

Extreme Learning Machineによる越分岐予測

Trans-Bifurcation Prediction of Dynamics in terms of Extreme Learning Machines

田所 智 (Satoru Tadokoro)¹, 山口 明宏 (Akihiro Yamaguchi)²,

行木 孝夫 (Takao Namiki)^{1,3}, 津田 一郎 (Ichiro Tsuda)⁴

¹北海道大学大学院 理学研究院数学部門 (Department of Mathematics,

Faculty of Science, Hokkaido University), ²福岡工業大学 情報システム工学科

(Department of Information and Systems Engineering, Fukuoka Institute of

Technology), ³北海道大学 数理・データサイエンス教育研究センター (Education and Research Center for Mathematical and Data Science, Hokkaido University),

⁴札幌市立大学 AIT センター (AIT Center, Sapporo City University)

e-mail: tadokoro@math.sci.hokudai.ac.jp

1 概要

制御入力を付け加えて拡張したエコーステートネットワークに力学系の分岐パラメータのある値での時系列を学習させ、それを使って学習時のパラメータ値とは異なる値での力学系の振る舞いや分岐構造を予測できることが報告されている[1]. 我々は同様の拡張をエクストリームラーニングマシン (ELM) に施したもの (ELMC) が同様な予測能力を持つことを示し、このような予測を「越分岐予測」と呼び、そのメカニズムを明らかにした[2]. 一方で、通常の ELM と主成分分析を組み合わせ、このような予測を行なう試みが 90 年代からあり[3], 最近でもその流れに沿った研究が行われている[4].

本研究では、分岐パラメータを a とした次のような形の関数による写像力学系

$$f(a, x) = ap(x) + q(x) \quad (1)$$

(ロジスティック写像, エノン写像等, 多くの写像力学系はこの形をしている) を対象として、通常の ELM を使って力学系の分岐パラメータ空間の 2 点において学習を行い、線形補間を使って、PCA を使わずに、越分岐予測が行えることを示す.

2 ELM と線形補間による越分岐予測の方法

M 次元の入力 x , M 次元の出力 y を持ち, N 個の隠れ層ニューロンからなる ELM を考える. 出力 y は以下で表される.

$$y_i = \sum_{j=1}^N W_{ij}^{out} \tanh \left(\sum_{k=1}^M W_{jk}^{in} x_k + \theta_j \right) \quad (2)$$

ここで W^{in} と W^{out} はそれぞれ入力層から隠れ層への、隠れ層から出力層への結合係数行列で、 θ は隠れ層ニューロンのバイアスである. W^{in} , θ は乱数で決め. W^{out} は y とその教師信号との平均二乗誤差を最小にするように決める. 学習データは力学系の n ステップ目の値を説明変数とし、それに対応する目的変数 (教師信号) は $n+1$ ステップ目の値となるように構成する.

越分岐予測は次のようにして行う. 分岐パラメータの 2 点 a_1 , a_2 において、学習データセットを 1 つずつ用意して学習を行うと、2 つの W^{out} が得られる. これらを $W^{out}(a_1)$, $W^{out}(a_2)$ と書く. 概要で述べた形を持つ力学系に対しては、この 2 つの係数から、線形補間によって、任意の分岐パラメータ値 a における $W^{out}(a)$ が以下のように得られる.

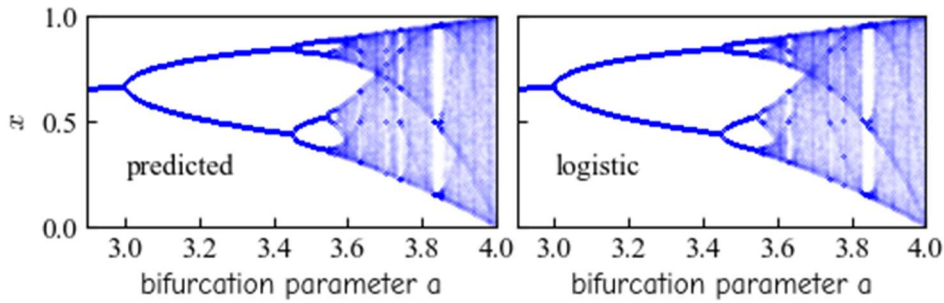
$$\mathbf{W}^{out}(a) = \mathbf{W}^{out}(a_1) + (a - a_1) \frac{\mathbf{W}^{out}(a_2) - \mathbf{W}^{out}(a_1)}{a_2 - a_1} \quad (3)$$

式(3)を式(2)の \mathbf{W}^{out} に代入して、出力を再帰的に入力すると、予測時系列を得るための式が得られる。

$$x(n+1) = \mathbf{W}^{out}(a) \tanh(\mathbf{W}^{in}x(n) + \theta) \quad (4)$$

3 適用例

上述の方法をロジスティック写像に適用した。隠れ層ニューロンの個数は10個とし、 \mathbf{W}_{ij}^{in} は $[-2, 2]$ の一様乱数とし、 θ_i は $\tanh(\theta_i)$ が $[-1, -0.8] \cup [0.8, 1]$ に分布するようにランダムに決めた。学習は分岐パラメータ $a = 2.9, 3.1$ の2点で行い、式(4)を使って予測時系列を求めて描いた分岐図が以下の図である。ロジスティック写像の分岐図をよく再現出来ている。



微分方程式系でも4次のRunge-Kuttaで離散化して、時間刻み幅 Δt の高次項が無視できる場合には分岐パラ

メータを線形で含む写像力学系と見なせるケースがある。このような例としてLorenz系があり、これに対してもこの手法で越分岐予測が可能なことを確認した。

4 まとめ

本研究では、分岐パラメータを線形の形で含む写像力学系を対象に、ELMと線形補間を使い、越分岐予測をする手法を提案し、ロジスティック写像への適用例を示した。分岐パラメータを非線形な形で含むような力学系へ適用するための拡張や、ELMC（制御入力付ELM）との関係は今後の課題である。

謝辞 本研究は科学研究費補助金23K2578503の支援を受けた。

参考文献

- [1] J. Z. Kim, Z. Lu, E. Nozari, G. J. Pappas, and D. S. Bassett, "Teaching recurrent neural networks to infer global temporal structure from local examples," Nat. Mach. Intell. 3 (2021), 316-323.
- [2] S. Tadokoro, A. Yamaguchi, T. Namiki, and I. Tsuda, "Trans-bifurcation prediction of dynamics in extreme learning machines with control inputs," arXiv:2410.13289 [nlin.CD]
- [3] R. Tokunaga, S. Kajiwara, and T. Matsumoto, "Reconstructing bifurcation diagrams only from time-waveforms," Physica D 79, 348 (1994).
- [4] Y. Itoh, Y. Tada, M. Adachi, "Reconstructing bifurcation diagrams with Lyapunov exponents from only time-series data using an extreme learning machine," Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE 8, 2 (2017)

時間反転対称性をもつシンプレクティック写像における Bernoulli 性と平衡測度の唯一性

Bernoulli Property and Uniqueness of the Equilibrium Measure in a Time-Reversal-Symmetric Symplectic Map

大久保 健一 (Ken-ichi Okubo)¹, 梅野 健 (Ken Umeno)²,

¹ 公立諏訪東京理科大学 (Suwa University of Science), ² 京都大学 (Kyoto University)

e-mail : okubo.kenichi@rs.sus.ac.jp

1 時間の矢の問題に関する歴史とカオス仮説

時間反転対称性とは、「逆再生しても同じ法則で動く」性質のことである。映像を逆再生したときに、映像が妙に見えないならその運動には時間反転対称性があり、時間反転作用素 R を用いて、数学的には $R \circ T \circ R = T^{-1}$ で定義される。現実にはミクロには時間反転対称性を持ちつつ、マクロには不可逆な振る舞いを示す現象が知られており、19 世紀には Boltzmann はエルゴード仮説を仮定して H 関数の単調減少によって説明を試みたが、彼の主張に対して、Loschmidt や Zermelo による反論が行われた。彼らは相空間の 1 点が状態を表すと考えていたが、Gibbs によってアンサンブルの概念が提案された。Gibbs は相空間の集団の平均的な振る舞いによって状態が決まると考え、Loschmidt らの指摘の回避を試みた。現代の数学において、状態とは密度関数の形で表され [1]、系の状態が平衡状態に緩和することは、平衡測度 (Lebesgue 測度) に対応する密度関数に初期密度関数が収束することで説明される。Gallavotti はエルゴード仮説を発展させたカオス仮説 (我々が興味ある力学系は Anosov diffeomorphism であろう) を唱えた [2]。本研究では、時間反転対称性を持つあるシンプレクティック写像が Anosov diffeomorphism である条件を求めた。その条件を満たすとき、力学系が Bernoulli であり、Lebesgue 測度が唯一の equilibrium state であり、唯一の SRB 測度であることを示す [3]。本講演では、カオス仮説の仮定が満たされたモデルを提案する。

2 考える力学系

本研究では、コンパクトな領域 I_{δ_N} 上で定義された、式 (1) で定義される時間反転対称性を持つ以下の $C^{1+\alpha}$ 級シンプレクティック写像 $\tilde{T}_{\varepsilon, \Delta\tau} : I_{\delta_N}^2 \rightarrow I_{\delta_N}^2$ を考える。

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(t_n) \\ h(s_n, t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_n \\ 2t_n - s_n + 2\varepsilon(\Delta\tau)^2 \tan(\pi t_n) \mod I_{\delta_N} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

この写像はキック作用のあるハミルトン系から導出した写像から構成できる。

3 写像 $\tilde{T}_{\varepsilon, \Delta\tau}$ の Anosov 性と平衡分布の唯一性

力学系 $(I_{\delta_N}^2, \tilde{T}_{\varepsilon, \Delta\tau}, \mu)$ (μ は $I_{\delta_N}^2$ 上の Lebesgue 測度) に対して以下の定理が成り立つ。

定理 1 $\varepsilon < 0$ または $\frac{2}{\pi(\Delta\tau)^2} < \varepsilon$ (条件 1) を満たすとき、 $\tilde{T}_{\varepsilon, \Delta\tau}$ は Anosov diffeomorphism である。

(証明のスケッチ): 接空間上にコーンを考え、コーン上の接ベクトルが伸びつつけることを示す。

定理 2 (条件 1) を満たすとき、力学系 $(I_{\delta_N}^2, \tilde{T}_{\varepsilon, \Delta\tau}, \mu)$ において、 μ は equilibrium state であり、 $(I_{\delta_N}^2, \tilde{T}_{\varepsilon, \Delta\tau}, \mu)$ は mixing 性をもち、topologically mixing 性をもつ。

(証明のスケッチ): 定理 1 と文献 [4] の Theorem 20.4.1 を利用。

定理 3 (条件 1) を満たすとき, $(I_{\delta_N}^2, \tilde{T}_{\varepsilon, \Delta\tau}, \mu)$ において, Lebesgue 測度 μ は唯一の equilibrium state であり, 力学系 $(I_{\delta_N}^2, \tilde{T}_{\varepsilon, \Delta\tau}, \mu)$ は Bernoulli 性をもつ.

(証明のスケッチ): 定理 2 より $\varepsilon < 0$ または $\frac{2}{\pi(\Delta\tau)^2} < \varepsilon$ を満たすとき, 力学系はエルゴード的なので, indecomposable であり, spectral decomposition によって, non-wandering set $NW(\tilde{T}_{\varepsilon, \Delta\tau}) = I_{\delta_N}^2 = \Omega_1$ (Ω_1 は唯一の Basic set). Anosov's closing lemma と文献 [5] の Theorem 4.1 より μ は唯一の equilibrium state であり, 力学系 $(I_{\delta_N}^2, \tilde{T}_{\varepsilon, \Delta\tau}, \mu)$ は Bernoulli 性をもつ.

定理 4 力学系 $(I_{\delta_N}^2, \tilde{T}_{\varepsilon, \Delta\tau}, \mu)$ において, Pesin の公式が成り立つ.

(証明のスケッチ): 文献 [6, 7] より, コンパクトリーマン多様体上で定義された $C^{1+\alpha}$ 級の写像と Lebesgue 測度に絶対連続な測度に対して Pesin の公式が成り立つ.

定理 5 (条件 1) を満たすとき, 力学系 $(I_{\delta_N}^2, \tilde{T}_{\varepsilon, \Delta\tau}, \mu)$ において, μ は SRB 測度となる.

(証明のスケッチ): 文献 [6, 7] より, $C^{1+\alpha}$ 級の写像の元, Pesin の公式が成り立つ双曲的測度 μ は SRB 測度となる.

定理 6 (条件 1) を満たすとき, $(I_{\delta_N}^2, \tilde{T}_{\varepsilon, \Delta\tau}, \mu)$ において, μ は唯一の SRB 測度となる.

(証明のスケッチ): 定理 2, 5 より, $\varepsilon < 0$ または $\frac{2}{\pi(\Delta\tau)^2} < \varepsilon$ を満たすとき, μ は SRB 測度となり, 力学系は Topological mixing 性を持つ. よって, 文献 [8] の Theorem 1.7 より μ は唯一の SRB 測度となる.

以上によって, (条件 1) を満たすとき, 時間反転対称性をもつ力学系において, 測度 0 の領域を除いて定義される初期密度関数が唯一の平衡測度に対応する一様分布に収束することが保証される.

謝辞 本研究は以下の科研費の支援を受けています (Grant No. JP17J07694 & 23K16963).

参考文献

- [1] G. Keller, *Equilibrium States in Ergodic Theory*, Cambridge University Press, 1998.
- [2] G. Gallavotti, *Nonequilibrium and Irreversibility*, Springer, 2014.
- [3] K. Okubo & K. Umeno, Anosov properties of a symplectic map with time-reversal symmetry, *Chaos*, **35** (2025), 073108.
- [4] A. Katok & B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995.
- [5] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Springer-Verlag, 1975.
- [6] Y. B. Pesin, Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory, *Russ. Math. Surv.*, **32** (1977), 55-114.
- [7] L. Barreira and Y. B. Pesin, *Nonuniform Hyperbolicity: Dynamics of Systems with Nonzero Lyapunov Exponents*, Cambridge University Press, 2007.
- [8] F. Rodriguez Hertz, M. Rodriguez Hertz, A. Tahzibi, & R. Ures, Uniqueness of SRB measures for transitive diffeomorphisms on surfaces, *Commun. Math. Phys.*, **306**, 2011, 35-49.

多体系一般化ブール変換における発散条件

Divergence conditions in multibody generalized Boolean transformations

大矢 長門 (Nagato Oya)¹, 梅野 健 (Ken Umeno)²,
^{1,2} 京都大学大学院情報学研究科 (Graduate School of Informatics, Kyoto University)
 e-mail : ¹oya.nagato.m61@kyoto-u.jp , ²umeno.ken.8z@kyoto-u.ac.jp

1 概要

A は n 行 n 列、 X は n 行 1 列の行列とした場合、多体系一般化ブール変換は以下の形で書き表すことができる。 $X_{t+1} = AX_t - \beta X_t^{-1}$. このとき、一般化ブール変換の式 [1] によって、コーシー分布 [2] が定義でき、条件付きリアプノフ指数 [3] を求め、同期現象 [4] を伴うカオスであることを示し、それから発散条件を求め、その近傍の挙動を示す。

2 一般化ブール変換の表示形式

多体系一般化ブール変換を示すため、次の定義する。

定義 1 (n 体系一般化ブール変換)

$$X_{t+1} = A_n X_t - B_n X_t^{-1}. \quad (1)$$

ここでは B_n をスカラー β と置き、 n 体系の場合には、以下のように表記できる。

$$\begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ \vdots \\ x_{nt+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} x_{1t}^{-1} \\ \vdots \\ x_{nt}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

$n = 2$ においてはすでに、発散条件は $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} > 1$ であることは分かっている。 $n > 2$ の場合には発散条件が一つでは無いことを示し、多体系一般化ブール変換の発散条件について述べ、いくつかの特殊な系で解析的な結果を示す。また、

ここで、 $\alpha \equiv \alpha_{11} \equiv \cdots \equiv \alpha_{nn}$ と置くものとする。 X_0 の値は素数として、 $x_{10} = 2, x_{20} = 3, x_{30} = 5, x_{40} = 7, \dots$ とする。そして Cyclic な結合とは $\alpha_{ij} = \alpha_{i+1j+1}$, j は巡回群で $j+n = j$ を満たす。 A_n を 3 体系、4 体系で表すと以下ようになる

$$A_3 = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha \end{bmatrix}. \quad (3)$$

定義 2 (抽出演算子：ケットベクトル) 逐次型の多体系方程式に数字を入れて数値計算を行い $t+1$ の値を求めるのに有用な道具としては次のケットベクトルを使用する。数値計算を行う n 行 n 列の正方ベクトルに作用し、全て単位元 1 の n 行 1 列のベクトルを右辺から演算すると値が抽出される。この抽出演算子をケットベクトル $|I\rangle$ と呼び、4 体系の場合以下のように定義する。

$$|I\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

定義 3 (逆抽出演算子 (対角行列変換) : ブラベクトル) n 行 1 列の行列と作用し、 n 行 n 列の対角行列に変換するブラベクトル $\langle I |$ を定義する. ただし、 I は単位行列なので、ブラベクトル内で複素共役をとっても結果は変わらない。

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \langle I | = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}. \quad (5)$$

定義 4 ブラ・ケットを使った演算法 これらをつかってテンソルを拡張し単位行列 I を得たり、縮約し単位元 1 を得ることができる。

$$|I \rangle \langle I| = I. \quad (6)$$

$$\langle I | I \rangle = 1. \quad (7)$$

以下、式 (4),(5) の変換を行いベクトル演算をおこなっている場合には、暗にこれらの変換を行っているとは仮定する。

3 発散条件不等式

分布関数の半値幅 (尺度母数) と不動点がベクトル演算式より導き出されることを示し、発散条件を求める。

$t \rightarrow T$ は t を十分大きな時間経過を経た時間発展として T とする。

その結果、式 (5) より X_t の列ベクトルを正方行列へ変換し X_T とする。

$$\lim_{t \rightarrow T} (X_t \langle I |) = X_T. \quad (8)$$

± に振幅発散することも考慮し式 (1) を二乗し不等式を成立させて以下の発散条件不等式が導き出せる。

$$\langle I | X_{T+1}^2 | I \rangle > \langle I | X_T^2 | I \rangle, \quad (9)$$

参考文献

- [1] Ken Umeno, Ken-ichi Okubo, Exact Lyapunov exponents of the generalized Boole transformations Progress of Theoretical and Experimental Physics, Volume 2016, Issue 2, February 2016, 021A01, Published: 11 February 2016
- [2] Ken Umeno. Ergodic transformations on \mathbb{R} preserving Cauchy laws. NOLTA, IEICE, Vol.7(2016), pp.14—20.
- [3] M. Shintani and K. Umeno. Conditional Lyapunov exponent criteria in terms of ergodic theory. Progress, of Theoretical and Experimental Physics, 013A01, (2018).
- [4] Takumi Kano, Ken Umeno, Chaotic synchronization of mutually coupled systems—arbitrary proportional linear relations, Chaos 32 (2022), pp.113–137.

対称ネットワークにおける無限次元カオス同期とその成立条件

Infinite Dimensional Chaotic Synchronization and its Condition for Symmetric Networks

梅野健 (Ken Umeno)

京都大学大学院情報学研究科 (Graduate School of Informatics, Kyoto University)

e-mail : umeno.ken.8z@kyoto-u.ac.jp

1 概要

カオス同期現象は今までは少数自由度結合系で知られていた。2023 年、文献 [1] により、カオス写像がランダムに結合するランダム結合系によるカオス同期現象が報告され、熱力学と同様に自由度無限大の極限でカオス同期が成立する系が報告された。文献 [1] では 1998 年で示された可解カオス系の一番シンプルな一般化ブール変換 $F(x) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$ [2] の結合系に対して、カオス同期現象が起きるための結合係数の閾値 $\epsilon_c = \sqrt{2} - 1$ が報告されたが、本報告では同閾値を含むより一般的な一般化ブール変換 $F(x) = \alpha x - \frac{\beta}{x}, 0 < \alpha < 1, \beta > 0$ に対して一般的な結合系で無限次元カオス同期が起こる同期条件閾値 $\epsilon_c(\infty)$ を導出する。尚、この写像 $F(x)$ は文献 [3] により混合性が証明されており、エルゴード的な不変測度としてコーシー分布を持つことが知られている。

2 N 自由度カオス結合系のモデル (全結合型)

一般の N 自由度のカオス結合系として、次の全結合型モデルを考える。

$$x_i[n+1] = F(x_i[n]) + \frac{\epsilon}{N-1} \sum_{j \neq i}^N x_j[n] \quad \text{for } i = 1, \dots, N \quad (1)$$

ここでカオス写像として一般化ブール変換 $F(x) = \alpha x - \frac{\beta}{x}, 0 < \alpha < 1, \beta > 0$ を採用する。

3 対称カオス結合系の尺度母数の導出

一般化ブール変換はコーシー分布を初期分布として入力すると、出力値の分布はコーシー分布性を維持し、その尺度母数は

$$\gamma[n+1] = \alpha\gamma[n] + \frac{\beta}{\gamma[n]} \equiv G(\gamma[n]), \quad G(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x} \quad (2)$$

に従い変化することがわかる [4]。従って、コーシー分布の安定分布性を考慮すると、この全結合型モデルの尺度母数の変化は文献 [5] などで明らかにした方法より、下記の連立方程式に従うことがわかる。

$$\gamma_i[n+1] = G(\gamma_i[n]) + \frac{|\epsilon|}{N-1} \sum_{j \neq i}^N \gamma_j[n] \quad \text{for } i = 1, \dots, N \quad (3)$$

この方程式は対称な形をしていることから $\gamma_1[n] = \gamma_2[n] \dots = \gamma_N[n] \equiv \gamma[n]$ とすることができ、最終的な極限分布は $\gamma[n+1] = \gamma[n]$ より、尺度母数 γ^* を持つコーシー分布 $\rho_{\gamma^*}(x)dx$ となる。但し、

$$\gamma^* = \sqrt{\frac{\beta}{1 - \alpha - |\epsilon|}} \quad (4)$$

4 条件付きリアプノフ指数の導出

今、 $0 < \alpha < 1 - |\epsilon|$ とする。そして完全同期条件から少し摂動を受ける下記の状態を考える。

$$x_i[n] = x[n] + \xi[n] \quad \text{for } 1 \leq i \leq N-1, \quad x_N[n] = x[n] + \eta[n]. \quad (5)$$

このとき、

$$x[n+1] + \xi[n+1] = F(x[n] + \xi[n]) + \frac{\epsilon}{N-1} \{(N-2)(x[n] + \xi[n]) + (x[n] + \eta[n])\} \quad (6)$$

$$x[n+1] + \eta[n+1] = F(x[n] + \eta[n]) + \frac{\epsilon}{N-1} (N-1)(x[n] + \xi[n]) \quad (7)$$

が成立するので式 (7) から式 (6) を引き、 $\delta[n] = \xi[n] - \eta[n]$ を考えると、

$$\delta[n+1] \sim \left(\left(\alpha - \frac{\epsilon}{N-1} \right) + \frac{\beta}{x^2[n]} \right) \delta[n] \quad (8)$$

が成立する。但し、文献 [6] で用いた近似 $-\beta \left(\frac{1}{x+\xi} \right) \sim -\beta \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\xi}{x} \right)$ を用いた。よって同期条件からの摂動を考える条件付きリアプノフ指数 λ は、次式で計算できる。

$$\lambda = \log \left| \left(\alpha - \frac{\epsilon}{N-1} \right) \right| + \int_{-\infty}^{\infty} \log \left| 1 + \frac{\beta}{\left(\alpha - \frac{\beta}{N-1} \right) x^2} \right| \rho_{\gamma^*}(x) dx \quad (9)$$

積分を計算すると最終的に条件付きリアプノフ指数は以下の様に与えられる。

$$\lambda = 2 \left[\log \left(\sqrt{\frac{\alpha - \frac{\epsilon}{N-1}}{1 - \alpha - |\epsilon|}} + 1 \right) + \log \sqrt{1 - \alpha - |\epsilon|} \right] \quad (10)$$

よって同期条件 ($0 < \epsilon_c \leq \epsilon < 1 - \alpha < 1$) を与える臨界的閾値 $\epsilon_c(N)$ は、次式で与えられる。

$$\epsilon_c(N) = \frac{-2\alpha + 2\sqrt{\alpha + \frac{1-\alpha}{(N-1)^2}} + \frac{2(\alpha-1)}{N-1}}{1 + \frac{2}{N-1} + \frac{1}{(N-1)^2}} \rightarrow 2(\sqrt{\alpha} - \alpha) \equiv \epsilon_c(\infty) \quad \text{for } N \rightarrow \infty \quad (11)$$

参考文献

- [1] 梅野健、ランダム結合系の大自由度極限でのカオス同期、数理解析研講究録, Vol. 2270 (2023), pp.69–77.
- [2] Ken Umeno, Superposition of chaotic processes with convergence to Levy's stable law, Phys. Rev. E, Vol. 58(1998), pp. 2644-2647.
- [3] Ken Umeno, Ken-ichi Okubo, Exact Lyapunov exponents of the generalized Boole transformations, PTEP Volume 2016 (2016), 021A01.
- [4] Ken Umeno. Ergodic transformations on R preserving Cauchy laws. NOLTA, IEICE, Vol.7(2016), pp.14–20.
- [5] M. Shintani and K. Umeno. Conditional Lyapunov exponent criteria in terms of ergodic theory. PTEP, 013A01, (2018).
- [6] Takumi Kano, Ken Umeno, Chaotic synchronization of mutually coupled systems-arbitrary proportional linear relations, Chaos 32 (2022), pp.113–137.