

## べき指数が時間変化する非定常OU過程

## Nonstationary OU process with time-varying exponent

山下 陽太郎 (Yamashita Yotaro)<sup>1</sup>, 梅野 健 (UMENO Ken)<sup>2</sup>,<sup>1</sup> 京都大学大学院 (Graduate School of Kyoto University), <sup>2</sup> 情報学研究科 (Graduate School of Informatics)

e-mail : yamashita.yotaro.54h@st.kyoto-u.ac.jp

## 1 概要

本研究では、安定分布 [1] ノイズを持つ Ornstein–Uhlenbeck (OU) 過程 [2] において、安定指数  $\alpha$  が時間的に変動するケースを扱う。 $\alpha$  を有限個の状態をとるマルコフ過程と仮定し、特性関数を解析的に導出した。Chaos Fourier 変換 [4] を用いた数値シミュレーションと理論式が良く一致し、提案モデルがファットテールかつ非定常な市場変動の記述に有効であることを示す。

## 2 背景と目的

金融市場における価格リターンは、ブラック＝ショールズモデル [3] のようなガウス過程に基づく従来のモデルでは捉えきれないファットテール性や非定常性を示す。これに対応するため、安定分布に基づく非ガウス型の Lévy 過程を駆動項とした確率過程のモデルが提案されてきた。しかし、従来の Lévy 過程のモデル [2] では安定指数  $\alpha$  を一定と仮定しており、実データが示す時間的な変動を反映できない。近年の研究では、 $\alpha$  が時間とともに変化している可能性が報告されている [5]。本研究では、 $\alpha$  を有限個の状態をとるマルコフ過程とみなし、 $\alpha$  の変動が OU 過程に与える影響を解析する。

## 3 モデルと理論解析

本研究で扱う OU 過程は、以下の確率微分方程式で表される：

$$du(t) = -\lambda u(t)dt + dL_t^{(\alpha(t))}, \quad (1)$$

ここで、 $L_t^{(\alpha(t))}$  は時刻  $t$  において安定指数  $\alpha(t)$  を持つ非定常な Lévy 過程である。 $\alpha(t)$  は  $m$  状態をとるマルコフ過程と仮定し、定常分布を  $q_k$  とする。

このとき、特性関数  $\phi(k, t)$  は次のように表される：

$$\phi(k, t) = \exp \left[ -t \sum_{k=1}^m q_k |\gamma_{\alpha_k} k|^{\alpha_k} \right] \quad (2)$$

$$= \exp [ \langle |\gamma_{\alpha} k|^{\alpha} \rangle_S ] \quad (3)$$

ただし、 $\gamma_{\alpha}$  は各  $\alpha$  に対応するスケールパラメータであり、 $\langle \cdot \rangle_S$  は、 $\alpha$  の定常分布  $S$  に関する期待値を意味する。

この結果は、OU 過程が複数の安定分布の畳み込みとして表現されることを意味し、非定常な市場環境をより現実的にモデル化できる。

## 4 数値解析と検証

$\alpha$  が 2 状態  $\alpha_1, \alpha_2$  をとる場合を対象とし、それぞれの遷移確率を  $w_1, w_2$  とするマルコフモデルに基づいて数値シミュレーションを実施した。Chaos Fourier 変換 [4] により、得られた確率変数  $u(t)$  の特性関数を推定し、理論式と比較した。

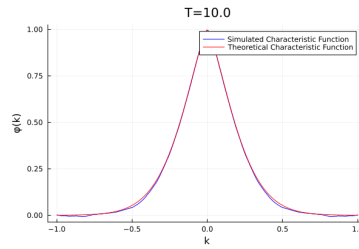


図 1.  $\alpha$  が 2 状態を取るモデルの特性関数について理論値と数値解析の比較 ( $t=10.0$  の場合)

図 1 に  $t = 10.0$  での特性関数の比較を示す。長時間極限では理論と数値結果の一致が良好であり、導出した解析解の妥当性を支持する結果となった。

## 5 結論と展望

本研究では、安定指数  $\alpha$  がマルコフ的に変動する非定常 OU 過程を導入し、その特性関数を解析的に導出した。Chaos Fourier 変換による数値解析との一致により、提案モデルの有効性が示された。今後の課題としては、 $\alpha(t)$  の連続的変動への拡張や、実データとの比較によるモデル精度の評価が挙げられる。また、 $\alpha(t)$  の変動に伴う自己相関構造の変化や、マルチフラクタル解析によるさらなる応用も期待される。

.....

## 参考文献

- [1] Klafter, J., and Sokolov, I. M. First Steps in Random Walks: From Tools to Applications. *Oxford*, (2011).
- [2] Gardiner, C. Stochastic Methods, 4th ed. *Springer-Verlag*, Berlin, (2009).
- [3] Black, F. and Scholes, M., The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**(3), (1973) 637–654.
- [4] Umeno, K. Ergodic transformations on  $\mathbb{R}$  preserving Cauchy laws. *IEICE-NOLTA*, **7**(1), (2016) 14–20.
- [5] Fukunaga, T., Umeno, K. Universal Lévy’s Stable Law of Stock Market and its Characterization. *arXiv: Statistical Finance*, (2017). arXiv:1709.06279

※ 本文の出現順に並べてください。

# GDP 成長率の統計則について

## On stylized facts of GDP growth rates

小池 元 (Hajime Koike)<sup>1</sup>, 梅野 健 (Ken Umeno)<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 京都大学大学院情報学研究科 (Graduate School of Informatics, Kyoto University)

e-mail : koike.hajime.7i@kyoto-u.ac.jp

## 1 概要

企業規模や一国の経済規模に関する統計解析や数理モデリングの試みは、およそ 100 年前の Gibrat による先駆的な仕事 [1] に始まり、経済物理学の黎明期から行われてきた [2]。一国の GDP に対象を絞ると、以下の性質が経験的事実 (stylized-facts) として知られている。

- GDP 分布は対数正規分布で近似可能 [3]
- GDP 対数成長率分布は正規分布ではない (中心付近は Laplace[3, 4]、exponential-power[5]、全体で Cauchy[6])
- GDP 対数成長率分布の裾は重い [5, 7]
- GDP 対数成長率を GDP で条件つけた分散は GDP にベキ的に依存する [3, 4]

これらの結果では、国の経済規模として使用する変数、データポイント数、さらに統計処理が研究によって微妙に異なるが、国や時期によらず概ねロバストであることが期待される。

本研究では、先行研究で述べられた以上の性質を 1970 年から 2019 年までの 50 年 150 カ国余りにわたる年次の GDP データセットにより実際に確認したのち、stylized-facts を再現可能な数理モデルを議論することを目指している。本稿では、特にデータ解析結果について議論する。

## 2 データと解析結果

本研究では、GDP データセットとして、Penn World Table 10.01[8] を用いる。名目 GDP や実質 GDP のほか、それらを人口一人当たりへ換算した量が記載されている。価格は 2017 年時点の米ドルベースで計算されており、購買力平価の平準化が行われているため国と時期ごとの比較が可能となっている。本研究では、1970 年から 2019 年までの実質 GDP を用いる。

まず、GDP 分布に関しては、対数正規分布によるフィッティングで KS 検定を棄却できず、裾のベキ性は Clauset et al. による方法 [9] で推定・検定した結果棄却された。そして、 $\ln \text{GDP}$  を正規分布でフィットして得られる平均  $\mu$  は、年によって線形に増大し、その傾き (つまり平均成長率) は 0.038 であった。また、分散  $\sigma^2$  は年によらずほぼ一定でおよそ 0.04 であった。

また、GDP 対数成長率分布に関して、先行研究で述べられた以下の分布でフィットし、KS 検定を行った。

$$\begin{aligned} (\text{Laplace}) : f(x; \mu, \sigma) &= \frac{1}{2\sigma} \exp \left[ -\frac{|x - \mu|}{\sigma} \right] \\ (\text{Exponential power}) : f(x; \mu, \sigma, b) &= \frac{b}{2\sigma\Gamma(1/b)} \exp \left[ -\left( \frac{|x - \mu|}{\sigma} \right)^b \right] \\ (\text{Cauchy}) : f(x; \mu, \sigma) &= \frac{1}{\pi\sigma} \frac{1}{\sigma^2 + (x - \mu)^2} \end{aligned}$$

その結果、対数成長率分布は、中央付近 ( $\bar{r}$  を中央値として  $|r - \bar{r}| < 0.3$ ) では、 $\mu = 0.0002, \sigma = 0.0524$  の Laplace 分布や  $\mu = 0.0002, \sigma = 0.0561, b = 1.0509$  の指数ベキ分布で近似できることが確認された (KS p 値はそれぞれ 0.1514, 0.2410) が、分布全体では上の分布は全て棄却された。

GDP 対数成長率分布の裾のベキ性について、Clauset et al. の方法で推定・検定したところ、 $P_{>}(x) \propto x^{-\alpha_+}, P_{<}(x) \propto |x|^{-\alpha_-}$  で定義されるベキ指数  $\alpha_{\pm}$  はそれぞれ  $\alpha_+ = 2.45 \pm 0.18, \alpha_- = 2.03 \pm 0.12$  であった。対数成長率分布は分散が有限の分布で近似されることを示唆している。

最後に、GDP  $Y_t$  で条件つけた対数成長率分散  $\sigma^2(r_t|Y) := \text{Var}(r_t|Y \leq Y_t < Y^{1.5})$  について、

$$\sigma^2(r_t|Y) \propto Y^{-\beta}, \beta = 0.77 \pm 0.12$$

がフィットによって得られた。なお、 $\beta = 0$  が古典的な Gibrat 則に対応する。

### 3 まとめ

GDP 分布の時間変化と GDP 成長率分布とフィット、裾のベキ性、成長率分散のサイズ依存性について述べた。これらの観測結果は、GDP のモデルに対して制約を与えている。例えば、古典的な Gibrat のモデル [1] では、対数 GDP 分布の分散が時間によらず一定であることや成長率のサイズ依存性を説明できない。本講演の最後では、こうした課題を踏まえて観測結果を整合的に説明するモデルの候補を議論する。

### 参考文献

- [1] Robert Gibrat. *Les inégalités économiques*. Sirey, 1931.
- [2] Michael H R Stanley, Luís A N Amaral, Sergey V Buldyrev, Shlomo Havlin, Heiko Leschhorn, Philipp Maass, Michael A Salinger, and H Eugene Stanley. Scaling behaviour in the growth of companies. *Nature*, 379(6568):804–806, February 1996.
- [3] Youngki Lee, Luís A. Nunes Amaral, David Canning, Martin Meyer, and H. Eugene Stanley. Universal Features in the Growth Dynamics of Complex Organizations. *Physical Review Letters*, 81(15):3275–3278, October 1998.
- [4] D Canning, L. A. N Amaral, Y Lee, M Meyer, and H. E Stanley. Scaling the volatility of GDP growth rates. *Economics Letters*, 60(3):335–341, September 1998.
- [5] Giorgio Fagiolo, Mauro Napoletano, and Andrea Roventini. Are output growth-rate distributions fat-tailed? some evidence from OECD countries. *Journal of Applied Econometrics*, 23(5):639–669, 2008.
- [6] Michael A. Williams, Grace Baek, Yiyang Li, Leslie Y. Park, and Wei Zhao. Global evidence on the distribution of GDP growth rates. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 468:750–758, February 2017.
- [7] Reiner Franke. How Fat-Tailed is US Output Growth? *Metroeconomica*, 66(2):213–242, 2015.
- [8] PWT 10.01. <https://www.rug.nl/ggdc/productivity/pwt/>, January 2023.
- [9] Aaron Clauset, Cosma Rohilla Shalizi, and M E J Newman. Power-Law Distributions in Empirical Data. *SIAM Rev.*, 51(4):661–703, November 2009.

## PISL における熱流束の非緩和条件

### A condition for non-relaxation of heat flux in the PISL

吉村 和之 (Kazuyuki Yoshimura)

鳥取大学学術研究院工学系部門 (Faculty of Engineering, Tottori University)

e-mail : kazuyuki@tottori-u.ac.jp

#### 1 はじめに

非線形格子においては、Discrete Breather (DB) と呼ばれる空間的局在モードが、普遍的に存在し得ることが知られている [1]。基本的な DB は、定在波型の周期振動モードであり、波形中心から離れるに従い粒子振幅がゼロに漸近する局在性を有する。一方で、進行波型の DB が、空間 1 次元の非線形 Klein-Gordon 格子 [2] や FPUT- $\beta$  格子 [3] において数値的に観測されている。これら移動型 DB は、以下の性質を示す: (i) 数値的ニュートン法で構成した進行波型 DB の伝播速度は、一定ではなく、格子間隔で周期的に変動する、(ii) 摂動を加えられた進行波型 DB は、伝播と共に減速し格子上に捕捉される、(iii) 局在性が破れ、空間的に広がった裾を持つ。これらの離散性に起因する性質は、非線形格子のポテンシャル関数がある対称性を持つ場合には現れないことが予想された [3]。この対称性を有する 1 次元非線形格子として、Pairwise Interaction Symmetric Lattice (PISL) が構築され、実際に性質 (i)-(iii) が現れない事が数値的に示されている [4]。

1 次元非線形格子は、固体結晶の最も単純化された微視的力学モデルでもあり、原子振動による熱伝導の理論・数値的研究に広く用いられる。PISL は、熱伝導研究においても興味を持たれており、弾道的熱伝導と呼ばれる熱抵抗が消失する状態、もしくは、それに近い熱伝導状態を示すことが数値実験により報告されている [5]。ただし、真に弾道的か否かは明らかになっていない。本研究では、周期境界の PISL において、初期条件で熱流束を与えたとき、熱流束の長時間平均がゼロに緩和しないような十分条件を示す。初期条件が当該条件を満たし、かつ、正の熱流束を持つとき、区間長  $T$  の熱流束の時間平均が  $T \rightarrow \infty$  の極限でゼロに収束しない、すなわち、熱抵抗が消失する。

#### 2 PISL と対称性

PISL は、次式のハミルトニアンで記述される長距離相互作用 1 次元非線形格子である。

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} p_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\mu_0 q_n^2 + (q_{n+1} - q_n)^2] + \frac{\beta}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} b_r (q_{n+r} - q_n)^4 \quad (1)$$

ここで、 $q_n, p_n \in \mathbb{R}$  は  $n$  番目の質点の変位と運動量、 $\mu_0$  と  $\beta$  は非負のパラメータ、 $b_r = 1/r^2$  である。運動方程式は、 $\dot{q}_n = \partial H / \partial p_n$ ,  $\dot{p}_n = -\partial H / \partial q_n$  により与えられる。変位座標  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  に対して、離散 Fourier 変換  $U(k) = (1/\sqrt{2\pi}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q_n e^{-ikn}$  によりモード座標  $\{U(k)\}_{k \in \mathbb{T}}$  を導入する。ここで、 $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$  である。モード座標系での運動方程式は、次式のように得られる。

$$\ddot{U}(k) + \nu_k^2 U(k) = \frac{4\beta}{\pi} \int_{\mathbb{T}^3} dk_1 dk_2 dk_3 \phi_0(k_1, k_2, k_3, k) U(k_1) U(k_2) U(k_3) \delta(k_1 + k_2 + k_3 - k) \quad (2)$$

ここで、 $U(k)$  は時間  $t$  の関数、 $\nu_k^2 = \mu_0 + 4 \cos^2(k/2)$ 、 $\phi_0$  は  $(k_1, k_2, k_3, k)$  に依存する係数、 $\delta$  は Dirac のデルタ関数である。波数条件  $k_1 + k_2 + k_3 - k = 0$  を満たすモード間相互作用のみが現れる。

変換  $\mathcal{S}_\lambda$  を次式で定義する .

$$\mathcal{S}_\lambda : U(k) \mapsto \begin{cases} U(k) \exp[-ik\lambda] & \text{if } k \in (-\pi, \pi) \\ U(k) & \text{if } k = \pi \end{cases} \quad (3)$$

ここで ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  はパラメータである .  $\tilde{U}(k) = \mathcal{S}_\lambda U(k)$  とするとき , 任意の  $\lambda$  に対して ,  $\tilde{U}(k)$  の運動方程式は (2) 式と同じ形になる . この意味で , PISL は対称性を有する .

### 3 周期境界 PISL と熱流束の非緩和条件

周期境界条件  $q_{n+N} = q_n$  を課した  $N$  粒子の PISL を考える . この系のハミルトニアンを  $H_N$  で表す . 長距離相互作用ポテンシャルに現れる和は  $r = 1, \dots, N/2$  の範囲となり , 係数は  $b_r = \sin^2(\pi/N)/\sin^2(r\pi/N)$ ,  $r = 1, \dots, N/2 - 1$  , および ,  $b_{N/2} = \sin^2(\pi/N)/2$  で与えられる . PISL の対称性により ,  $I = -\sum_{m=-(N/2-1)}^{N/2-1} m \operatorname{Im}[\dot{U}_m \bar{U}_m]$  は保存量となる . ここで ,  $U_m = (1/\sqrt{N}) \sum_{n=1}^N (-1)^n q_n e^{i2\pi mn/N}$  である . 線形相互作用を介して  $n$  番目と  $n+1$  番目粒子の間を単位時間に移動する熱エネルギーを  $j_n$  で表すと ,  $j_n = -(p_{n+1} + p_n)(q_{n+1} - q_n)/2$  . 格子系の全調和熱流束を ,  $J_H = \sum_{n=1}^N j_n$  で定義する . 以下の定理が成り立つ .

**定理 1**  $(q(t), p(t)) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  を ,  $N$  粒子の周期境界 PISL の運動方程式の解とする . 定数  $c > 0$  に対し  $\chi_N(c)$  を次式で定義する .

$$\chi_N(c) = \max_{m \in \{1, \dots, N/2-1\}} \left| \frac{v_m \omega_m - cm}{\nu_m} \right| \quad (4)$$

ただし ,  $\nu_m = \sqrt{\mu_0 + 4 \cos^2(\pi m/N)}$ ,  $\omega_m = 2 \sin(\pi m/N)$ ,  $v_m = \cos(\pi m/N)$  . 初期条件  $(q(0), p(0))$  に対し , ある値  $c > 0$  が存在して不等式  $cI(0) > \chi_N(c)H_N(0)$  が成り立つと仮定する . このとき , 定数  $\varepsilon_0 > 0$  が存在し , 解  $(q(t), p(t))$  に対して不等式  $J_H(t) \geq \varepsilon_0$  が全ての  $t \in [0, \infty)$  で成り立つ .

定理 1 の初期条件に対しては ,  $\forall t \geq 0$  で  $J_H(t) \geq \varepsilon_0 > 0$  . したがって , 長時間平均に関して ,  $\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T J_H(t) dt \geq \varepsilon_0 > 0$  . このことは , 温度勾配が無い状況下で , 全調和熱流束の長時間平均がゼロに緩和しないことを保証しており , 熱抵抗の消失を示している .

謝辞 この研究は科学研究費補助金 (No. 22K0345) の助成を受けています .

### 参考文献

- [1] A. J. Sievers and S. Takeno, "Intrinsic localized modes in anharmonic crystals," Phys. Rev. Lett., vol. 61 (1988), pp. 970–973.
- [2] S. Aubry and T. Cretegny, "Mobility and reactivity of discrete breathers," Physica D, vol. 119 (1998), pp. 34–46.
- [3] K. Yoshimura and Y. Doi, "Moving discrete breathers in nonlinear lattice: Resonance and stability," Wave Motion, vol. 45 (2007), pp. 83–99.
- [4] Y. Doi and K. Yoshimura, "Symmetric Potential Lattice and Smooth Propagation of Tail-Free Discrete Breathes," Phys. Rev. Lett., vol. 117 (2016) 014101.
- [5] K. Yoshimura *et al.*, "Heat transport in pairwise interaction symmetric lattices," in: Proc. of the 2020 Inter. Symp. on Nonlinear Theory and Its Applications, pp. 181–184, 2020.