

待ち時間つき線型ボルツマン方程式の漸近極限としての時間非整数階移流拡散方程式

Time-fractional advection-diffusion equation as the asymptotic limit of the linear Boltzmann equation with waiting time

町田 学 (Manabu Machida)
近畿大学 (Kindai University)
e-mail : machida@hiro.kindai.ac.jp

1 概要

地下の汚染物質は地下水によって運ばれて広がっていく。このような多孔質媒体中の分子輸送が異常拡散を示すことが 30 年前から知られているが、数理モデルは未だに確立されていない。最近、実験室での実験結果が線型ボルツマン方程式に支配されることがわかったが [1, 2]、その漸近極限として時間非整数階の移流拡散方程式が導出されたので、報告する [3]。観測データを再現するために、非整数階微分を持つ方程式はすでにこれまで提案されてきたが [4]、本結果は過去の研究とも整合する。

2 拡散近似

次のような線型ボルツマン方程式（輻射輸送方程式）を考える ($\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, $\hat{\mathbf{s}} \in \mathbb{S}^2$, $t > 0$) :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 + \mathbf{c}) \cdot \nabla + \sigma_a + \sigma_s + \sigma_{\text{trap}} \right] \psi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t) = \sigma_s \int_{\mathbb{S}^2} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') \psi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}', t) d\hat{\mathbf{s}}' + \sigma_{\text{trap}} \int_0^t w(t-t') \psi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t') dt' + \sigma_{\text{trap}} \Phi(t) a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \quad (1)$$

ただし、初期条件は $\psi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, 0) = a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ とする。ここで、 $\epsilon > 0$ を導入して

$$\mathbf{c} \rightarrow \epsilon \mathbf{c}, \quad \sigma_s \rightarrow \frac{\sigma_s}{\epsilon}, \quad \sigma_a \rightarrow \epsilon \sigma_a, \quad \sigma_{\text{trap}} \rightarrow \epsilon \sigma_{\text{trap}}, \quad \gamma \rightarrow \frac{\gamma}{\epsilon} \quad (2)$$

と変数変換し、 ϵ をゼロにもっていく。この拡散近似により、次の時間非整数階の方程式を得る :

$$[\partial_t + \eta \partial_t^\alpha - D_0 \Delta + \mathbf{c} \cdot \nabla + \sigma_a] u(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0. \quad (3)$$

$$u(\mathbf{r}, 0) = a_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$$

ここで、 $\eta = \gamma^\alpha \sigma_{\text{trap}}$ 、 $D_0 = \frac{|\mathbf{v}_0|^2}{3(1-g)\sigma_s}$ 、 $g = \int_{\mathbb{S}^2} \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}' p(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}') d\hat{\mathbf{s}}'$ 、 $a_0(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{S}^2} a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\hat{\mathbf{s}}$ 、さらに

$$\Phi(t) = 1 - \int_0^t w(\tau) d\tau, \quad w(\tau) \sim \alpha \gamma^\alpha \tau^{-(1+\alpha)} \quad (0 < \alpha < 1). \quad (4)$$

3 数値計算

線型ボルツマン方程式 ((1) 式) と非整数階移流拡散方程式 ((3) 式) の数値解を求め、比較を行った (図 1)。図 1 では、通常の移流拡散方程式 ($\eta = 0$) の解も一緒にプロットしている。実験室における、長さ 10 cm や 20 cm のカラムを用いた実験より少し大きなスケールの輸送現象はすでに拡散領域にあり、(1) 式の解と (3) 式の解はほぼ一致する様子がわかる。

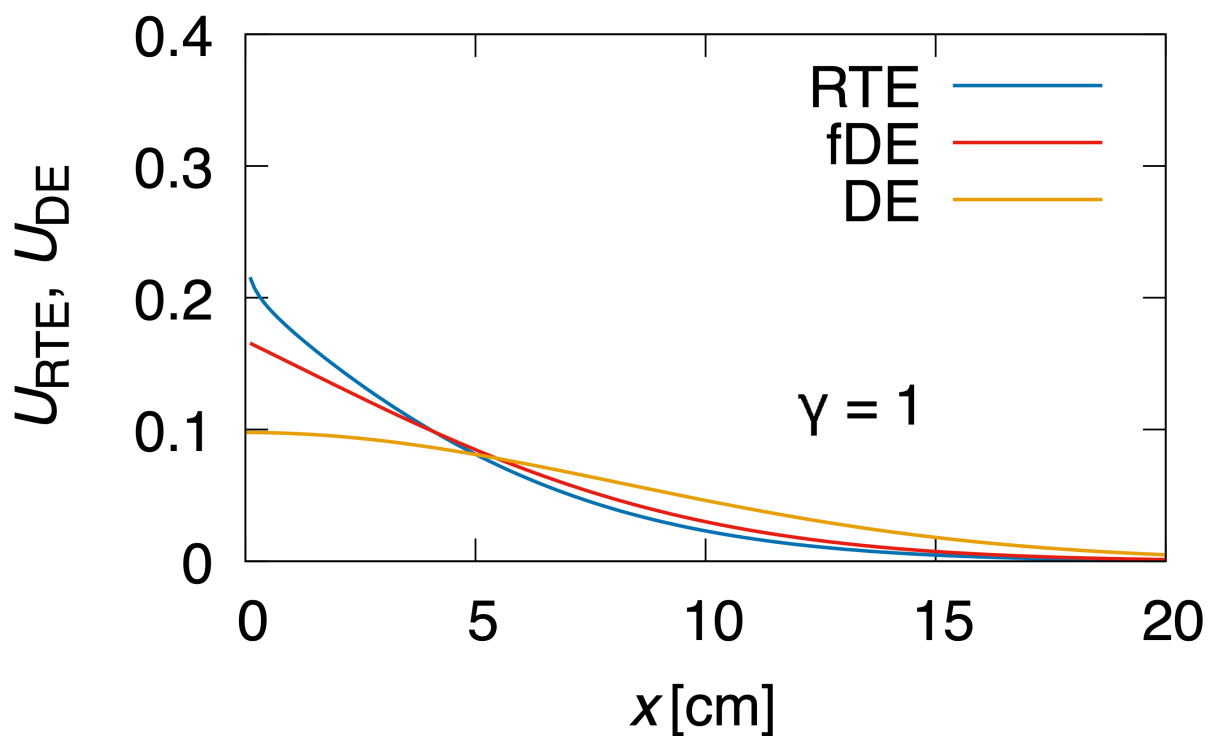


図 1. 数値実験：青線は線型ボルツマン方程式 ((1) 式)、赤線は非整数階移流拡散方程式 ((3) 式)、黄土色は通常の移流拡散方程式 ($\eta = 0$) を示す。パラメータは、 $\gamma = 1$ 、 $t = 100 \text{ min}$ 、 $\sigma_{\text{trap}} = 0.1 \text{ min}^{-1}$ 、 $\alpha = 1/2$ 、とした。

参考文献

- [1] K. Amagai, M. Yamakawa, M. Machida and Y. Hatano, The linear Boltzmann equation in column experiments of porous media, *Transport in Porous Media*, 132 (2020), 311–33.
- [2] K. Amagai, Y. Hatano and M. Machida, Linear transport in porous media, *Journal of Computational and Theoretical Transport*, 50 (2021), 377–38.
- [3] M. Machida, The radiative transport equation with waiting time and its diffusion approximation with a time-fractional derivative, to appear in *Journal of Computational and Theoretical Transport*.
- [4] M. M. Meerschaert, Y. Zhang and B. Baeumer, Tempered anomalous diffusion in heterogeneous systems, *Geophysical Research Letters*, 35 (2008), L17403.

ラグランジュ移動メッシュ法

Lagrange–Galerkin Moving Mesh Method

Kharisma Surya Putri¹, Niklas Kolbe², 野津裕史 (Hirofumi Notsu)³

^{1,3} 金沢大学 (Kanazawa University), ² RWTH Aachen University

e-mail : kharismasp@stu.kanazawa-u.ac.jp

1 保存型移流拡散問題

$\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ を有界領域, $\Gamma := \partial\Omega$ を Ω の境界, $n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を外向き単位法線, T を正の定数とする. 速度 $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ と初期データ $\phi^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は与えられた関数であり, $\nu > 0$ は拡散係数とする. ここに, $u \in C^0([0, T]; W_0^{1,\infty}(\Omega))$ を仮定する. 次の 1 次元保存型移流拡散問題:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (u\phi) - \nu \Delta \phi = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1a)$$

$$\nu \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi u \cdot n = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T), \quad (1b)$$

$$\phi = \phi^0, \quad (x, t) \in \Omega \times \{0\}, \quad (1c)$$

をみたす関数 $\phi : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ を求めよ, を考える.

2 ラグランジュ・ガレルキン移動メッシュ (LGMM) 法

問題 (1) の基本的な離散化は時間 2 次精度質量保存ラグランジュ・ガレルキン (LG) 法 [3] を用いて行う. LG 法は, 一般に, 無条件安定性, 係数行列の対称性などの長所が知られており, 移流が支配的な問題のための強力な手法のひとつある. しかしながら, 鋭いスパイクが現れるような凝集現象を捉えようとする場合, 固定メッシュを用いる LG 法では, 振動が現れることがある (図 1 参照).

LG スキームは, 速度場による上流点を求め, 前の時刻の数値解の値を参照する. 我々の基本的なアイデアは, 質量輸送に基づくアプローチ [2] を参照し, メッシュを速度場に沿って移動させることである. メッシュを移動することにより, 数値計算において上流点を容易に特定し, また, 補間誤差を軽減する可能性がある.

時間 $t \in [0, T]$ に対して, $\mathcal{T}_h(t) = \{K_i(t)\}_{i=1}^{N_p-1}$ を時間依存のメッシュ, $\{P_i(t)\}_{i=1}^{N_p} \subset \bar{\Omega}$ を節点の座標の集合, $\{\phi_i(x, t)\}_{i=1}^{N_p}$ を P1-基底関数の集合とする. 初期節点座標の集合 $\{P_i^0\}_{i=1}^{N_p} \subset \bar{\Omega}$ が与えられたとする. $a = P_1^0 < P_2^0 < \dots < P_{N_p}^0 = b$ を仮定する. 次の常微分方程式に支配される問題:

$$\frac{dP_i}{dt}(t) = u(P_i(t), t) + \nu \sum_{K(t) \ni P_i(t)} [\nabla \varphi_i(t)]|_{K(t)}, \quad i = 2, \dots, N_p - 1, \quad t \in (0, T), \quad (2a)$$

$$P_1(t) = a, \quad P_{N_p}(t) = b, \quad t \in (0, T), \quad (2b)$$

$$P_i(t) = P_i^0, \quad i = 1, \dots, N_p, \quad t = 0, \quad (2c)$$

をみたす $\{P_i(t) \in \bar{\Omega}; i = 1, \dots, N_p, t \in (0, T)\}$ を求めよ, の解を用いてメッシュ (節点) を移動する. 本研究では, LG 法と上記のメッシュ移動法の組み合わせたラグランジュ・ガレルキン移動メッシュ (LGMM) 法 [1] を提案する.

備考: ここでは一次元空間の場合について議論を始めるが, 同様の解析は多次元の場合にも拡張可能である. 詳しくは本講演の最後で説明する.

3 理論結果

我々の LGMM 法の数学的解析を行い、以下の 4 つの結果を得た。以下では、時間刻み幅 Δt は $\Delta t|u|_{C(W^{1,\infty})} \leq 1/8$ の条件をみたすとする。問題 (2) の後退オイラー法を基礎とした近似解を単に問題 (2) の近似解と書く (詳細は [1] 参照)。

定理 1 (メッシュが重ならない条件) $\{P_i^n \in \bar{\Omega}; i = 1, \dots, N_p, n = 1, \dots, N_T\}$ を問題 (2) の近似解とする。このとき、 $P_i^n < P_j^n$ ($i < j$, $i, j \in \{1, \dots, N_p\}, n \in \{0, \dots, N_T\}$) が成立する。

定理 2 (質量保存性) LGMM 法の解を $\{\phi_h^n\}_{n=0}^{N_T} \subset \Psi_h$ とする。このとき、 $n = 0, 1, \dots, N_T$ に対して、 $\int_{\Omega} \phi_h^n dx = \int_{\Omega} \phi_h^0 dx$ が成り立つ。

定理 3 (安定性) LGMM 法の解を $\{\phi_h^n\}_{n=0}^{N_T} \subset \Psi_h$ とする。このとき、 h と Δt に依存しない $C > 0$ が存在し、不等式 $\|\phi_h\|_{\ell^\infty(L^2)} + \sqrt{\nu}\|\nabla \phi_h\|_{\ell^2(L^2)} \leq C\|\phi_h^0\|$ が成り立つ。

定理 4 (誤差評価) 問題 (1) の解 ϕ は、 $\phi \in Z^3 \cap H^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^3(\Omega))$ をみたすとする。初期時刻のメッシュを用いたラグランジュ補間による関数 $\phi_h^0 = \Pi_h^0 \phi^0 \in \Psi_h^0$ に対する LGMM 法の解を $\{\phi_h^n\}_{n=0}^{N_T}$ とする。このとき、 h と Δt に依存しない定数 $C > 0$ が存在して、 $\|\phi_h - \phi\|_{\ell^\infty(L^2)} + \sqrt{\nu}\|\nabla(\phi_h - \phi)\|_{\ell^2(L^2)} \leq C(\Delta t^2 + h^2)\|\phi\|_{Z^3 \cap H^2(H^2) \cap H^1(H^3)}$ が成り立つ。

4 数値結果

提案した LGMM 法の検証のために、LG 法と LGMM 法を使用して問題 (1) の数値計算を行った。次の具体的な一次元問題を設定する: $\Omega = (-1, 1)$, $T = 2$, $u(x, t) = \sin(2\pi x)$, $\nu = 10^{-5}$, および $\phi^0(x) = \exp[-(1 - \cos x)/0.01]$ 。図 1 において、固定メッシュを用いた LG 法と LGMM 法の結果を比較する。固定メッシュ LG 法が振動する解をもたらす一方で、LGMM 法が凝集現象を高精度に捉えていることが観察される。

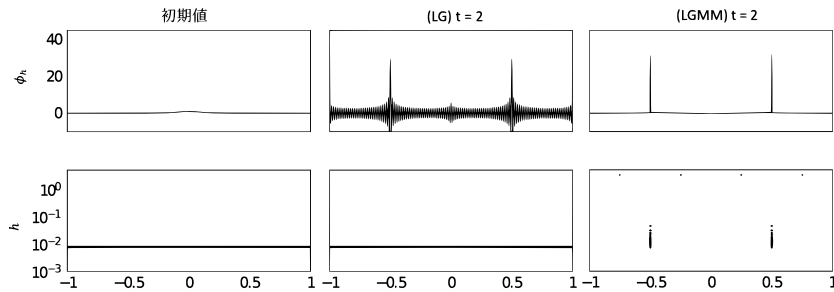


図 1. 初期値 $t = 0$ (左), 固定メッシュ LG 法 $t = 2$ (中央), LGMM 法 $t = 2$ (右) の結果

参考文献

- [1] K.S. Putri, T. Mizuochi, N. Kolbe, and H. Notsu. Error Estimates for First- and Second-Order Lagrange–Galerkin Moving Mesh Schemes for the One-Dimensional Convection–Diffusion Equation. *J. Sci. Comput.* **101**, 37, 2024.
- [2] J.A. Carrillo, N. Kolbe, and M. Lukacova–Medvid’ova. A hybrid mass transport finite element method for Keller–Segel type systems. *J. Sci. Comput.* **80**, 1777–1804, 2019.
- [3] K. Futai, N. Kolbe, H. Notsu, and T. Suzuki. A mass-preserving two-step Lagrange–Galerkin scheme for convection-diffusion problems. *J. Sci. Comput.* **92**, 37, 2022.

双曲曲率流の安定な数値計算

Stable numerical computation of hyperbolic curvature flow

大駒 宗帥喜 (Kazuki Ookoma)¹, 矢崎 成俊 (Shigetoshi Yazaki)¹,

¹ 明治大学 (Meiji University)

e-mail : ce246001@meiji.ac.jp

1 概要

これまで、発展方程式 $\partial_t \gamma = V\mathbf{N} + W\mathbf{T}$ に従って時間発展する平面曲線を平面折れ線で近似する際に、適切な接線速度を用いて数値計算することはよく知られている。接線速度の選び方によっては、曲線が時間発展する過程で、曲線上の点に疎密が生じ、数値計算が破綻する原因となる。そのため、適切な接線速度を用いて曲線状の点を再配置することで、安定した数値計算を実現することができる。[1] で紹介されているように、有限個の平面折れ線の頂点を曲線に沿って等間隔に配置するような方法である一様配置法や、曲線の曲がり具合によって配置する頂点の疎密を制御する曲率調整配置法などがある。本講演では、先行研究 [2] でなされたように Deckelnick[3] の方法の接線速度を用いたり、遅延を含む微分方程式を用いて双曲曲率流によって時間発展する平面曲線を数値計算する。

2 Deckelnick の方法による接線速度を用いた数値計算

平面曲線 Γ 上の点を $\gamma : [0, 1] \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, t) \mapsto \gamma(u, t)$ とする。平面曲線は以下の発展方程式に従う。

$$\ddot{\gamma} = \kappa \mathbf{N} \quad (1)$$

ここで、 κ は曲率、 \mathbf{N} は内向き単位法線ベクトルである。(1) を前進差分を用いて離散化して数値計算すると点に疎密が生じ、数値計算が破綻してしまう。破綻しないようするための一つの手段として、接線速度で点の疎密を制御することが考えられる。

$\eta = \dot{\gamma}$ と置くことで (1) に接線速度を加えられるようにする。接線速度は、Deckelnick[3] によって考案された方法のように、 $\tilde{\alpha} = \partial_s(\log g) = -\partial_u(1/|\partial_u \gamma|) = \langle \partial_{uu} \gamma / |\partial_u \gamma|^2, \mathbf{T} \rangle$, $\tilde{T} = (\partial_u \gamma, \partial_u \eta) / \sqrt{|\partial_u \gamma|^2 + |\partial_u \eta|^2}$ とおいて

$$\partial_t \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \mathbf{N} - \frac{1}{|\partial_u \gamma|} \langle \partial_u \eta, \eta \rangle \mathbf{T} \end{pmatrix} + \tilde{\alpha} \tilde{T} \quad (2)$$

とする。ここで、 \mathbf{T} は曲線 Γ 上の点 γ における単位接線ベクトルである。(2) から得られる解は、4次元空間内の点 $(\gamma, \eta) \in \mathbb{R}^4$ であり、そのうち発展曲線の形状を知るために必要なのは $\gamma \in \mathbb{R}^2$ である。

図1から、式(1)をそのまま差分化すると計算が破綻してしまうことがわかる。一方、接線速度を用いて点の分布を制御すると、点に疎密は生じるものの計算は破綻していないことがわかる。

3 遅延を含む微分方程式による数値計算

平面曲線の発展方程式 $\partial_t \gamma = V\mathbf{N} + W\mathbf{T}$ によって決まる発展曲線は、その形状が接線速度によらないことはよく知られている。(2) の場合も4次元空間内の曲線 $(\gamma, \eta) \in \mathbb{R}^4$ の形状は変わらない。しかし、本来得たい曲線は $\gamma \in \mathbb{R}^2$ であり、この形状が変わらないことは保証されない。

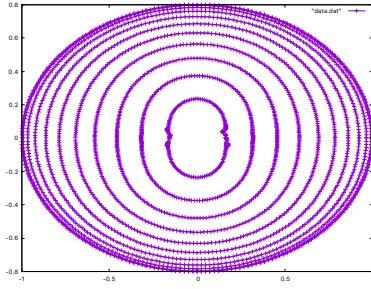


図 1. (1) による数値解

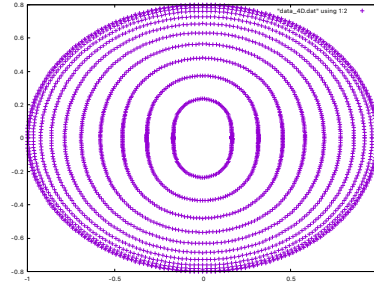


図 2. (2) による数値解

式 (1) の両辺を $t - \tau$ から t まで積分すると, $\partial_t \gamma = \partial_t \gamma(u, 0) + \int_{t-\tau}^t \kappa \mathbf{N} dt$ となる. 積分部分について積分の平均値の定理より, ある $\alpha \in [0, 1]$ が存在し, $\int_{t-\tau}^t \kappa(u, t) \mathbf{N}(u, t) dt = \kappa(u, t - \alpha\tau) \mathbf{N}(u, t - \alpha\tau) \tau$ を満たす. したがって, 解くべき方程式は

$$\partial_t \gamma(u, t) = \gamma_1 + \kappa(u, t - \alpha\tau) \mathbf{N}(u, t - \alpha\tau) \tau, \text{ where } \alpha \in [0, 1], \gamma_1 = \gamma_t(u, 0) \quad (3)$$

となる. 式 (3) に関しては, 接線速度を加えても発展曲線の形状に影響が出ないことが保証されるので, 先行研究と同様に Deckelnick の方法の接線速度を用いて数値計算する.

4 双曲曲率流方程式に接線速度を加えることの妥当性

平面曲線が発展方程式 $\partial_t \gamma = V \mathbf{n} + W \mathbf{T}$ に従って発展するとき (ただし, 法線速度成分 V は幾何学的量にのみ依存し, 接線速度成分 W は正則である場合), Epstein と Gage[4] の結果から, 速度ベクトルの接線速度成分を変えることはパラメータ表示にのみ影響し, 発展曲線の形状には影響を与えないことがわかる. このことから, 方程式に接線速度を加えても本来の曲線の形状は得ることができる. しかし, 扱っている方程式 $\partial_{tt} \gamma = \kappa \mathbf{N}$ は運動方程式であり, これを解いて得られる γ は, この方程式に従って動く質点の位置である. すなわち, 数値計算の安定化を目的として接線速度成分を加えることは, 質点の実際の運動を変えてしまうことになり, 物理的意味を持つ本来の方程式から逸脱することになるため, 接線速度による調整は意味を持たない. これは数学的にも説明でき, 方程式が幾何学的でないこと, すなわち曲線の形状がパラメータの取り方に依存することからわかる.

参考文献

- [1] 矢崎成俊, 界面現象と曲線の微積分, 共立出版, 2016.
- [2] Monika Suchomelová, Michal Beneš, Miroslav Kolář, Computational aspects of hyperbolic curvature flow, Applied Mathematics, and Computation 495 (2025).
- [3] K.Deckelnick, Weak solutions of the curve shortening flow, Calc. Var. Partial Differential Equations 5 (1997) 489–510.
- [4] C.L.Epstein, M.gage, Wave motion: theory, modeling, and computation, Springer, 1987.

Using Coulomb energy to make uniform distribution points in the region enclosed by a Jordan curve.

Prapapit Chutimantanon¹, Shigetoshi Yazaki²

¹Graduate School of Science and Technology, Meiji University, Kawasaki 214-8571, Japan

²School of Science and Technology, Meiji University, Kanagawa 214-8571, Japan

e-mail : chutimantanthp@gmail.com

1 Introduction

In various scientific and engineering fields, random or non-uniform points are often distributed within a domain. This approach is useful for rapid exploration of unknown spaces, identifying regions of interest or avoidance, and achieving broad coverage—sometimes by varying sampling densities to prioritize specific zones. However, although random sampling is effective for quick assessments, it is generally inadequate for tasks that require precision, balance, or uniform coverage. Randomly placed points may cluster unevenly or leave gaps, leading to biased or incomplete representations.

Generating points with uniform spacing is essential across many areas of computer science and applied mathematics. For instance, in numerical integration, low-discrepancy, uniformly distributed points are critical for achieving accurate and unbiased estimates, especially in high-dimensional Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods. In computer graphics, uniform distributions help ensure smooth rendering, precise texture mapping, and artifact-free procedural generation by evenly spreading visual features. In the field of medical imaging, such as CT and MRI, uniform sampling is vital for reconstructing accurate images. It ensures that all parts of the scanned region are fairly represented, reducing artifacts and improving image quality.

These diverse applications highlight the importance of uniformity—not only as a theoretical concept but also as a practical requirement for achieving accuracy, fairness, and high quality in fields such as computation, engineering, visualization, and healthcare. To achieve this, we minimize Coulomb energy, which defines

$$E = \sum_{i < j} \frac{1}{|x_i - x_j|},$$

where $x_i = (x_i, y_i)$ is in the region Ω enclosed by a curve, to promote uniformity in point distribution and incorporate horizontal winding numbers to ensure that points remain within the desired region. Specifically, points inside the boundary have nonzero horizontal winding numbers, while other cases yield zero, enabling us to generate uniformly distributed points within a confined domain.

2 Results

This figure illustrates one of our results, where we start 1,000 random points in the region enclosed by an elephant-shaped curve.

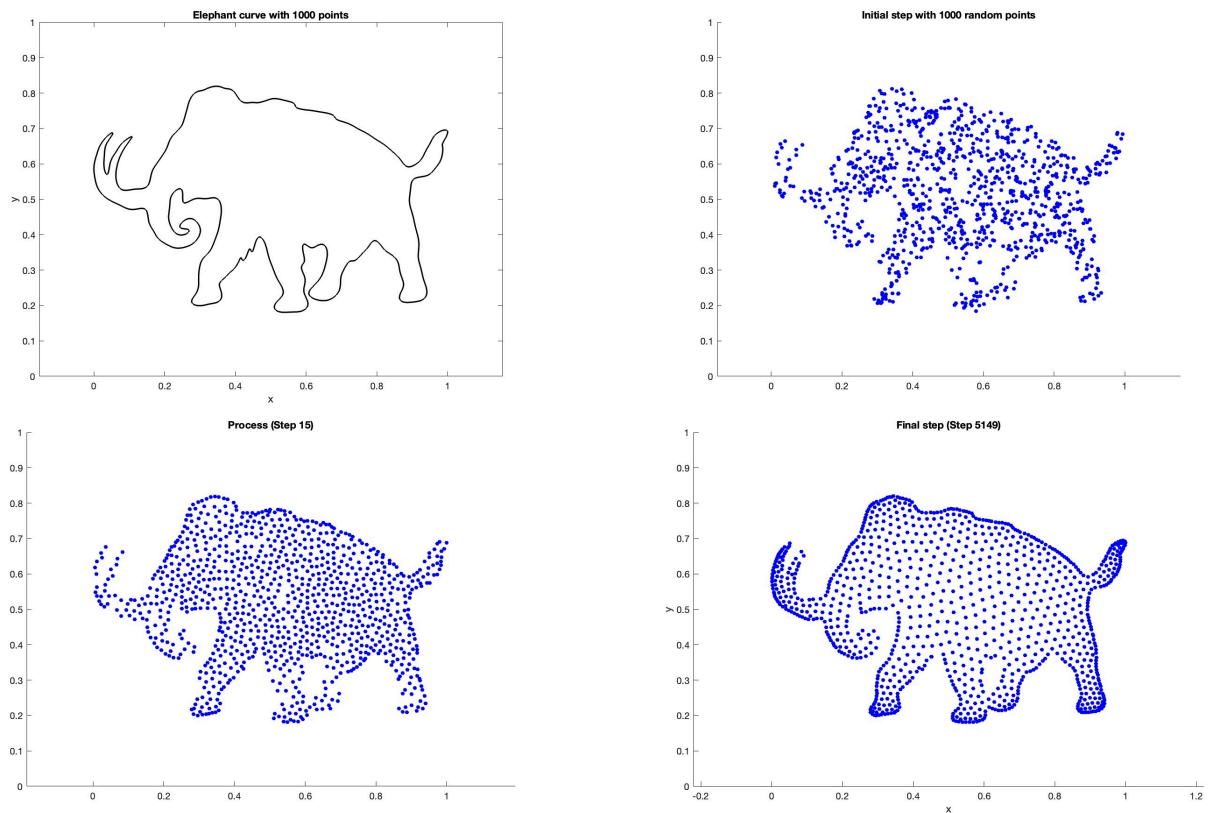


図 1. The top of the left-hand side of this figure is the elephant curve with 1,000 points on the curve, the second one shows an initial step for putting 1,000 random points on the curve, the bottom of the left-hand side shows step 15, and the last one shows the last step which is 5,149 steps.

Acknowledgments This work was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP21H04593.

References

- [1] G. Naresh Kumar, M. Bangi, An Extension to Winding Number and Point-in-Polygon Algorithm, *Procedia Comput. Sci.*, 2018, 548—533.
- [2] L. Kuipers, *Uniform distribution of sequences.*, John Wiley & Sons, Inc., the United States of America, 1974.
- [3] L. Maria Del Bono, F. Nicoletti and F. Ricci-Tersenghi, The most uniform distribution of points on the sphere, *PLOS One*, 19(12), 2024.
- [4] Wolfram Alpha, <https://www.wolframalpha.com/input?i=animal+curve>.