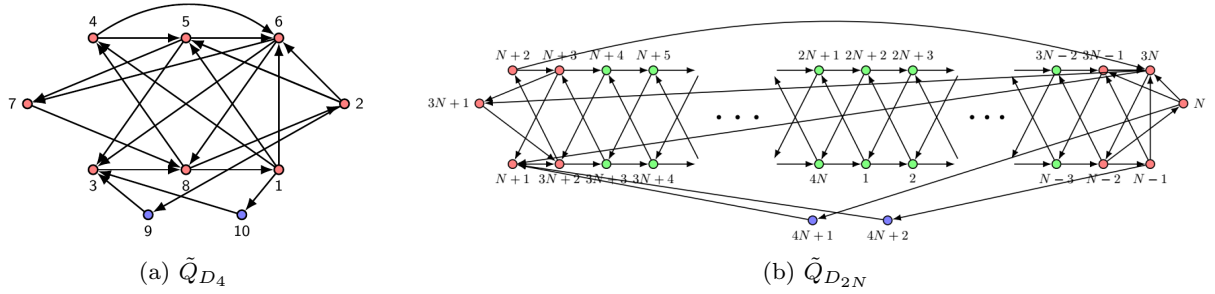


図 1: Extension from \tilde{Q}_{D_4} to $\tilde{Q}_{D_{2N}}$ via local expansion.

参考文献

- [1] A. N. W. Hone, and T. Kouloukas, Deformation of cluster mutation which preserves presymplectic form, *J Algebr Comb* **57**, 763-791, 2023.
- [2] A. N. W. Hone, W. Kim, and T. Mase, New cluster algebras from old: integrability beyond Zamolodchikov periodicity, *JPhys. A: Math. Theor.* **57** 415201, 2024.
- [3] J. E. Grabowski, A. N. W. Hone, and W. Kim, Deformed cluster map of type A_{2N} , preprint, arXiv:2402.18310, 2024.
- [4] W. Kim, Integrable deformations of cluster maps of type D_{2N} , preprint, arXiv:2506.06182, 2025.

カライドサイクルの存在証明

A proof of existence of Kaleidocycle

重富 尚太 (Shota Shigetomi)¹, 梶原 健司 (Kenji Kajiwara)¹, 鍛冶 静雄 (Shizuo Kaji)^{1,2}

¹ 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 (Kyushu University),

² 京都大学理学研究科 (Kyoto University)

e-mail : s-shigetomi@imi.kyushu-u.ac.jp

1 背景

カライドサイクルは振率角一定離散曲線としてモデル化可能で、その変形が可積分系で記述できることが知られている [1, 2]. 一方で、半離散 sine-Gordon 方程式・半離散 mKdV 方程式に従って変形する振率角一定離散曲線の明示公式も楕円テータ函数で構成されている [2] が、曲線が閉じるようなパラメータの存在については、一部を除いて数値実験でしか確認されていなかった.

楕円テータ函数の周期格子を $\Omega = \mathbb{Z} + iy\mathbb{Z}$, $y > 0$ と取り、パラメータ $r \in \mathbb{R} \setminus (1/2\mathbb{Z})$, $v \in \mathbb{R} \setminus (y\mathbb{Z})$ と時間変数 $t \in \mathbb{R}$, 仮想的な変数 $z \in \mathbb{C}$ に対して τ 函数を

$$\begin{aligned} F_n(t, z) &= \alpha_2 \exp\left(\frac{n\Delta_3}{\Delta_3 - \Delta_1}z + \frac{C}{2}tz\right) \vartheta_2\left(\mu_n - \frac{1}{2}iv + it\right), \\ H_n(t, z) &= \frac{u_2}{\alpha_2 s_2} R_1^{-n} R_3^{-n} \exp\left(\frac{n\Delta_3}{\Delta_3 - \Delta_1}z + \frac{C}{2}tz + \Gamma it\right) \vartheta_4\left(\mu_n - \frac{1}{2}iv - 2r + it\right), \end{aligned} \quad (1)$$

で定め、空間離散曲線 γ を

$$\gamma_n(t) = \left(\frac{H_n + H_n^*}{F_n}, \frac{H_n - H_n^*}{iF_n}, n - 2 \frac{\partial \log F_n}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} \in \mathbb{R}^3, \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

で定める. (ただし, $C, \Gamma, \alpha_2, R_1, R_3, \Delta_1, \Delta_3, u_2, s_2$ は, v, r, y と楕円テータ函数を用いて表される定数.) このとき γ は n, t によらずセグメント長 $|\gamma_{n+1} - \gamma_n|$ と振率角 λ が一定になっている [2]. また、離散フレネ枠や曲率角 κ と振率角 λ も τ 函数により明示的に構成できる.

四面体数 k のカライドサイクルの変形をモデル化するには、 $\gamma_{n+k}(t) = \gamma_n(t)$, つまり、

$$\begin{aligned} \frac{H_{n+k}}{F_{n+k}} \Big|_{z=0} &= \frac{H_n}{F_n} \Big|_{z=0}, \\ n + k - 2 \frac{\partial \log F_{n+k}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= n - 2 \frac{\partial \log F_n}{\partial z} \Big|_{z=0}, \end{aligned} \quad (3)$$

が任意の $n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$ で成立するようなパラメータ v, r, y を見つける必要がある.

2 γ が閉曲線になるパラメータの存在証明

本研究では、 $k \geq 6$ であれば (3) を満たすパラメータが存在することを証明した. したがって、任意の $k \geq 6$ の四面体からなるカライドサイクルの存在が示されたことになる.

定理 1 $k \geq 6$ を固定する. あるパラメータ v, r, y が存在して、(2) で定まる振率角一定離散曲線について、任意の $n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$ で $\gamma_{n+k}(t) = \gamma_n(t)$ が成立する.

証明の概略は以下の通りである: 曲線 (2) に対して、まず曲率角 κ が周期 k を持つことから、 $m := kv/y$ の整数性が要求される. m が整数であるという条件の下、楕円テータ函数の擬周期を

使って (3) を書き直すと,

$$\exp(\pi im) \left[\frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\frac{m}{k} + \frac{r}{iy}; \frac{i}{y}\right) \vartheta_3\left(\frac{1}{2}\frac{m}{k} + \frac{r}{iy}; \frac{i}{y}\right)}{\vartheta_1\left(-\frac{1}{2}\frac{m}{k} + \frac{r}{iy}; \frac{i}{y}\right) \vartheta_3\left(-\frac{1}{2}\frac{m}{k} + \frac{r}{iy}; \frac{i}{y}\right)} \right]^k - 1 = 0, \quad (4)$$

$$(\Delta_3 + \Delta_1)k - 4\pi im = 0, \quad (5)$$

を得る. 次に, m が整数であるという条件下で (5) を考える. y がある範囲にあるとき, (5) を満たす $r = r(y)$ が一意的に定まり, $r(y)$ は楕円積分で明示的に求められる. さらに, 楕円テータ函数の無限積による表示 [3] を使い (4) を書き直し, $r(y)$ を (4) に代入すると, $m \geq 3$ なら (4) を満たす y が存在することが言える. 最後に, カライドサイクルの形状を保つような m の変換を考えることで $0 < m \leq k/2$ を仮定できることを確かめ, $k \geq 6$ なら (4),(5) を満たす r, y, v が存在することが示される.

証明中の計算は複雑なため, 詳細は講演で提示する. 証明中に登場する整数 m は自己絡み数などとの関連が示唆されており, 今後は幾何学的な意味を検討したい. また, メビウスカライドサイクルと呼ばれる特殊なカライドサイクルは, 弾性エネルギーと振率角を同時に最小化するものとして特徴付けられることが, 講演者らの計算により予想されている. 変分原理を用いたカライドサイクルの研究も進めていきたい.

参考文献

- [1] S. Kaji, K. Kajiwara and H. Park, Linkage Mechanisms Governed by Integrable Deformations of Discrete Space Curves. In *Nonlinear Systems and Their Remarkable Mathematical Structures*, N. Euler and M. C. Nucci (eds.), Volume 2, CRC Press, 2019, 356–381, <https://doi.org/10.1201/9780429263743>.
- [2] S. Kaji, K. Kajiwara and S. Shigetomi, An explicit construction of Kaleidocycles by elliptic theta functions, arXiv:2308.04977.
- [3] S. Kharchev and A. Zabrodin, Theta vocabulary I, *Journal of Geometry and Physics*, 94:19–31, 2015.

パフィアンの恒等式を用いた対称平面分割の解析

Analysis of symmetric plane partitions using pfaffian identities

上岡 修平 (Shuhei Kamioka)
大阪成蹊大学 (Osaka Seikei University)
e-mail : kamioka@osaka-seikei.ac.jp

1 対称平面分割のきれいな分配関数

非負整数を成分とする 2 次元配列で各行および各列が単調非増加なものを平面分割 (*plane partition*) という。本稿で着目するのは平面分割の分配関数である。平面分割は簡単な因子の積で表せる (このことをきれいな (*nice*) であるという。) 分配関数を持つ。MacMahon 母関数

$$\sum_{\pi \in \text{PP}(A, B, C)} q^{|\pi|} = \prod_{i=1}^A \prod_{j=1}^B \prod_{k=1}^C \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}} \quad (1)$$

はきれいな分配関数の典型例である。ただし $\text{PP}(A, B, C)$ は A 行 B 列の平面分割で要素が C を超えないものの全体である。また $|\pi|$ は平面分割 π の成分の総和である。著者は MacMahon 母関数 (1) の一般化として次の分配関数を得た [1]。

$$\sum_{\pi \in \text{PP}(A, B, C)} y^{\sum_i \pi_{i,i}} q^{|\pi|} \prod_{i=1}^{\min\{A, B\}} \prod_{k=1}^{\pi_{i,i}} \frac{1 - q^{C+i-k}}{1 - yq^{C+i-k}} = \prod_{i=1}^A \prod_{j=1}^B \prod_{k=1}^C \frac{1 - yq^{i+j+k-1}}{1 - yq^{i+j+k-2}} \quad (2)$$

ここで不定元 y のべき指数 $\sum_i \pi_{i,i}$ は平面分割 π の主対角成分の総和 (トレース) である。

対称平面分割 (*symmetric* —) は $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のように成分が主対角線について対称に配置されている平面分割である。対称平面分割も次のようなきれいな分配関数を持つ [2]。

$$\sum_{\pi \in \text{SPP}(A, C)} q^{|\pi|} = \prod_{i=1}^A \frac{1 - q^{C+2i-1}}{1 - q^{2i-1}} \prod_{1 \leq i < j \leq A} \frac{1 - q^{2(C+i+j-1)}}{1 - q^{2(i+j-1)}} \quad (3)$$

ただし $\text{SPP}(A, C)$ は A 行 A 列の対称平面分割で要素が C を超えないものの全体である。この分配関数は MacMahon 母関数 (1) の対称版といえる。著者らは分配関数 (2) の対称版として次の予想式を得た。

予想 1 (K.-森居 [3]) 任意の非負整数 A, C に対して次が成り立つ。

$$\sum_{\pi \in \text{SPP}(A, C)} y^{\sum_i \pi_{i,i}} q^{|\pi|} \prod_{i=1}^A \prod_{k=1}^{\pi_{i,i}} \frac{1 + (-1)^i q^{C+i-k}}{1 + (-1)^i yq^{C+i-k}} = \prod_{i=1}^A \frac{1 - yq^{C+2i-1}}{1 - yq^{2i-1}} \prod_{1 \leq i < j \leq A} \frac{1 - y^2 q^{2(C+i+j-1)}}{1 - y^2 q^{2(i+j-1)}} \quad (4)$$

本研究の目標は予想式 (4) の証明であるが、それは未達である。実は予想式 (4) の左辺の和はパフィアンで表せるため、予想式 (4) の証明はパフィアンの計算に帰着する。パフィアンの計算にはパフィアンの恒等式が役に立つと期待されるが、どの恒等式をどのように用いればよいかは現状ではわからない。本稿では予想式 (4) の証明を目指した試行錯誤の中で得られた、対称平面分割の言葉で解釈可能 (でパフィアンの恒等式を用いるのに役立ちそう) なパフィアンを紹介する。

2 対称平面分割とパフィアン

対称平面分割は非交叉格子路と一対一に対応する．この対応を利用すると対称平面分割の分配関数をパフィアンで表すことが可能になる [4]．今の場合，非交叉径路とパフィアンを関係づける Ishikawa–Wakayama の補題 [5] から次のようなパフィアンをつくることができる．

定理 2 A, C を任意の非負整数とする． N を C と偶奇が同じ非負整数とし， $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$ を $0 \leq v_1 < \dots < v_N < A + C + N$ を満たす非負整数の組とする．このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \text{SPP}(A, C+N; \mathbf{v})} y^{\sum_i \pi_{i,i}} q^{|\pi|} \prod_{i=1}^A \prod_{k=1}^{\pi_{i,i}} \frac{1 + (-1)^i q^{C+N+i-k}}{1 + (-1)^i y q^{C+N+i-k}} \\ = \text{pf}(0, \dots, A+C-1, t_{v_1}, \dots, t_{v_N}, -q^{-1}, -q^{-3}, \dots, -q^{-2A+1}) \\ \times \frac{(-1)^{AC} q^{A^2 C + \frac{A(A-1)(4A+1)}{6}}}{\prod_{i=1}^A (q^2; q^2)_{i-1} \prod_{k=1}^{\frac{C+N}{2}} \alpha_{2k-2} \beta_{2k-1}} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで $\text{SPP}(A, C'; \mathbf{v})$ は， A 行 A 列で成分が高々 C' の対称平面分割 π で主対角成分が次の条件を満たすものの全体である．

- $v_\ell - C' + 1$ 番目以降の主対角成分を $\pi_{k+1,k+1}, \pi_{k+2,k+2}, \pi_{k+3,k+3}, \dots$ とおく ($k = v_\ell - C'$) とき， $\pi_{k+i,k+i} \geq i > k_{k+i+1,k+i+1}$ を満たす $i \geq 1$ が存在する．

また (5) の右辺は次の成分で定義されるパフィアンである．

$$\begin{aligned} \text{pf}(i, j) &= \text{pf}(i, t_j) = \text{pf}(t_i, t_j) = \alpha_i \beta_j, & \text{pf}(i, -q^{-2j+1}) &= (-q^{2j+1})^i \\ \text{pf}(t_i, -q^{2j+1}) &= \text{pf}(-q^{-2i+1}, -q^{2j+1}) = 0 & (i, j &= 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (6)$$

ただし $\alpha_i = y^i \prod_{k=1}^i \frac{1+(-q)^k}{1+y(-q)^k}$ ， $\beta_i = y^i \prod_{k=1}^i \frac{1-(-q)^k}{1-y(-q)^k}$ である．

数式処理を用いた計算機実験によると，(5) の右辺のパフィアンはパラメータ \mathbf{v} が特別な場合な単純な因子の積に分解できるようである．

謝辞 本研究は JSPS 科研費 25K07126 の助成を受けたものです．

参考文献

- [1] S. Kamioka, A triple product formula for plane partitions derived from biorthogonal polynomials, in: Proceedings of FPSAC 2016 (Vancouver, Canada), pp. 671–682, 2016.
- [2] G. E. Andrews, Plane partitions. I. The MacMahon conjecture, in: Studies in Foundations and Combinatorics, Adv. in Math. Suppl. Stud., Vol. 1, pp. 131–150, 1978.
- [3] 上岡修平，森居数広，平面分割に関連するパフィアンについて，九州大学応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6 「非線形波動研究の深化と展開」，67–72，2017.
- [4] 上岡修平，対称平面分割の母関数のパフィアン表示九州大学応用力学研究所研究集会報告 No.29AO-S7 「非線形波動研究の新潮流—理論とその応用」，55–60，2018.
- [5] M. Ishikawa and M. Wakayama, Applications of minor summation formula. III. Plücker relations, lattice paths and Pfaffian identities, J. Combin. Theory Ser. A, Vol. 113 (2006), 113–155.

可積分差分方程式による Bass モデル不適合分析

Goodness-of-fit for Bass model with an integrable difference equation

佐藤 大輔 (Daisuke SATOH)¹,

¹ 福岡工業大学 (Fukuoka Institute of Technology)

e-mail : d-sato@fit.ac.jp

1 はじめに

Bass モデル [1] は代表的な新製品普及モデルであり、数学的には定数係数の Riccati 方程式である。この Bass モデルは最終的な購入者数の予測に使われる他、購入者を他に影響されない先導者（先導購入係数）と他に影響される追随者（追随購入係数）に分け、それぞれの影響力の分析（すべてのパラメータは正）にも用いられる。実データの中には、先導購入係数が負と推定されることがあり、その原因は多重共線性 [2] と指摘されてきた。しかし、Satoh[3] により多重共線性が発生し得ない場合でも先導購入係数が負と推定される実データが存在することがわかった。先導購入係数が負と推定される実データはどのようにモデルに不適合なのかを可積分差分方程式により分析する。

2 Bass モデル

Bass モデルは次の微分方程式で記述される。 $N(t)$ は時間 t までの新製品の累積購入者、 m は最終的な購入者数（飽和値）、 $p(>0)$ は先導購入係数、 $q(>0)$ は追随購入係数である。データから m, p, q のパラメータを推定することで有益な情報を得ることができる。

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(p + \frac{q}{m}N(t)\right)(m - N(t)) \quad (1)$$

式 (1) は以下の解を持つ。

$$N(t) = m \left(\frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}} \right). \quad (2)$$

3 可積分差分方程式

Riccati 方程式に対しては、厳密解を持つ可積分差分方程式が提案 [4] されており、

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{\delta} = p \left(m - \frac{N_{n+1} + N_n}{2} \right) + \frac{q}{m} \left\{ m \left(\frac{N_{n+1} + N_n}{2} \right) - N_{n+1}N_n \right\}. \quad (3)$$

が得られる [3]。式 (3) から以下の回帰式を得る。

$$N_{n+1}N_n = A + BN_n + C(N_{n+1} - N_n) + \varepsilon(n) \quad (4)$$

ここで $A = \frac{m^2 p}{q}$, $B = \frac{m(q-p)}{q}$, $C = \frac{m(q-p-2/\delta)}{2q}$ であり、 $E[\varepsilon(n)] = 0$, $V[\varepsilon(n)] = \sigma^2$ と仮定する。 A, B, C の推定値から $m, \delta p, \delta q$ の推定値を得る。以後 $\delta = 1$ として扱う。式 (4) は厳密解を擬似データとして与えた場合、すなわち Bass モデルに完全に従うデータに対して多重共線性は発生しない [3]。しかしながら、実データによっては先導購入係数 p が負と推定されることがある [3]。

先導購入係数 p が負と推定される実データに対しては Bass モデルが不適であると考えられる。 p が負と推定されると式 (1) の厳密解は本来の S 字曲線を描かないためデータのどの部分がモデルを合っていないのかわからない。また、回帰式の値での比較は困難である。なぜなら $N_{n+1}N_n$ と N_n

と $N_{n+1} - N_n$ との 3 次元における比較となるためである．式 (1) をさらに t で微分した式に対応する可積分差分方程式は式 (5) である．

$$\frac{N_{n+1} - 2N_n + N_{n-1}}{N_{n+1} - N_{n-1}} = \frac{q-p}{2} - \frac{q}{m}N_n \quad (5)$$

4 実データ分析

実データ [2] と式 (4) の回帰式から求まるパラメータによる式 (5) の二乗誤差の平均値を比較した図を図 1 に示す．なお，図 1 において，全体とは，得られている実データ全部を使用したもので，変曲点 ($\frac{\hat{q}-\hat{p}}{2\hat{q}}$) 前とは，変曲点まで，変曲点後とは変曲点後のデータを使用したものである． $p < 0$ のときには変曲点は存在しないが，便宜上 $p > 0$ のときと同様に扱った．RAC(room air conditioner), CTV (color television), CD (clothes dryer) が $p > 0$ と推定され，それ以外は $p < 0$ と推定された．図中 RAC 等の後の括弧内の数値は変曲点の値である．図 1 の全体から $p > 0$ と推定されたデータセットは平均二乗誤差が小さく， $p < 0$ と推定されたデータセットは平均二乗誤差が大きいことがわかる．変曲点後を見ると US は変曲点後の平均二乗誤差が $p > 0$ とデータセットと変わらないことがわかる．一方，AP については変曲点前後にかかわらず平均二乗誤差が大きいことがわかる．

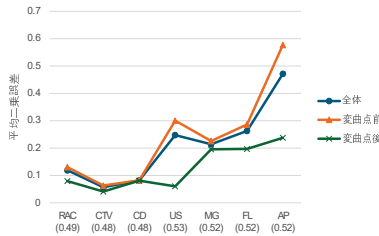


図 1: 平均二乗誤差

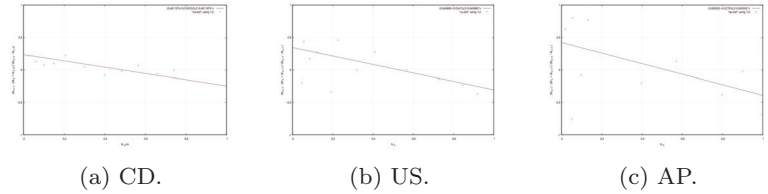


図 2: 厳密解による擬似データのプロット．

CD, US(ultrasound), AP(accelerated program) について式 (5) のプロットを行ったのが図 2 である．CD についてはプロットと直線との違いが小さく Bass モデルがモデルとしてふさわしく，AP では違いが大きくふさわしくないことがわかる．US は変曲点後では Bass モデルに適しているが，変曲点前のデータが適していないために全体としては適していないことがわかる．

5 まとめ

先導購入係数推定値が負となった実データに対して，データのどの部分がモデルと合っていないのかを分析する方法を提案した．

参考文献

- [1] F.M. Bass, *A new product growth for model consumer durables*, Management Science 15 (1969), pp. 215–227.
- [2] V. Mahajan and Y. Wind, *Innovation diffusion models of new product acceptance*, Ballinger Publishing Company, 1986.
- [3] D. Satoh, *A discrete Bass model and its parameter estimation*, Journal of the Operations Research Society of Japan 44 (2001), pp. 1–18.
- [4] R. Hirota, *Lecture on discrete equations*, Saiensu-sha, 2000, (in Japanese).