# 火山地表面の変動を決定するマグマ溜りの数理モデルの変分解法

# A variational solution of a mathematical model on magma reservoir to determine surface displacement of the volcano

鈴木 厚 (Atsushi Suzuki)[1], 殿山 俊吾 (Shungo Tonoyama)[2,1]
理化学研究所 [1] 計算科学研究センター, [2] 数理創造研究センター
e-mail : Atsushi.Suzuki.aj@a.riken.jp

## 1 概要

火山の地表面の変動は地下のマグマ溜りの状態を反映するが, 地下の岩石を線形弾性体とみなしてマグマの表面に応力を与えて地表面での変位を推定する逆問題による数理モデルを考える. 地表面での変位と観測値の $H^{1/2}$-ノルムを最小化するコスト関数を設定すると随伴法により極値は最小 2 乗問題の解を達成する. さらにこの極値を求める変分問題は境界データからの調和拡張を用いることで境界データに関する弱形式を得ることができる. この問題を離散化して得られる行列の正規化方程式に対応する連続問題表現になる.

## 2 数理モデルと変分問題

$\Gamma_S$ を地表面の変位のデータの観測領域とする. その下部の 3 次元領域 $\widetilde{\Omega}$ の内部にマグマ溜り $\omega$ を考える. $\Omega = \widetilde{\Omega} \setminus \bar{\omega}$ で弾性体の変位場の方程式を満しながら $\partial\omega$ の表面の応力の分布を表面の変位の観測値に合うように決定する問題を考える. 簡単のため $\widetilde{\Omega}$ の底面の境界 $\Gamma_B$ で変位が 0, 側面の境界 $\Gamma_W$ で応力 0 を満すものとする. $\Gamma_S$ では応力 0 として弾性体問題を解く.

$\lambda$ と $\mu$ を Lamé 定数として 3 次元の応力テンソルを $\sigma(u) = \lambda \mathrm{tr}(e(u))I + 2\mu\, e(u)$ とする. $e(u) = ((\nabla u) + (\nabla u)^T)/2$ は線形歪みテンソルである. 領域 $\Omega$ の内部で $\nabla \cdot \sigma(u) = 0$ の釣り合いが満たされているとすると, $\partial\omega$ で $\sigma(u)n = g$ を満たし, $\Gamma_B$ で $u = 0$, $\Gamma_S \cup \Gamma_W$ で $\sigma(u)n = 0$ の境界条件を満たす弱形式は次の様になる. 解を探す関数空間を $V = \{u \in H^1(\Omega)^3\,;\, u = 0 \text{ on } \Gamma_B\}$, その上での双一次形式を $a(u,v) = \lambda \int_\Omega \nabla \cdot u \nabla \cdot v + 2\mu \int_\Omega e(u) : e(v)$ とし $\partial\omega$ での $W = H^{1/2}(\partial\omega)$ と $W' = H^{-1/2}(\partial\omega)$ の双対積を $\langle g, v\rangle_{\partial\omega} = \int_{\partial\omega} g \cdot v$ とすると,

$$\text{find } u \in V \quad a(u,v) = \langle g, v\rangle_{\partial\omega} \quad \forall v \in V \tag{1}$$

である. 地表面での観測値を $u^*$ とするとき, $\Gamma_S$ での弾性体問題の変位との差を最小にするような, 応力 $g$ を求める問題を設定できる. 目的関数を $J(u(g)) = (1/2)(u(g) - u^*, u(g) - u^*)_{H^{1/2}(\Gamma_S)}$ として, $W'$ での最小化問題

$$\text{find } g \in W' \quad J(u(g)) \leq J(u(\hat{g})) \quad \forall \hat{g} \in W' \tag{2}$$

である. ここで $(\cdot,\cdot)_{H^{1/2}(\Gamma_S)}$ は $\Omega$ での調和拡張によって定まる $H^{1/2}(\Gamma_S)$ の内積 $(u,v)_{H^{1/2}(\Gamma_S)} = a(\widetilde{u},\widetilde{v})$. $\widetilde{u}$ は $u \in H^{1/2}(\Gamma_S)$ に対し, $\Gamma_S$ で Drichlet データ $\widetilde{u} = u$ を得て領域内部で $a(\widetilde{u}, w) = 0\ \forall w \in V$ を満すものとする. $\Gamma_W$ と $\partial\omega$ では自然境界条件 $\sigma(\widetilde{u})n = 0$ を課している.

随伴法の手法 [1] により $J(u(g))$ の最小値は 0 をとり, $\partial\omega$ に応力 $g$ を課す $u(g)$ は順問題の解, また $g$ を決定する変分問題は随伴問題の解を用いて記述できることを示す. $u, v \in V$ と $g \in H^{-1/2}(\partial\omega)$ に対して Lagrange 乗数を $\mathcal{L}(u,v,g) := J(u(g)) - \big(a(u,v) - \langle g, v\rangle_{\partial\omega}\big)$ とする. $v$ に対する変分

$d_v\mathcal{L}(u,v,g)[\delta v]=0$ により順問題

$$\text{find}\quad u(g)\in V\quad a(u(g),\delta v)=\langle g,\delta v\rangle_{\partial\omega}\ \forall\delta v\in V$$

が得られる．この $u(g)$ に対する変分 $d_u\mathcal{L}(u(g),v,g)[\delta u]=0$ により随伴問題

$$\text{find}\quad v(g)\in V\quad a(\delta u,v(g))=(\delta u,(u(g)-u^*))_{H^{1/2}(\Gamma_S)}\ \forall\delta u\in V$$

が得られる．$u(g)$ と $v(g)$ により $\widetilde{\mathcal{L}}(g)=\mathcal{L}(u(g),v(g),g)=J(u(g))$ となり, $g$ に対する変分を計算すると, 極値を達成するときの条件が得られる．

$$\begin{aligned}d_g\widetilde{\mathcal{L}}(g)[\delta g]=&(d_gu(g)[\delta g],(u(g)-u^*))_{H^{1/2}(\Gamma_S)}-a(d_gu(g)[\delta g],v(g))\\&-\big(a(u(g),d_gv(g)[\delta g])-\langle g,d_gv(g)[\delta g]\rangle_{\partial\omega}\big)+\langle\delta g,v(g)\rangle_{\partial\omega}\end{aligned}$$

となる $u(g)$ と $v(g)$ がそれぞれ順問題と随伴問題の解であることより，$J(u(g))$ の極値は $d_g\widetilde{\mathcal{L}}(g)[\delta g]=\langle\delta g,v(g)\rangle_{\partial\omega}=0$ が満されるとき, すなわち随伴問題の解 $v(g)$ が $\partial\omega$ で $0$ になる時に達成され, 二次形式であることから最小値 0 となる．

$v^*$ を $u^*\in H^{1/2}(\Gamma_S)$ の調和拡張によって拡張された関数とする．

$$\text{find}\quad v^*\in V\quad a(\delta u,v^*)=(\delta u,u^*)_{H^{1/2}(\Gamma_S)}\ \forall\delta u\in V$$

$\bar{v}(g)$ を順問題の解 $u(g)$ の $\Gamma_S$ でのトレースから調和拡張によって拡張された関数とする．

$$\text{find}\quad \bar{v}(g)\quad a(\delta u,\bar{v}(g))=(\delta u,u(g))_{H^{1/2}(\Gamma_S)}\ \forall\delta u\in V \tag{3}$$

随伴問題の解を二つに分離する $v(g)=\bar{v}(g)-v^*$ と, (2) の最小値は次の変分問題の解に求まる．

$$\text{find g}\in W'\ \langle\delta g,\bar{v}(g)\rangle_{\partial\omega}=\langle\delta g,v^*\rangle_{\partial\omega}\ \forall\delta g\in W' \tag{4}$$

## 3　離散化問題

$\partial\omega$ の応力 $g$ から $\partial\omega$ での変位場 $\bar{v}(g)$ への対応 (4) の有限要素離散近似を考える．$V$ の有限要素近似空間の基底の添字の自由度の集合 $\Lambda$ とする．$\partial\omega$ の自由度を $\Lambda_1$, $\Gamma_S$ の自由度を $\Lambda_3$ とする．$\Lambda=\Lambda_1\oplus\Lambda_2\oplus\Lambda_3$ に対し (1) の双一次形式の有限要素基底による剛性行列 $K$ をブロックに分割して表現する．$K$ は対称行列である．$\langle g,v\rangle_{\partial\omega}$ の $\partial\omega$ の表面積分の $L^2$-重みを質量行列 $C$ で表すと,

$$K\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{11}&K_{12}&\\K_{21}&K_{22}&K_{23}\\&K_{32}&K_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{11}&&\\K_{21}&S_{22}&\\&K_{32}&S_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1&K_{11}^{-1}K_{12}&\\&I_2&S_{22}^{-1}K_{23}\\&&I_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C\,g\\0\\0\end{bmatrix}$$

となる．全体自由度 $\Lambda$ から $\Lambda_1$ と $\Lambda_3$ への添字の制約をそれぞれ $R_1$ と $R_3$ とすると, $g$ から $u_3$ への対応の順問題は $u_3=R_3K^{-1}R_1^TC\,g=AC\,g=S_{33}^{-1}BC\,g=S_{33}^{-1}K_{32}S_{22}^{-1}K_{21}K_{11}^{-1}C\,g$ となる． 同じ添字の分解を用いて $u_3$ から $u_1$ への調和拡張 (3) は右辺が 0 となることより $u_1=K_{11}^{-1}K_{12}S_{22}^{-1}K_{23}u_3=B^Tu_3$ となる．$\widetilde{g}=C\,g$ と置くと, (4) の離散近似は $B^TS_{33}^{-1}B\widetilde{g}=B^Tu_3$ となる．この係数行列は対称なため, 共役勾配 (CG) 法により解は $A$ の核の直交補空間に求まる．$u_3=A\widetilde{g}$ の正規方程式は $A^TA\widetilde{g}=A^Tu_3$ すなわち $B^TS_{33}^{-1}S_{33}^{-1}B\widetilde{g}=B^TS_{33}^{-1}u_3$ である．

$B$ の作用は $K$ の逆作用を含み, 4 倍精度以上の演算を用いる必要がある．講演時に数値例を示す．

## 参考文献

[1] H. Azegami, Shape Opimization Problems, Springer, 2020, ISBN 978-981-15-7617-1

# 動的破壊による速度場への確率的ノイズ付加

# Superposition of noise in the velocity field due to dynamic rupture

平野 史朗 (Shiro Hirano)[1]
[1] 弘前大学 (Hirosaki University)
e-mail : hirano@hirosaki-u.ac.jp

## 1 序論

動的な破壊現象の最中に, 周囲の弾性体がどのように応答するかという問題は, 地震時の断層破壊による地表の強震動などを理解するために詳しく調べられている. ここで動的な破壊の拡大とは, 以下のように定式化される. $\mathbb{R}^3$ を弾性領域とし, その内部では等方線形弾性体の運動方程式が成立しているとする. またその内部には有界な亀裂 $\Sigma(t)(\subset \mathbb{R}^2)$ があり, 時間と共に拡大する. このとき, 弾性体の変位場 $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$ と速度場 $\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})$ は $t \le 0$ においてゼロとし, $t > 0$ では以下を満たす:

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}, & (\boldsymbol{x} \in \Omega) \\ \partial_t \boldsymbol{v} = \alpha^2 \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - \beta^2 \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u}), & (\boldsymbol{x} \in \Omega) \\ \boldsymbol{u} \to 0, & (|\boldsymbol{x}| \to \infty) \\ [\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{\xi} + \epsilon\boldsymbol{n})]_{\epsilon\to-\infty}^{\epsilon\to+\infty} = \boldsymbol{V}, & (\boldsymbol{\xi} \in \Sigma) \end{cases} \tag{1}$$

ただし $\alpha, \beta$ はそれぞれ縦波速度と横波速度, $\boldsymbol{n}$ は $\Sigma$ の単位法線ベクトルである. 分布関数 $\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{x})$ は亀裂に沿う変位不連続の変化率を表しており, 特に地震のような圧縮場で発生するせん断亀裂の場合, $\boldsymbol{V}$ は滑り速度で, $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n} \equiv 0$ となる.

地震工学的観点からは, 滑り速度分布 $\boldsymbol{V}$ が与えられたときに速度場 $\boldsymbol{v}$ がどうなるかが重要である. 従来の決定論的な枠組みでは, $\boldsymbol{V}$ として比較的滑らかな時空間分布を仮定することも多かったが, 現実の地震波形は複雑な高周波成分に富む. そこで本研究では $\boldsymbol{V}$ の時空間分布にノイズを付加したものを仮定し, その場合に $\Sigma$ のごく近傍における媒質の速度場をシミュレートする.

## 2 手法

本研究では, 以下のように積分表現を時空間的に離散化し, 境界要素法により弾性媒質の速度 $\boldsymbol{v}$ を求めた:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) &= \int_0^t \int_{\Sigma(t)} K(t-\tau, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\, \boldsymbol{V}(\tau,\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}\, d\tau \\ &\sim \sum_{i,j} K(t-\tau_i, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}_j)\, \boldsymbol{V}(\tau_i,\boldsymbol{\xi}_j)\, \delta\Sigma\, \delta\tau \end{aligned} \tag{2}$$

ここで伝達関数 $K$ は, $\Sigma$ を正方形要素に分割し, その要素に単位量の滑り速度が与えられた際の, 評価点 $(t,\boldsymbol{x})$ における媒質速度であり, 式 (1) の基本解を利用して得られる [1]. 今回想定した $\boldsymbol{V}$ は, 2025 年 3 月にミャンマーで発生した地震の破壊と滑りのシナリオ [2] に基づく. この地震では, 地表断層が破壊する瞬間が世界で初めて映像記録に残され [3], そこから断層近傍の挙動について多くの知見が得られつつある. 既に実施された簡易な計算 [2] により, 極めて単純な滑り速度分布でも地表速度場が説明できる部分と, そうでない部分が混在することが判明している. そこで, 仮定する滑り分布に一様な振幅の正規乱数を付加するなど不均質を仮定した場合に, 媒質の速度がどのようになるか検証した.

 

## 3　結果と考察

得られた媒質速度の時系列には, ノイズの影響が小さく滑らかな部分と, 影響が大きく高周波成分に富む部分が見られた. 前者は破壊が評価点の近傍を通過する瞬間に見られ, 後者は破壊開始点から評価点までを長距離伝播してきた弾性波が強く影響する部分であった. このことは, 断層近傍で観測されうる地震波形に滑らかな部分と振動する部分が棲み分けて共存する可能性を示す. 実際, ミャンマーにおける映像記録の分析からもそのような様子が明確であり [2], 決定論的なモデル化では困難なランダム成分の重ね合わせが, 観測をよく説明することが分かる.

なお今回のノイズ付加は, 式 (1) における $\Sigma$ 上の境界条件に替えて,

$$[\boldsymbol{v}\,(t,\boldsymbol{\xi}+\epsilon\boldsymbol{n})]_{\epsilon\to-\infty}^{\epsilon\to+\infty}=(1+W)\boldsymbol{V},(\boldsymbol{\xi}\in\Sigma) \tag{3}$$

を仮定することに等しい. ここで, $W$ は平均ゼロ, 分散が 1 よりも十分に小さな時空間ホワイトノイズである. したがってこのモデルは, 境界条件に乗法的ノイズを含む確率偏微分方程式であるとも言える. ノイズ源が固定された問題の場合, その影響の強さが時間と共に変化することはない. しかし今回のようにノイズ源が移動する場合には, その位置に応じて影響も変化し, 特にノイズ源が近いほど相対的に乗法的ノイズの影響は小さいという結果が得られた.

**謝辞**　本研究は JSPS 科研費 22K03782 の助成を受けたものです。

## 参考文献

[1] Tada, T. (2005). Displacement and stress Green's functions for a constant slip-rate on a quadrantal fault, *Geophysical Journal International*, 162(3), 1007–1023. `https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2005.02681.x`

[2] Hirano, S., Doke, R., & Maeda, T. (2025). Supershear-subshear-supershear rupture sequence during the 2025 Mandalay Earthquake in Myanmar, arXiv:2506.09652 [physics.geo-ph], `https://doi.org/10.48550/arXiv.2506.09652`

[3] # the Super Shear Mandalay Earthquake!! Valuable Recorded "Super Shear Mandalay Earthquake_28th March 2025" in Thapyay Wa Solar Firm from our losses! (Appx.12' land slide) (Credit to: GP Energy Myanmar for their valuable recorded), *facebook*, Retrieved July 2, 2025, from `https://www.facebook.com/htin.aung.33/videos/1041579804084512`

# 降伏曲面が時間に依存する弾塑性モデルに対する有限要素解法

# Finite Element Method for an Elastoplastic Model with Time-Dependent Yield Surfaces

松井 一徳 (Kazunori Matsui)[1]
[1] 東京海洋大学 (Tokyo University of Marine Science and Technology)
e-mail : kmat002@kaiyodai.ac.jp

## 1　ひずみ硬化と移動硬化則

金属などの材料の弾塑性挙動は，次の発展包含で表現できる [1]:

$$S\frac{\partial \sigma}{\partial t} \in \mathcal{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \partial I_K(\sigma). \tag{1}$$

ここで，$\sigma : [0,T]\times\Omega \to \mathcal{S}_d$ は応力，$T > 0$，$\Omega$ は $\mathbb{R}^d$ $(d = 2,3)$ の多角形または多面体領域，$\mathcal{S}_d$ は $d$ 次対称行列全体のなす空間，$S$ は均質，対称，等方な弾性コンプライアンステンソル $(S\tau = \frac{1+\nu}{E}\tau - \frac{\nu}{E}(\mathrm{tr}\,\tau)E_d\ (\tau \in \mathcal{S}_d), E > 0, -1 < \nu < \frac{1}{d-1})$，$u : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^d$ は変位，$\mathcal{E}(u) \coloneqq \frac{\nabla u + (\nabla u)^{\mathrm{T}}}{2}$ は全ひずみ，$K \subset H \coloneqq L^2(\Omega;\mathcal{S}_d)$ は与えられた閉凸集合であり，$I_K$ は指示関数，$\partial I_K$ は $I_K$ の劣微分とする．この $K$ は制約集合と呼ばれ， $K$ の境界は降伏曲面と呼ばれる．

材料に繰り返し荷重を加えると，塑性変形を生じさせるために必要な荷重がだんだん大きくなることがある．この現象をひずみ硬化という．ひずみ硬化の一つの記述方法である移動硬化則では，塑性変形の進行に伴い制約集合が応力空間内で移動すると考える．ここでは，制約集合が未知関数である塑性ひずみ $\varepsilon_{\mathrm{p}} = \mathcal{E}(u) - S\sigma$ に依存する線形移動硬化モデルについて考える:

$$K \coloneqq \tilde{K} + \alpha, \quad \alpha = a\varepsilon_{\mathrm{p}}, \quad \tilde{K}(t) \coloneqq \left\{\tau \in H : |\tau^D| \le g(t) \text{ a.e. in } \Omega\right\}. \tag{2}$$

ここでは降伏曲面の形状として，ミーゼスの降伏曲面 (降伏条件) を仮定しており，$\tau^D \coloneqq \tau - \frac{\mathrm{tr}\,\tau}{d}E_d$ は $\tau$ の偏差成分であり，$|\cdot|$ は行列に対する Frobenius ノルム，$E_d$ は $d$ 次単位行列，$a > 0$，$\alpha : [0,T]\times\Omega \to \mathcal{S}_d$ は背応力で $\alpha(0,\cdot) = 0$ とし，$g : [0,T] \to L^2(\Omega)$ は与えられたものとする．

## 2　問題

$\Omega$ の境界 $\Gamma \coloneqq \partial\Omega$ に対して 2 つの互いに素な部分集合 $\Gamma_1, \Gamma_2$ が存在し，$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $|\Gamma_1| > 0$ を満たすと仮定する．ここで， $|\Gamma_1|$ は $\Gamma_1$ の $(d-1)$ 次元ハウスドルフ測度である．

**問題 2.1.** 次を満たす変位速度 $v : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^d$ と応力 $\sigma : [0,T]\times\Omega \to \mathcal{S}_d$ を求めよ．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \eta\,\mathrm{div}\,\mathcal{E}(v) + \mathrm{div}\,\sigma + f & \text{in } (0,T)\times\Omega, \\ S\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} \in \mathcal{E}(v) + b - \partial I_K(\sigma) & \text{in } (0,T)\times\Omega, \end{cases} + \begin{cases} v = 0 & \text{on } (0,T)\times\Gamma_1, \\ (\eta\mathcal{E}(v) + \sigma)\mathbf{n} = 0 & \text{on } (0,T)\times\Gamma_2, \\ v(0,\cdot) = v_0 & \text{in } \Omega, \\ \sigma(0,\cdot) = \sigma_0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

ここで，$K$ は時刻 $t$ と塑性ひずみ $\varepsilon_{\mathrm{p}} = \mathcal{E}\left(\int_0^t v(s)ds\right) - S\sigma$ に依存する (2) で定まる制約集合である．$\eta > 0$ は粘性係数，$f : (0,T)\times\Omega \to \mathbb{R}^d$ は外力，$b : (0,T)\times\Omega \to \mathcal{S}_d$ は非斉次境界条件を斉次境界条件に変換する際に生じる関数，$v_0 : \Omega \to \mathbb{R}^d$ と $\sigma_0 : \Omega \to \mathcal{S}_d$ は $\sigma_0 \in \tilde{K}(0)$ を満たす初期値であり，与えられているものとする．また，$\mathbf{n}$ は境界 $\Gamma$ に対する外向き単位法線ベクトルである．

 

問題 2.1 を素朴に陰解法で解こうとすると，非線形な問題を解く必要がある．そこで，[2] では背応力 $\alpha$ が既知で $S\tau = \tau$ $(\tau \in \mathcal{S}_d)$ の場合に対して射影法的アプローチを提案した．本講演では，(2) のように背応力 $\alpha$ が塑性ひずみに依存する場合にも射影法的アプローチが有効であることを紹介する．

## 3　有限要素スキーム

領域 $\overline{\Omega}$ を正則な三角形分割 $\mathcal{T}_h$ で離散化し，各要素 $K \in \mathcal{T}_h$ の直径を $h_K \coloneqq \operatorname{diam}(K)$ とし，$h \coloneqq \max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$ とする．$\mathrm{P}_m(K)$ を $K$ 上の高々 $m$ 次多項式空間とし，$W_h^{(m)} \coloneqq \{\, \psi_h \in C(\overline{\Omega}) \mid \psi_h|_K \in \mathrm{P}_m(K)\ (\forall K \in \mathcal{T}_h) \,\}$ とする．本講演では速度場に二次要素，応力場に一次要素を用いる:

$$\boldsymbol{V}_h \coloneqq \left(W_h^{(2)} \cap H_0^1(\Omega)\right)^d, \quad H_h \coloneqq \{\tau_h \in C(\overline{\Omega}; \mathcal{S}_d) \mid \tau_h|_K \in \mathrm{P}_1(K)^{d\times d}\ (\forall K \in \mathcal{T}_h)\,\}.$$

問題 2.1 に対する数値計算スキーム (cf.[2]) を提案する: $\sigma_h^0 \in \tilde{K}(0)$ を満たす初期値 $(v_h^0, \sigma_h^0) \in \boldsymbol{V}_h \times H_h$ が与えられたとし，各 $n = 1, 2, \ldots, N$ で，次を満たす $v_h^n \in \boldsymbol{V}_h$, $\sigma_h^{n,*}, \sigma_h^n \in H_h$ を求める:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{v_h^n - v_h^{n-1}}{\Delta t}, \varphi\right)_{L^2} + \eta(\mathcal{E}(v_h^n), \mathcal{E}(\varphi))_{L^2} + (\sigma_h^{n,*}, \mathcal{E}(\varphi))_{L^2} = (f_h^n, \varphi)_{L^2} & \text{for all } \varphi \in \boldsymbol{V}_h, \\ S\dfrac{\sigma_h^{n,*} - \sigma_h^{n-1}}{\Delta t} = \mathcal{E}(v_h^n) + b_h^n & \text{in } H_h, \\ \xi_h^n = \mathcal{E}(v_h^n) + b_h^n - S\dfrac{\sigma_h^n - \sigma_h^{n-1}}{\Delta t} \left(= S\dfrac{\sigma_h^{n,*} - \sigma_h^n}{\Delta t}\right) & \text{in } H_h, \\ \dfrac{\alpha_h^n - \alpha_h^{n-1}}{\Delta t} = a\xi_h^n & \text{in } H_h, \\ \sigma_h^n - \alpha_h^n = \Pi_h \mathcal{P}_{g_h^n}\left(\sigma_h^{n,*} - \alpha_h^n\right) & \text{in } H_h. \end{cases} \tag{3}$$

ただし，ここで $\alpha_h^0 = 0$, $\Pi_h$ は Lagrange 補間作用素，$\mathcal{P}_R : \mathcal{S}_d \to \mathcal{S}_d$ は次で定義されるものである:

$$\mathcal{P}_R(F) \coloneqq \begin{cases} F & \text{if } |F^D| \le R, \\ \dfrac{\operatorname{tr} F}{d} E_d + R\dfrac{F^D}{|F^D|} & \text{if } |F^D| > R. \end{cases}$$

$C\varepsilon = \frac{E}{1+\nu}(\varepsilon - \frac{\nu}{(d-1)\nu - 1}(\operatorname{tr}\varepsilon)E_d)$ $(\varepsilon \in \mathcal{S}_d)$ とすれば，$CS\tau = \tau$ $(\tau \in \mathcal{S}_d)$ なので，(3) の第 2 式は $\sigma_h^{n,*} = \sigma_h^{n-1} + \Delta t C(\mathcal{E}(v_h^n) + b_h^n)$ と書ける．よって，第 1 式において，$v_h^{n-1} \in \boldsymbol{V}_h$, $\sigma_h^{n-1} \in H_h$ が既知なら，Korn の不等式と $C$ の正定値性，Lax–Milgram の定理から $v_h^n \in \boldsymbol{V}_h$ が求まる．再び第 2 式を用いて $\sigma_h^{n,*}$ が決まる．また，(3) の第 3〜5 式は下記のように変形できるため，

$$\alpha_h^n - \alpha_h^{n-1} = \frac{a}{a+1}\left(\sigma_h^{n,*} - \alpha_h^{n-1} - \mathcal{P}_{g_h^n}(\sigma_h^{n,*} - \alpha_h^{n-1})\right), \quad \sigma_h^n - \alpha_h^n = \mathcal{P}_{g_h^n}\left(\sigma_h^{n,*} - \alpha_h^n\right)$$

と $\alpha_h^n, \sigma_h^n$ が陽に計算できる．つまり，提案スキームは，拡散型の線形方程式を解いて $v_h^n$ を更新し，各要素で背応力 $\alpha_h^n$ を陽的に計算し，応力を制約集合へ射影する，というシンプルな計算で済む．

本講演では，問題 2.1 の弱解の一意存在性について紹介し，提案スキームの解が適当なノルムの下で有界であることを示す．

## 参考文献


[1] G. Duavut and J. L. Lions, Inequalities in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, 1976.

[2] Y. Akagawa and K. Matsui, Projection scheme for a perfect plasticity model with a time-dependent constraint set, J. Math. Anal. Appl., 542(2) (2025), 128838.

# Maxwell モデルの時間非局所化: モデリングから逆問題へ

# Time-Nonlocalization of the Maxwell Model: from Modeling to an Inverse Problem

劉 逸侃 (Yikan Liu)[1], 木村 正人 (Masato Kimura)[2], 中村 玄 (Gen Nakamura)[3]
[1] 京都大学 (Kyoto University), [2] 金沢大学 (Kanazawa University), [3] 北海道大学 (Hokkaido University)
e-mail : liu.yikan.8z@kyoto-u.ac.jp

## 1 Introduction

For modeling the viscoelastic phenomena, a lot of spring-dashpot models have been proposed, in which spring and dashpot units represent elasticity and viscosity, respectively (see [1]). Recently, there is a trend to include time nonlocality in viscoelastic models to describe the memory effect (e.g., [2]), but the governing equations mostly lack rigorous derivations. Taking a fractional time derivative in the motion equation of the dashpot unit in the simple Maxwell model, we derive a double-term time-fractional wave equation with orders 2 and $\beta \in (1,2)$ in time. Moreover, we study a related inverse problem on determining the spatial component of the source term by partial interior observation.

## 2 Derivation of a Governing Equation

We investigate the Maxwell model, which simply connects one spring unit and one dashpot unit in series (see Figure 1). Then the traditional constitutive equation for the Maxwell equation can be written as

$$\begin{cases} \rho(x)\partial_t^2 u = \operatorname{div}\sigma[u,\varphi] + F(x,t) & \text{(Newton's second law)},\\ \sigma[u,\varphi] = C(x)(e[u]-\varphi) & \text{(Hooke's law)},\\ \eta(x)\partial_t\varphi = \sigma[u,\varphi] & \text{(dashpot property)}, \end{cases} \tag{1}$$

where $u$ is the total displacement, $e[u] = (\nabla u + (\nabla u)^{\mathrm{T}})/2$ is the total strain, $\varphi$ is the strain of the dashpot and $\sigma[u,\varphi]$ denotes the total stress. Besides, $\rho(x)$, $C(x)$, $\eta(x)$ and $F(x,t)$ stand for the density, the elasticity tensor, the relaxation parameter and the external force, respectively.

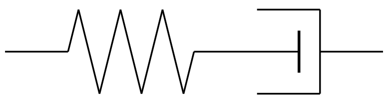

図 1. The Maxwell model.

In order to reflect the time memory effect in the Maxwell model, in the dashpot property in (1) we replace the first derivative with a Caputo derivative $\mathrm{d}_t^\alpha$ of order $\alpha \in (0,1)$ to consider

$$\begin{cases} \rho(x)\partial_t^2 u = \operatorname{div}\sigma[u,\varphi] + F(x,t),\\ \sigma[u,\varphi] = C(x)(e[u]-\varphi),\\ \eta(x)\partial_t^\alpha\varphi = \sigma[u,\varphi], \end{cases} \tag{2}$$

where $\partial_t^\alpha := J^{1-\alpha} \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ and $J^{1-\alpha} f(t) := \int_0^t \frac{(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(s)\,\mathrm{d}s$ denotes the Riemann-Liouville integral of order $(1-\alpha)$. Then our purpose is to derive a concise governing equation for (2).

For simplicity, we restrict the system in one spatial dimension and assume that the initial displacement vanishes. Introducing an auxiliary function

$$v(x,t) := \int_0^t E_{\alpha,1}\left(-\frac{C(x)}{\eta(x)}(t-s)^\alpha\right)\partial_s u(x,s)\,\mathrm{d}s,$$

where $E_{\alpha,1}(z) := \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$ denotes the Mittag-Leffler function, it turns out that $v$ satisfies a double-term time-fractional wave equation

$$\begin{cases}\rho(x)\partial_t^2 v + \dfrac{\rho(x)C(x)}{\eta(x)} D_t^\beta v = \partial_x(C(x)\partial_x v) + G(x,t),\\ v|_{t=0} = 0, \quad \partial_t v|_{t=0} = u_1(x).\end{cases} \tag{3}$$

Here $\beta = 2-\alpha$ and $D_t^\beta := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \circ J^\alpha$ is the Riemann-Liouville derivative of order $\beta$.

## 3 A Related Inverse Source Problem

To formulate the inverse problem, we relax the spatial dimensions to $d \in \mathbb{N}$ and consider (3) in a smooth bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Then we impose the homogeneous Dirichlet boundary condition and assume constant coefficients $\rho, C, \eta$ to consider

$$\begin{cases}\rho\,\partial_t^2 v + k\,D_t^\beta v = C\triangle v + p(t)q(x) & \text{in } \Omega\times(0,T),\\ v=0,\ \partial_t v = u_1 & \text{in } \Omega\times\{0\},\\ v=0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T).\end{cases}$$

Here the source term $G(x,t)$ is assumed to take a form of separated variable, where the spatial component $q(x)$ is unknown. Then we deal with the inverse problem on determining $q(x)$ by the partial interior observation of $v$ in $\omega\times(0,T)$ with a nonempty subdomain $\omega\subset\Omega$.

For the numerical reconstruction, we adopt the classical Tikhonov regularization to reformulate the inverse problem into a related optimization problem, for which we follow the line of [3] to develop an iterative thresholding algorithm by using the corresponding adjoint system. Several numerical tests confirmed the accuracy and efficiency of the algorithm.

**謝辞** This work is supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers JP22K13954, JP23KK0049.

## 参考文献

[1] T.S. Brown, S. Du, H. Eruslu and F.-J. Sayas, Analysis of models for viscoelastic wave propagation, Appl. Math. Nonlinear Sci., 3 (2018), 55–96.

[2] B. Kaltenbacher and W. Rundell, Determining damping terms in fractional wave equations, Inverse Problems, 38 (2022), 075004 (35pp).

[3] D. Jiang, Z. Li, Y. Liu and M. Yamamoto, Weak unique continuation property and a related inverse source problem for time-fractional diffusion-advection equation, Inverse Problems, 33 (2017), 055013 (22pp).