

拡張型カオス尺度を用いた Lang-Kobayashi 方程式のカオスの定量化について

Quantification of Chaos for Lang-Kobayashi Equation by Extended Entropic Chaos Degree

井上 啓 (Kei Inoue)¹

¹ 山陽小野田市立山口東京理科大学 (Sanyo-Onoda City University)

e-mail : kinoue@rs.socu.ac.jp

1 はじめに

カオスの定量化には、リアプノフ指数がよく用いられているが、力学系に関する情報が時系列データでしか得られない場合は、リアプノフ指数を直接計算することはできない。一方、カオス尺度は、情報力学の観点から導入された力学系のカオスを定量化する指標であり [1]、時系列データのみで計算可能であるが、カオス尺度はリアプノフ指数よりも常に高い値を取る。そこで、カオス尺度とリアプノフ指数の差の解釈に基づき、1次元カオス写像に対して、修正したカオス尺度 (修正カオス尺度) が導入され [2]、拡張型カオス尺度として多次元カオス写像に拡張されている [3]。本研究では、戻り光を有するシングルモード半導体レーザーにおける時間発展を記述した Lang-Kobayashi 方程式 [4] を取り上げ、拡張型カオス尺度によるカオスの定量化を試みる。

2 拡張型カオス尺度

本節では、写像 $f: I \rightarrow I$ ($\equiv [a, b]^d \subset \mathbf{R}^d$, $a, b \in \mathbf{R}$, $d \in \mathbf{N}$) で定義される差分方程式系 (すなわち, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$) における拡張型カオス尺度の定義を述べる。

初期値 x_0 と I の有限分割 $\{A_i\}$:

$$I = \bigcup_{k=0}^{N-1} A_k, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

に対して、差分方程式によって決定される時刻 n の確率分布 $(p_{i,A}^{(n)}(M))$ と時刻 n と $n+1$ の同時確率分布 $(p_{i,j,A}^{(n,n+1)}(M))$ を以下で与える。

$$p_{i,A}^{(n)}(M) = \frac{|\{x_k \in A_i : k = n, n+1, \dots, n+M-1\}|}{M} \quad (1)$$

$$p_{i,j,A}^{(n,n+1)}(M) = \frac{|\{(x_k, x_{k+1}) \in A_i \times A_j : k = n, n+1, \dots, n+M-1\}|}{M}, \quad (2)$$

このとき、軌道 $\{x_n\}$ のカオス尺度 (ECD) は次式で定義される [1]。

$$D^{(M,n)}(A, f) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} p_{i,j,A}^{(n)}(M) \log \frac{p_{i,A}^{(n)}(M)}{p_{i,j,A}^{(n,n+1)}(M)}$$

カオス尺度の定義では、分割要素 A_i が写像 f によって、 $f(A_i)$ に写像されるとき、 $\mu(f(A_i) \cap A_j)$ を $\mu(A_j)$ として扱われてしまう。そこで、カオス尺度の定義において、

$$\mu(f(A_i) \cap A_j) = \mu(A_j) R(S_{i,j}) \quad (3)$$

として扱うスケール関数 $R(S_{i,j})$ が追加された拡張型カオス尺度 (EECD) が導入されている [3].

$$D_S^{(M,n)}(A, f) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} p_{i,j,A}^{(n)}(M) \log \frac{p_{i,A}^{(n)}(M) R(S_{i,j})}{p_{i,j,A}^{(n,n+1)}(M)} \quad (4)$$

3 Lang-Kobayashi 方程式

戻り光を有するシングルモード半導体レーザーにおける時間発展は, Lang-Kobayashi 方程式により記述される. いま, 電界振幅 $E(t)$, 電界位相 $\Phi(t)$, キャリア密度 $N(t)$ とするとき, Lang-Kobayashi 方程式は以下で与えられる [4].

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left[G_N (N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] E(t) + \kappa E(t - \tau) \cos \Theta(t) \quad (5)$$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\alpha}{2} \left[G_N (N(t) - N_0) - \frac{1}{\tau_p} \right] - \kappa \frac{E(t - \tau)}{E(t)} \sin \Theta(t) \quad (6)$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = J - \frac{N(t)}{\tau_s} - G_N (N(t) - N_0) E^2(t) \quad (7)$$

$$\Theta(t) = \omega_0 \tau + \Phi(t) - \Phi(t - \tau) \quad (8)$$

なお, レーザー出力の光強度 $I(t) = E^2(t)$ である.

文献 [4] では, Lang-Kobayashi 方程式の最大リアプノフ指数の計算結果が示されており, 戻り光を有する半導体レーザーは戻り光量 κ の値によりカオスを生じることが知られている (図 1). なお, Lang-Kobayashi 方程式の拡張型カオス尺度の数値計算結果については, 本発表時に紹介する.

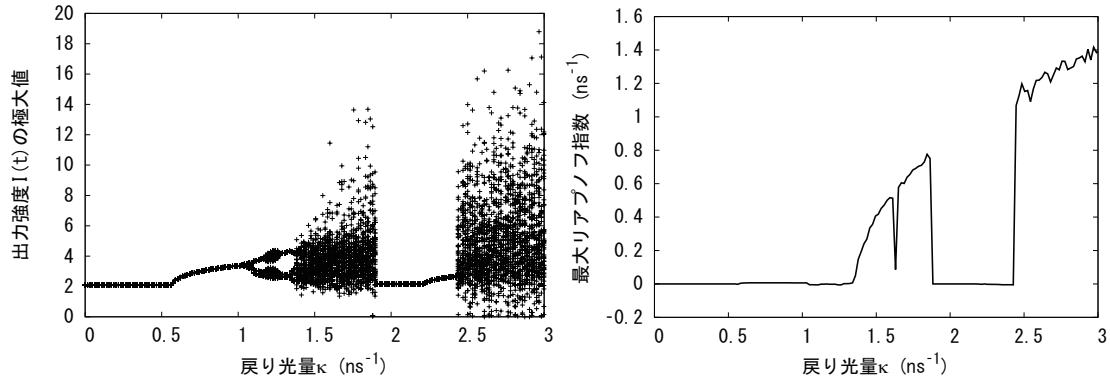


図 1. Lang-Kobayashi 方程式の軌道と最大リアプノフ指数

謝辞 本研究は JSPS 科研費 24K15111 の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] M. Ohya, Complexities and Their Applications to Characterization of Chaos, Int. J. Theo. Phys., Vol.37, pp. 495-505, 1998.
- [2] 真尾朋行, 奥富秀俊, 梅野健, カオス尺度とリアプノフ指数の差の解釈に基づく修正カオス尺度の提案, 日本応用数理学会論文誌, Vol. 29(4), pp. 383-394, 2019.
- [3] K. Inoue, T. Mao, H. Okutomi and K. Umeno, An extension of the entropic chaos degree and its positive effec, Japan J. Indust. Appl. Math., Vol.38(2), pp. 611-624, 2021.
- [4] 内田淳史, 複雑系フォトニクス, 共立出版, 2016.

カオス超越性を用いたレーザーカオスによるTHz波の出力

Laser Chaos excited THz output power using Chaotic Supremacy

栗島 史欣(Fumiyoshi Kuwashima)¹, Jarrahi Mona (Mona Jarrahi)², Cakmakyapan Semih (Semih Cakmakyapan)², 和田 健司 (Kenji Wada)³, 原口 雅宣(Masanobu Haraguchi)⁴, 川上 由紀(Yuki Kawakami)⁵, 守安 毅(Takeshi Moriyasu)⁶, 森川 治(Osamu Morikawa)⁷, 栗原 一嘉(Kazuyoshi Kurihara)⁸, 北原 英明(Hideaki Kitahara)⁹, 古屋 岳(Takashi Furuya)⁹, 中嶋 誠(Makoto Nakajima)¹⁰, 谷 正彦(Masahiko Tani)⁹

¹ 追手門学院大学(Otemon Gakuin University), ² UCLA(University of California Los Angeles), ³ 大阪公立大学(Osaka Metropolitan University), ⁴ 徳島大学(Tokushima University), ⁵ 福井工業高等専門学校(National Institute of Technology (KOSEN), Fukui College), ⁶ 福井大学工学部(Faculty of Engineering, University of Fukui), ⁷ 海上保安大学校(Japan Coast Guard Academy), ⁸ 福井大学教育学部(School of Education, University of Fukui), ⁹ 福井大学遠赤外線領域開発センター(Research Center for Development of Far-Infrared Region, University of Fukui), ¹⁰ 大阪大学(Osaka University)

e-mail: f12_kuwashima@outlook.jp

1 概要

カオスの持つ統計的性質が初期値、擾乱によらず速やかに収束し、負相関を示すという特性は、カオスモンテカルロ計算の超収束性やレーザーカオスによる高安定高効率 THz 波発生などの他にはない卓越した特長であるカオス超越性をもたらす。

カオス時系列は揺らぎを持ち、不安定なように見えるが、位相空間での、時間発展する軌道を引き付ける性質を持った領域であるアトラクターは、位相空間を広く埋めているために外乱により解の軌道がずれたとしても同じアトラクターの中にとどまり続ける。一般的な秩序状態御用いる場合は、同じ周期状態を維持するためには、制御が必要となり、エネルギー効率が悪化する。カオスは自律的系であるために、エネルギー効率に優れている。カオスはこのような、構造安定性を持っている。またランダムな信号とは異なり相関を持っている信号であり、その相関が時間とともに消えてゆくのが特徴である。このカオスを半導体レーザーに応用すると、光スペクトルの広いレーザーカオス光を生成できる。スペクトルの広がり方や、揺らぎの周波数は、レーザーのダイナミックスで異なる。

ただし、いずれのレーザーでもカオス発振は可能である^{1,2)}。

このカオス光を THz 波発生のための光伝導アンテナの励起に用いると、高安定、広帯域で安価な THz 波の発生及び検出が可能となる³⁾。この内容は、実際の系でカオス超越性を実証した初めての例となる³⁾。この内容についても述べる。

数値計算においては梅野らによって、高速のモンテカルロ計算の収束性が得られることが以前から示されており、これがカオス超越性の発見となっている⁴⁾。

カオスを考えるときには時定数の概念が非常に大切になる。図 1 に THz 波発生に用いる半導体レーザーの時定数についてまとめた。これまで、光スペクトルが広帯域で安定なタイプのカオス光を THz 波発生には主に用いてきた。分光器の時定数や、ロックインの時定数においては、時間平均が行われているため、統計平均が早く収束し安定な側面が表に出て、安定

性の側面が強調される。また、ダウンコンバートの実験により、0.1ms オーダーまでは安定であることが実証されている。これより高速の領域は今後の課題である。

一方、レーザーの時系列は緩和振動の GHz オーダーの振動や、外部鏡モードを移動する LFF (Low Frequency Fluctuation 10MHz オーダー) の振動が観測される。ただし、THz 発生に用いるのは、レーザー縦モード間の光ビート (数十 GHz~数 THz) であり、多くのモード間の事象平均となっているため、光ビートそのものは、安定な可能性もある。この点も今後の課題である。時定数の関連についても講演で述べる。

Gun オシレータをリファレンスとした、この系での THz 波の出力測定についても述べる。

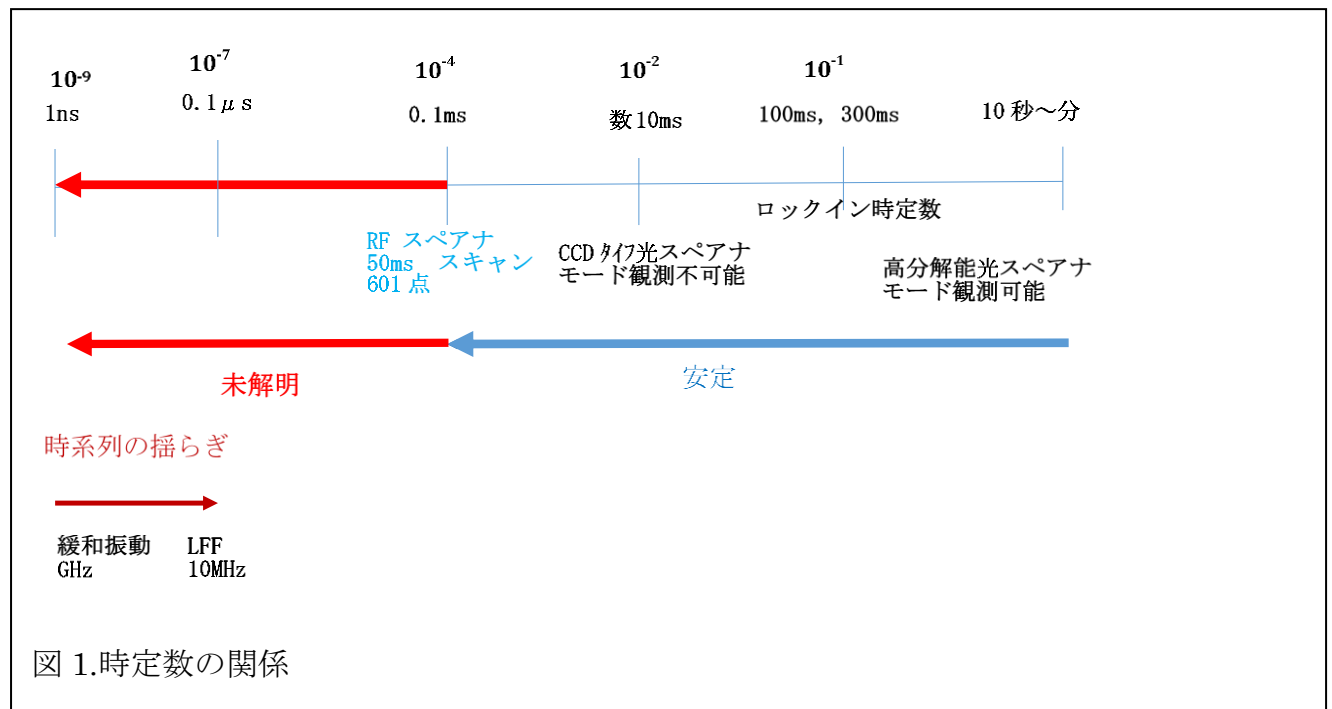


図 1.時定数の関係

謝辞 本研究の一部は、JSPS 科研費 JP20K04629, および、総務省 SCOPE(受付番号 JP225005002)の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] F. Kuwashima, T. Ichihikawa, I. Kitazima, and H. Iwasawa, "Chaotic Oscillation in a Single-Mode Class A He-NeLaser (6328Å) II," Jpn. J. Appl. Phys. 38(Part 1, No. 11), 6321-6326 (1999).
- [2] F. Kuwashima, I. Kitazima, and H. Iwasawa, "Theory of Chaotic Dynamics on Class A Laser with Optical DelayedFeedback," Jpn. J. Appl. Phys. 40(Part 1, No. 2A), 601-608 (2001).
- [3] F. Kuwashima, M. Jarrahi, S. Cakmakyapan, T. Shirao, K. Iwao, K. Kurihara, O. Morikawa, H. Kitahara, T. Furuya, K. Wada, M. Nakajima, M. Tani, "Evaluation of High-Stability Optical Beats in Laser Chaos by Plasmonic Photomixing", Optics Express, 28, 24833-24844, 2020
- [4] K. Umeno, "Chaotic Monte Carlo Computation: A Dynamical Effect of Random-Number Generation," Jpn. J. Appl. Phys. 39(Part 1, No. 3A), 1442-1456 (2000).

心拍変動における加齢に伴うカオス尺度の変化

Age-related changes in the chaos degree of heart rate variability

真尾 朋行 (Tomoyuki Mao)¹, 奥富 秀俊 (Hidetoshi Okutomi)¹, 梅野 健 (Ken Umeno)²

¹ 東芝情報システム株式会社 (Toshiba Information Systems (Japan) Corporation)

² 京都大学大学院情報学研究科 (Graduate School of Informatics, Kyoto University)

e-mail : tomoyuki.mao@toshiba.co.jp

1 概要

心臓の拍動は自律神経によって制御されており、心拍を加速する交感神経と心拍を減速する副交感神経とが拮抗的に作用することにより拍動の時間間隔にはゆらぎが生じる。この現象は心拍変動とよばれる。心拍間隔 (RRI) データの分析による自律神経活動の評価方法は線形分析による手法が標準化されている [1] が、非線形分析の導入により従来とは異なる視点から新たな知見が得られることも期待されている。

心拍変動と加齢との関係について調べた先行研究 [2] では、年齢と SDNN (自律神経活動を評価する線形指標の一つ) 等との間に両対数プロットにおいて直線状の関係があり、12 歳付近で正の傾きから負の傾きに転じることが報告されている。図 1 に年齢と SDNN の関係を示す。

本研究では、先行研究 [2] でも用いられている公開データを用い、データから測るカオス性という観点から心拍変動と加齢との関係がどのように特徴付けられるのかを調査した。分析に用いた 3 つのデータセット [3, 4, 5] は、健常者を対象に行われたホルター心電計による 24 時間計測データであり、いずれも PhysioNet[6] にて公開されている。

2 カオス尺度

カオス性を測る指標としては、カオスの性質の一つである初期値鋭敏性を測るリアプノフ指数が代表的であるが、解析的に求めるには対象の系を記述する方程式などの情報が必要であり、データから推定するには多くのデータと計算量が必要となる。本研究では、情報理論の観点からカオスを定量化する指標として提案され、データ系列のみから計算が可能であるカオス尺度 [7] を用いる。

カオス尺度の定義は以下の通りである。写像 $f: I \rightarrow I$ ($\equiv [a, b]^d \subset \mathbf{R}^d$, $a, b \in \mathbf{R}$, $d \in \mathbf{N}$) で定義される差分方程式系 ($x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$) において、初期値 x_0 と I の有限分割 $\{A_i\}$:

$$I = \bigcup_{k=1}^N A_k, A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)$$

に対して、差分方程式によって決定される時刻 m の確率分布 $p(i)$ と、時刻 m と $m+1$ の同時確率分布 $p(i, j)$ を、それぞれ

$$p(i) = \frac{\#\{x_k \in A_i; k = m, m+1, \dots, m+M-1\}}{M},$$

$$p(i, j) = \frac{\#\{(x_k, x_{k+1}) \in A_i \times A_j; k = m, m+1, \dots, m+M-1\}}{M}$$

で与える。このとき、軌道 $\{x_k\}$ のカオス尺度 H_{CD} は以下で定義される。

$$H_{CD} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p(i, j) \log \frac{p(i)}{p(i, j)}$$

3 結果と考察

3つのデータセットを用いて心拍間隔（RRI）データのカオス尺度を計算し，横軸に年齢，縦軸にカオス尺度をプロットしたものを図2に示す．なお，先行研究に合わせて両対数プロットとした．

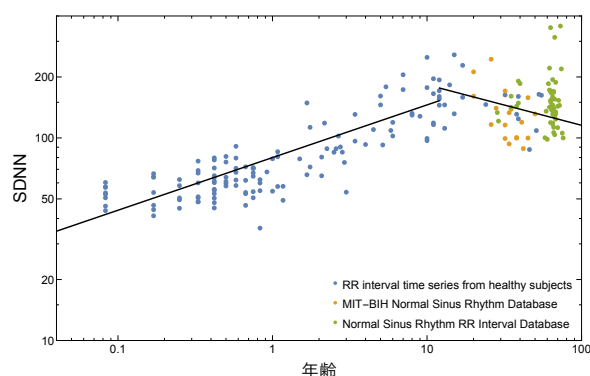


図1. 先行研究 [2] で報告されている年齢と SDNN の関係.

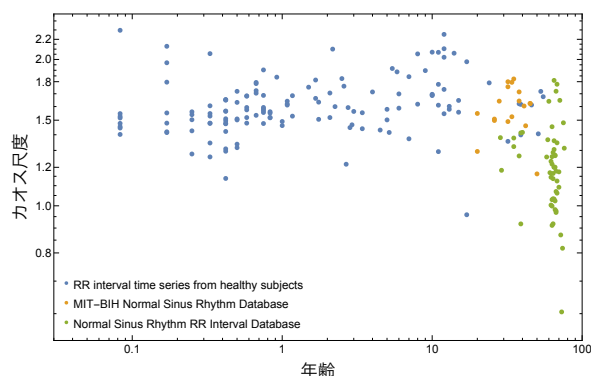


図2. 年齢とカオス尺度の両対数プロット.

図2に示した RRI データのカオス尺度と年齢のプロットでは，先行研究 [2] で報告されている 12 歳付近での顕著な変化は確認されなかったが，一方で，60 歳付近におけるカオス尺度の大きな低下が見られた．これは，カオス尺度が SDNN のような従来の線形指標とは異なる年齢依存性を示すことを意味している．SDNN 等の指標には現れない 60 歳付近での変化をカオス尺度が捉えていることから，心拍変動に対する老化の影響を評価する新たな指標として，カオス尺度が有用である可能性が示唆される．

参考文献

- [1] M. Malik, J. T. Bigger, A. J. Camm, R. E. Kleiger, A. Malliani, A. J. Moss, and P. J. Schwartz. Heart rate variability: Standards of measurement, physiological interpretation, and clinical use. *European Heart Journal*, Vol. 17(1996), 354—381.
- [2] Garavaglia L, Gulich D, Defeo MM, Thomas Mailland J, Irurzun IM, The effect of age on the heart rate variability of healthy subjects. *PLOS ONE* Vol. 16(2021), e0255894.
- [3] Irurzun IM, Garavaglia L, Defeo MM, Thomas Mailland J, RR interval time series from healthy subjects. 2021, <https://doi.org/10.13026/c61a-z467>
- [4] Mood G, MIT-BIH Normal Sinus Rhythm Database. 1999, <https://doi.org/10.13026/C2NK5R>
- [5] Stein P, Normal Sinus Rhythm RR Interval Database. 2003, <https://doi.org/10.13026/C2S881>
- [6] Goldberger AL, Amaral LA, Glass L, Hausdorff JM, Ivanov PC, Mark RG, Mietus JE, Moody GB, Peng CK, Stanley HE, PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: components of a new research resource for complex physiologic signals. *Circulation*, Vol. 101(2000), e215—e220.
- [7] M. Ohya. Complexities and their applications to characterization of chaos. *International Journal of Theoretical Physics*, Vol. 37(1998), 495—505.

遅延微分方程式に基づく馴化の数理モデルとその入力感受性に関する考察

小松 瑞果 (Mizuka Komatsu)¹, 磯島 隆史 (Takashi Isoshima)² 榎島 史欣 (Fumiyoshi Kuwashima)³

¹ 神戸大学 (Kobe University), ³ 理化学研究所 (RIKEN), ³ 追手門学院大学 (Otemon Gakuin University)

e-mail : m-komatsu@bear.kobe-u.ac.jp

1 はじめに

繰り返し与えられた刺激（反復刺激）に対する慣れは、多くの生物に共通して観察される現象であり、生物学的リソースを節約するための戦略の一つである。心理学や神経科学などの分野では、このような慣れを馴化（Habituation）と呼ぶ。特に、反復刺激に対する生体による応答の減衰のうち、受容体の疲労などではない現象を指す。馴化の様相は個別の系によって異なるが、その多くに共通する性質があり、刺激と応答に関する 10 個のパラメータ特性として体系化されている [1]。これらの特性は馴化に関する研究の基礎となっている。特に、数理モデリングに関する研究では、近年、馴化を表す数理モデルによる特性に関する再現性の評価 [2] や特性の数学的定式化 [1] などが進みつつある。

馴化の分子レベルのメカニズムの一つとして、可逆的な酵素反応やその組み合わせが挙げられる。一般に、このようなメカニズムではシグナル伝達の遅延が発生し、生体反応に様々な影響が生じる [3]。しかし、このように発生する遅延の馴化への影響については、ほとんど研究されていない。そこで本研究では、馴化を表す既存の数理モデルに対し遅延効果を導入することで、馴化の様相やパラメータ特性への遅延による影響を明らかにする。

2 Negative Feedback モデルと遅延 Negative Feedback モデル

本研究では、可逆的な酵素反応に基づく馴化の数理モデルとして Negative Feedback モデル [1] に着目する。これは、外力として反復刺激 $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ($T > 0$) が与えられた 3 変数の常微分方程式

$$\dot{x}_1 = k_1 u - k_2 x_1, \quad \dot{x}_2 = k_3 x_3 - k_4 x_2, \quad \dot{x}_3 = k_5 x_1 - k_6 x_2 x_3. \quad (1)$$

として記述される。ここで x_1, x_2, x_3 は時刻 t の関数であり、それぞれ反復刺激を受け取る変数、応答を表す変数、記憶を表す変数である。また、 $x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T = (0, 0, 0)^T$ とする。(1) の各式は可逆的な酵素反応の簡約表現であり、 $k_1, \dots, k_6 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ はパラメータである。本研究では、矩形波の連続関数表現を反復刺激として扱い、そのもとで (1) の解の存在と一意性を仮定する。以下、反復刺激の定式化の一例を示す。 $F, w, f \in \mathbb{R}^+$ が与えられたもと、矩形波 $\tilde{u} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} F & t \in [t_i, t_i + w] \quad (i = 1, \dots, \lfloor f \rfloor), \\ 0 & t \notin [t_i, t_i + w]. \end{cases} \quad (2)$$

と定める。ここで、 $\lfloor \cdot \rfloor$ は床関数とし、 $t_i := (i-1)T/f$ とおく。 \tilde{u} を刻み幅 Δt ($0 < \Delta t < w$) でサンプリングし、その連続関数補間を反復刺激 $u \in C([0, T], \mathbb{R})$ と定める。このとき、 F, w, f は、それぞれ刺激の強度、各刺激の継続時間、 $[0, T]$ における刺激の回数に対応する。また、周期を ΔT とおき、本稿では w ($0 < w < \Delta T = T/f$) を定数と仮定する。次に、 i ($i = 1, \dots, \lfloor f \rfloor$) 番目の刺激に対する応答を $y[i] \in \mathbb{R}$ とおき、(1) における $y[i]$ の評価方法を定める。本研究では、区間 $[t_i, t_i + \Delta T]$

における x_3 の最大値が一つだけ存在することを仮定し、これを $y[i]$ とする．以下、刺激の回数 f を強調し、 u を $u(t; f)$ 、 $u(t; f)$ が与えられた際の $y[i]$ を $y[i; f]$ と表記することがある．

著者らは $F, w, \Delta t$ 、補間手法、 f が属する区間 $[f_\alpha, f_\beta]$ およびモデルパラメータ (k_1, \dots, k_6) を適当に固定したもとで、区間 $[0, T]$ 上で定義された Negative Feedback モデル (1) が、以下の 2 つの特性 (文献 [1] における特性 1, 4 を一部改変) を満たすことを、予備的数値実験において確認した．

定義 1 (特性 1) 以下の (1), (2) が成り立つ反復刺激 $u(t; f)$ が存在するとき、モデルは特性 1 を満たすという．(1) 任意の $1 \leq i \leq \lfloor f \rfloor$ について $0 \leq y[i+1] \leq y[i]$ が成り立つ．(2) $i = 1, \dots, I$ に対し $y[i+1] < y[i]$ が成り立つような $1 < I \leq \lfloor f \rfloor$ が存在する．

定義 2 (特性 4) 特性 1 が成り立つ反復刺激の周期の集合を U_T とおく． $\Delta T_1 < \Delta T_2 \in U_T$ なる任意の $\Delta T_1 := T/f_1, \Delta T_2 := T/f_2$ に対し、 $y[i; f_1] \leq y[i; f_2]$ ($i = 2, 3, \dots, \lfloor f \rfloor$) が成り立つとき、モデルは特性 4 を満たすという．

1 節に述べた背景を踏まえ、本研究では、(1) の第二式に遅延効果を表す項の導入を提案する：

$$\dot{x}_2(t) = k_3 x_3(t) - k_4 x_2(t) + c x_2(t - d). \quad (3)$$

ここで $c \geq 0$ は遅延効果の大きさ、 $d \geq 0$ は遅延時間を表すパラメータであり、 $c \neq 0, d \neq 0$ のとき $c x_2(t - d) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ は記憶における遅延効果を表す．(1) の第一式、(3)、(1) の第三式からなる遅延微分方程式を、遅延 Negative Feedback モデルとよぶ．ここで、遅延 Negative Feedback モデルの左辺におけるドットは時刻 t に関する右側微分を表し、遅延項の初期関数を零関数と定める．また、各刺激に対する応答は (1) と同様に評価する．(1) が特性 1, 4 を満たす条件のもと、 (c, d) を変化させ数値計算を行った結果、 (c, d) の値によっては遅延 Negative Feedback モデルも特性 1, 4 を満たすことが分かった．また (1) と、特性 1 および 4 を満たす遅延 Negative Feedback モデルに対し、過渡状態と定常状態における減衰の程度を、 $y[2; f]$ と $y[1; f]$ の傾きや文献 [1] において定められた指標等により評価した．その結果、遅延 Negative Feedback モデルがより顕著な減衰を示す場合があると分かった．本結果は、遅延効果がより効率的な馴化を引き起こす可能性を示唆するものである．数値実験および考察の詳細については講演で説明する．

謝辞 第一著者は JST ACT-X (PMJAX22A7) および JSPS 科研費 (22K21278, 24K16963) による支援を受けた．

参考文献

- [1] Matthew Smart, Stanislav Y. Shvartsman, and Martin Mönnigmann. Minimal motifs for habituating systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 121, No. 41, p. e2409330121, 2024.
- [2] Lina Eckert, Maria Sol Vidal, Ziyuan Zhao, Jordi Garcia-Ojalvo, Rosa Martinez-Corral, and Jeremy Gunawardena. Biochemically plausible models of habituation for single-cell learning. *Current Biology*, Vol. 34, pp. 5646–5658, 2024.
- [3] J. Srividhya, M.S. Gopinathan, and Santiago Schnell. The effects of time delays in a phosphorylation – dephosphorylation pathway. *Biophysical Chemistry*, Vol. 125, No. 2, pp. 286–297, 2007.