

# クープマン作用素に基づく一般化確率的レジリエンスによるティッピング予測

## Generalized Stochastic Resilience for Early Warning Signals Based on Koopman Operator

宮内 優太 (Yuta Miyauchi)<sup>1</sup>, 池田 正弘 (Masahiro Ikeda)<sup>1,2</sup>,

河原 吉伸 (Yoshinobu Kawahara)<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> 大阪大学大学院情報科学研究科 (Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University), <sup>2</sup> 理化学研究所革新知能統合研究センター (RIKEN Center for Advanced Intelligence Project)

e-mail : {y-miyauchi, ikeda, kawahara}@ist.osaka-u.ac.jp

### 1 概要

ティッピングの早期警告信号の開発は生態学, 医学, 経済学などの分野で重要な研究課題である. 本研究では, 非線形力学系の時間発展を無限次元関数空間上で扱うクープマン線形作用素を応用して, 分散など早期警告信号の根拠となる確率的レジリエンスの一般化を行った. 従来の研究では系の持つ非線形効果が無視されていたが, 我々はノイズによって生じる確率的ばらつきとティッピングポイント直上で現れる連続スペクトルの影響を取り出すことによって, より高い精度でティッピングの予測を可能とする信号の開発に成功した.

### 2 ティッピングと確率的レジリエンス

次の確率的離散力学系を考える.

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t; \beta) + \boldsymbol{\omega}_t \equiv \mathbf{F}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}_t; \beta). \quad (1)$$

ただし,  $t \in \mathbb{N}^+$  は時間,  $X \subseteq \mathbb{R}^N$  は状態空間,  $\mathbf{x}_t = (x_{1,t} \cdots x_{N,t})^T \in X$  は状態ベクトル,  $\Omega$  はサンプル空間,  $\boldsymbol{\omega}_t \in \Omega$  は分布  $\rho(\boldsymbol{\omega}_t) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{\boldsymbol{\omega}})$  に従う i.i.d. のガウス白色雑音,  $\mathbf{F}: X \rightarrow X$  は滑らかな非線形関数,  $\beta \in \mathbb{R}$  は分岐パラメータである. 簡単のため,  $\beta < 0$  のとき原点は双曲型安定固定点であり,  $\beta > 0$  で原点は不安定になるとする. このとき, 外的要因によって  $\beta$  が変化し,  $\beta = 0$  を横断することで原点周りでの系の振る舞いが大きく変化することを (局所) 分岐に誘発されるティッピングという.

先行研究として, Ives[1] が提案した確率的レジリエンスを紹介する. 原点周りの  $\mathbf{F}$  のヤコビ行列を  $A$  とする. また, 系 (1) を原点周りで線形近似して得られた力学系  $\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t$  について, 行列  $A$  の固有値分解が可逆行列  $U$  と対角行列  $\Sigma = \text{diag}(\lambda_{\text{jacobi},1}, \dots, \lambda_{\text{jacobi},N})$  を用いて  $A = U\Sigma U^{-1}$  と表されたとする. さらに, 系は  $\mathbf{x}_t$  に関する定常過程, かつ  $\mathbf{x}_t$  と  $\boldsymbol{\epsilon}_t$  は互いに直交するとすると, 次式を満たす.

$$\lambda_1(\text{Cov}[\mathbf{x}_t]) = \frac{\text{Var}[e_{1,t}]}{1 - |\lambda_{\text{jacobi},1}|^2}. \quad (2)$$

ただし,  $\lambda_1(\text{Cov}[\mathbf{x}_t])$  は  $\mathbf{x}_t$  に関する自己共分散行列の最大固有値,  $e_{1,t}$  は  $\mathbf{e}_t = U^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_t$  の第一成分を表す.  $\beta \rightarrow 0$  のとき  $|\lambda_{\text{jacobi},1}| \rightarrow 1$  となるため, 式 (2) は無限大に発散する. これは, ティッピングポイントに近づくにつれて原点への復元力 (確率的レジリエンス) が低下することによって発生する

特徴とみることができる. しかしながら, 線形近似された系では,  $\mathbf{F}$  の二次以上の項は無視しているため, ティッピングポイント付近でみられる力学系の非線形的効果が系の振る舞いにどのような影響を与えるかについては十分な議論がされていない.

### 3 クープマン作用素による確率的レジリエンスの一般化

$\mathbb{C}$ -値観測量  $g \in L^2(X, \mu)$  が与えられたとき, 確率的クーブマン作用素は次で定義される.

$$U_{(1)}g(\mathbf{x}) = \mathbb{E}[g \circ \mathbf{F}_\omega(\mathbf{x}; \beta)] = \int_{\Omega} g \circ \mathbf{F}_\omega(\mathbf{x}; \beta) d\rho(\omega). \quad (3)$$

観測量が  $\mathbb{C}^M$ -値  $\mathbf{g} \in L^2(X, \mu)^M$  である場合も, 各成分ごとに定義する. 特に系が双曲型固定点を持つとき, クープマン作用素は固有値分解が可能であり,  $\lambda$  をクーブマン固有値,  $\phi_\lambda$  を対応するクーブマン固有関数とすると,  $U_{(1)}\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$  を満たす. また, 適切な関数空間を選択すれば加算無限個の固有値  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$  を用いて,  $U_{(1)}^t\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^t \mathbf{v}_{\lambda_n} \phi_{\lambda_n}(\mathbf{x})$  とできる. これをクーブマンモード分解という.  $\mathbf{v}_\lambda \in \mathbb{C}^M$  はクーブマンモードである. しかしながら, 非双曲型固定点を持つ場合, クープマン作用素は連続スペクトルを持つため [2], 上記のクーブマンモード分解では不十分である. 故に, 連続スペクトルの出現はティッピングの予兆になると考えられる.

そこで, 我々は  $m$  個のクーブマン固有関数の線形結合で表される不変部分空間  $\Phi_m$  を考える. このとき,  $\Phi_m$  上に制限されたクーブマン作用素  $U_{(1), \Phi_m}$  を定義すると, 次式を満たす.

$$U_{(1), \Phi_m}\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^m \lambda_n \mathbf{v}_{\lambda_n} \phi_{\lambda_n}(\mathbf{x}). \quad (4)$$

ここで, 真のクーブマン作用素と  $\Phi_m$  に制限されたクーブマン作用素の誤差には, 打ち切られた固有値と連続スペクトルの影響が含まれており, ティッピングポイント付近では誤差が増大することが考えられる. さらに, 確率的クーブマンモード分解の推定誤差 (ResKMD) を

$$\text{res}[U_{(1)}, U_{(1), \Phi_m}]^2 = \mathbb{E}[\|\mathbf{g} \circ \mathbf{F}_\omega - U_{(1), \Phi_m}\mathbf{g}\|_{L^2(X, \mu)^M}^2] \quad (5)$$

と定義すると,

$$\text{res}[U_{(1)}, U_{(1), \Phi_m}]^2 = \|U_{(1)}\mathbf{g} - U_{(1), \Phi_m}\mathbf{g}\|_{L^2(X, \mu)^M}^2 + \text{Tr}(\text{Cov}[\mathbf{g} \circ \mathbf{F}_\omega]) \quad (6)$$

が導かれる. 式 (6) の右辺第一項は真のクーブマン作用素と  $\Phi_m$  に制限されたクーブマン作用素の誤差を, 第二項はクーブマン作用素による確率的レジリエンスの一般化項を表している. 式 (2) および式 (6) の大きな違いは  $\mathbf{F}$  の非線形性の影響が評価に組み込まれている点である. また, 式 (6) は ResDMD によってデータから計算可能である [3].

### 参考文献

- [1] A. R. Ives, “Measuring resilience in stochastic systems,” *Ecological Monographs* 65, 217–233 (1995).
- [2] P. Gaspard, G. Nicolis, A. Provata, and S. Tasaki, “Spectral signature of the pitchfork bifurcation: Liouville equation approach,” *Physical Review E* 51, 74 (1995).
- [3] M. J. Colbrook, Q. Li, R. V. Raut, and A. Townsend, “Beyond expectations: residual dynamic mode decomposition and variance for stochastic dynamical systems,” *Nonlinear Dynamics* 112, 2037–2061 (2024).

# 非局所項をもつ反応拡散方程式の 2 次分岐について

## Secondary bifurcation of some reaction-diffusion equations with nonlocal terms

辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)<sup>1</sup>, 宮本 安人 (Yasuhito Miyamoto)<sup>2</sup>, 森 竜樹 (Tatsuki Mori)<sup>3</sup>, 四ツ谷 晶二 (Shoji Yotsutani)<sup>4</sup>

<sup>1</sup> 明治大学 (Meiji Univ.), <sup>2</sup> 東京大学 (Tokyo Univ.), <sup>3</sup> 武蔵野大学 (Musashino Univ.),

<sup>4</sup> 龍谷大学 (Ryukoku Univ.)

e-mail : tsujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

### 1 導入

非局所項を含む双安定反応拡散方程式の典型例である Allen-Cahn 型の方程式を考える. この方程式について、非局所項として導入された積分の総量と拡散係数をパラメータとして定常解の大域的構造を明らかにする. 特に、非定数解からの分岐の存在を示すことは重要な問題である.

解構造について、定数解から対称解が 1 次分岐し、対称性の破れにより非対称解が 2 次分岐することを示した [1]. また、対称解の安定性を示すため線形化固有値問題を考察する. 対称解は 1 次分岐後は不安定であるが、2 次分岐点を通過後、安定性を回復する [2]. 一方、2 次分岐した非対称解の分岐点近傍での安定性は Crandall-Rabinowitz の結果 [3] から、2 次分岐の枝の方向で決まることが知られている. 対称解まわりでの線形化固有値問題の固有値、固有関数が楕円積分、楕円関数で表示されることを利用して、対称解の安定性や 2 次分岐が重臨界分岐であることを示し、2 次分岐点近傍での非対称解が不安定となる結果をえた. また、拡散係数が 1 次分岐点と零に近いところでの 2 次分岐を表示する曲線の曲率の漸近挙動も示した. 本講演では 2 次分岐に関することを中心に述べる.

### 2 主結果

次の非局所項を持つ Allen-Cahn 型の双安定反応拡散方程式の定常解の大域的構造を考える.

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + (1 - u^2) \left( u - \mu \int_0^1 u(x, t) dx \right) & \text{for } (x, t) \in I \times (0, \infty), \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 & \text{for } t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{for } x \in I. \end{cases} \quad (1)$$

$I := (0, 1)$ ,  $d$  と  $\mu$  は正定数、 $u = u(x, t)$  は未知関数で  $u_0(x)$  は初期関数とする. (1) の定常問題を次のように書き換える. ここでは単調増加解のみを扱うが、すべての解はこれを用いて表示される.

$$\begin{cases} d\varphi_{xx} + (1 - \varphi^2)(\varphi - \lambda) = 0 & \text{for } x \in I, \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0, & \\ \varphi_x(x) > 0 & \text{for } x \in I, \end{cases} \quad (2)$$

$$\lambda = \mu \int_0^1 \varphi(x) dx. \quad (3)$$

ここで、新しいパラメータ  $\lambda$  を導入する. 問題 (2) については次の結果が知られている.

**補題 1** (Schaaf (1990), Smoller (1994) など) (2) の解が存在するための必要十分条件は  $(\lambda, d) \in \mathcal{G}$  である. ここで、 $\mathcal{G} := \{(\lambda, d) : |\lambda| < 1, 0 < d < d^*(\lambda) := (1 - \lambda^2) / \pi^2\}$ .

(1) の定常解は、(2) の解の中で条件 (3) を満たすものである.

(1) の定常解の集合は領域  $\mathcal{G}$  内の  $(\lambda, d)$  の組に対して、(2) と (3) の解が存在することと同値である。そこで集合  $\mathcal{S}^\mu := \{(\lambda, d) \in \mathcal{G} : (\lambda, d) \text{ に対して (2), (3) は解を持つ}\}$  を導入する。

**定理 2**  $\mu \in (0, 1)$  とする。次を満たす偶関数  $\hat{d}(\cdot; \mu) \in C[-\mu, \mu] \cap C^\infty(-\mu, \mu)$  が一意に存在する。

$$\begin{aligned} \hat{d}(\lambda; \mu) &\rightarrow 0 \quad (\lambda \downarrow -\mu, \lambda \uparrow \mu), \quad \frac{d\hat{d}(0; \mu)}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d^2\hat{d}(0; \mu)}{d\lambda^2} < 0, \\ \mathcal{S}^\mu &= \{(0, d) : 0 < d < 1/\pi^2\} \cup \{(\lambda, \hat{d}(\lambda; \mu)) : -\mu < \lambda < \mu\} \quad (:= \mathcal{B}_0 \cap \mathcal{B}^\mu). \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\mathcal{B}_0$  と  $\mathcal{B}^\mu$  は 1 次および 2 次分岐解の枝にそれぞれ対応している。この定理より 2 次分岐が亜臨界分岐であることから、Crandall-Rabinowitz[3] の定理より 2 次分岐解の安定が示される。

**定理 3**  $\mu \in (0, 1)$  とする。十分小さい  $\varepsilon > 0$  に対して、 $|\lambda| < \varepsilon, \lambda \neq 0$  のとき、(2), (3) の非対称解  $\varphi(x, \hat{d}(\lambda, \mu))$  は不安定である。

一方、2 次分岐曲線  $\hat{d}(\lambda, \mu)$  の分岐点  $d_\mu$  での曲率の  $\mu$  に関する漸近挙動は次の定理で与えられる。

**定理 4**  $\mu \in (0, 1)$  とし、 $\hat{d}(\lambda; \mu)$  は定理 2 で得られたものとする。このとき、次が成り立つ。

$$\lim_{\mu \downarrow 0} \frac{d^2\hat{d}(0; \mu)}{d\lambda^2} = -\infty, \quad \lim_{\mu \uparrow 1} \frac{d^2\hat{d}(0; \mu)}{d\lambda^2} = -\frac{2}{\pi^2} = \frac{d^2d^*(0)}{d\lambda^2}, \quad \frac{d}{d\mu} \left( \frac{d^2\hat{d}(0; \mu)}{d\lambda^2} \right) > 0. \quad (5)$$

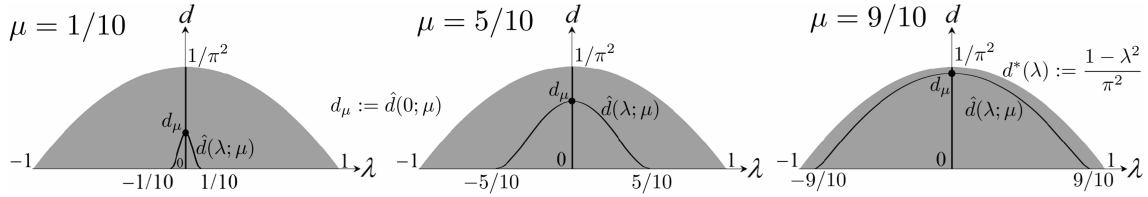


図 1.  $\mu = 1/10, 5/10, 9/10$  に対する  $\mathcal{S}^\mu$

この結果は Miyamoto-Mori-Tasaki-Tsujikawa-Yotsutani [4] の結果と密接に関係している。対応する線形化固有値問題に含まれる積分項の係数が空間変数  $x$  に依存していることより計算すべき式がより複雑となり工夫が必要となる。上記結果をえるため、[4] の証明の見直し・改良を行った。

**謝辞** 本研究は JSPS 科研費 JP25K07091, JP24K00530, JP25K07139, JP19K03593 の助成を受けたものです。

## 参考文献

- [1] K. Kuto, T. Mori, T. Tsujikawa and S. Yotsutani, Secondary bifurcation for a nonlocal Allen-Cahn equation, J. Differential Equations **263** (2017), 2687–2714.
- [2] Y. Miyamoto, T. Mori, T. Tsujikawa, and S. Yotsutani, Stability for stationary solutions of a nonlocal Allen-Cahn equation, J. Differential Equations **275** (2021), 581–597.
- [3] M.G. Crandall and P.H. Rabinowitz, Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues, and linearized stability, Arch. Ration. Mech. An. **52** (1973), 161–180.
- [4] Y. Miyamoto, T. Mori, S. Tasaki, T. Tsujikawa, S. Yotsutani, Symmetry breaking bifurcation and the stability of stationary solutions of a phase-field model, J. Differential Equations **441** (2025).

# 1次元フェーズフィールドモデルの空間非対称な定常解に対応する固有値と固有関数

## Eigenvalues and eigenfunctions corresponding to the spatially asymmetric steady state solutions of a 1D phase field model

岡本 朋揮 (Tomoki Okamoto)<sup>1</sup>, 森 竜樹 (Tatsuki Mori)<sup>2</sup>,

<sup>1</sup> 武蔵野大学大学院工学研究科数理工学専攻, <sup>2</sup> 武蔵野大学

e-mail : g2486005@stu.musashino-u.ac.jp

本研究では、次の 1 次元フェーズフィールドモデルの解の安定性について考える：

$$(PFM) \begin{cases} \tau \varphi_t = d \varphi_{xx} + \varphi - \varphi^3 + 2u & \text{in } (0, 1) \times (0, \infty), \\ u_t + \frac{\ell}{2} \varphi_t = \kappa u_{xx} & \text{in } (0, 1) \times (0, \infty), \\ \varphi_x(0, t) = \varphi_x(1, t) = 0, \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 & \text{in } (0, \infty), \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } (0, 1). \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\varphi = \varphi(x, t)$ ,  $u = u(x, t)$  は未知関数、 $\tau$ ,  $d$ ,  $\ell$ ,  $\kappa$  は正定数、 $\varphi_0(x)$ ,  $u_0(x)$  は初期値である。(PFM) は非等温で有限な厚さの界面をもつ固相-液相相転移現象を記述したモデルで、物理的には、 $\varphi(x, t)$  はある場所、時刻での相を表しており、 $\varphi = 1$  付近では液体、 $\varphi = -1$  付近では固体を表す。 $u(x, t)$  はある場所、時刻での相対温度で、 $\tau$ ,  $d$ ,  $\ell$ ,  $\kappa$  はそれぞれ、時定数、液体の拡散係数、潜熱、熱伝導率を表している。

このモデルは式 (1), (2) より総エンタルピーが保存されるという特徴をもつ。総エンタルピーを  $m \in \mathbb{R}$  とすると、

$$\int_0^1 u(x, t) dx + \frac{\ell}{2} \int_0^1 \varphi(x, t) dx \equiv \int_0^1 u_0(x) dx + \frac{\ell}{2} \int_0^1 \varphi_0(x) dx =: m$$

が成り立ち、 $m$  は初期値  $u_0(x)$ ,  $\varphi_0(x)$  によって決まることがわかる。

定常状態では、式 (1), (2) より、 $u$  は未知定数となり、これを  $\bar{u}$  とすると、定常問題

$$(SP) \begin{cases} d \varphi_{xx} + \varphi - \varphi^3 + 2\bar{u} = 0 & \text{in } (0, 1), \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0, \\ \varphi(x) > 0 & \text{in } (0, 1), \\ \bar{u} + \frac{\ell}{2} \int_0^1 \varphi(x) dx = m \end{cases}$$

をえる。ここで、 $\varphi = \varphi(x)$  は未知関数、 $\bar{u}$  は未知定数である。(SP) の解構造については Elliott-Zheng(FBP:ISNF, 95, (1990)), Suzuki-Tasaki(Nonlinear Anal, 71, (2009)), Mori *et al.* (DCDS-B, 28, (2023)) によって詳細に調べられ、すべての  $\ell$ ,  $m$  に対して、 $(\bar{u}, d)$  ごとに非定数解  $\varphi(x; \bar{u}, d)$  の存在・非存在条件や  $0 < \ell < 1$ ,  $m = 0$  において対称解が非対称解へと分岐する 2 次分岐点が一意的に存在することも含めて明らかにされている。

(SP) の非定数解  $\varphi(x; \bar{u}, d)$  の線形安定性は、次の線形化固有値問題を解くことで判定できる：

$$\begin{cases} \mathcal{L}\Psi = \mu\Psi & \text{in } (0, 1), \\ \Psi_x(0) = \Psi_x(1) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

ここで,  $\mu = \mu(\bar{u}, d; \ell)$  は固有値,  $\Psi = \Psi(x; \bar{u}, d, \ell)$  は  $\mu$  に対応する固有関数である. また,  $\mathcal{L} := L + A$ ,  $L := d(d^2/dx^2) + 1 - 3\varphi(x; \bar{u}, d)$ ,  $A := -\ell\langle \cdot, 1 \rangle$  である. これらはノイマン境界条件をもつ作用素であり,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $L^2$  内積を表す.  $\mathcal{L}$  は自己共役であるため, (3) のすべての固有値は実数であることに注意する. (3) は積分項を含み解析が困難であるため, その解析においては, 積分項  $A$  を除いた Sturm-Liouville 型の固有値問題

$$\begin{cases} L\zeta = \kappa\zeta & \text{in } (0, 1), \\ \zeta_x(0) = \zeta_x(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

と (3) の固有値と固有関数の構造を比較することが基本的な方針になる. (4) は固有値がすべて実数かつ単純で, 固有値の大きさの順序と対応する固有関数の零点の個数が一致することが知られているほか, Wakasa-Yotstani(JDE, 258, (2015); JDE, 261, (2016)) では対称解まわりの固有値, 固有関数の表示式がえられている. この事実を応用・発展させることで Miyamoto *et al.* (JDE, 441, (2025)) では,  $0 < \ell < 1$ ,  $m = 0$  における (SP) の対称解の安定性が 2 次分岐点を境に切り替わること, 2 次分岐近傍の非対称解が不安定であること, 対称解まわりの (3) の固有値と固有関数が楕円関数・完全楕円積分で表示されることが示された. 特に, 対称解の固有値の重複度が  $d$  に依存して変化することが示されており, 積分項の有無により固有値が単純でなくなることは興味深い点である. このように対称解については固有値と固有関数の表示式など詳細に明らかになっている一方, 2 次分岐から離れた非対称解の安定性やそれらに対応する固有値, 固有関数の構造は明らかになっていない.

そこで, 本研究では,  $0 < \ell < 1$ ,  $m = 0$  における 2 次分岐後の枝上の非対称解の安定性に加えて, 対応する解の固有値の重複度や固有関数の形状・零点の数はどのように変化するかについて数値計算を行い, 積分項の有無の観点から考察を行った. 図 1 は 2 次分岐後の枝上の非対称解ごとに固有値と固有関数を求め, それらの挙動を描いたものである. 本講演では, 非対称解の固有値同士は重複することはなく一定の距離を保ちながら接近するという挙動を見せることや対応する固有関数をもつ零点の数が固有値の大きさの順序によらず増減する現象が起こることを報告する.

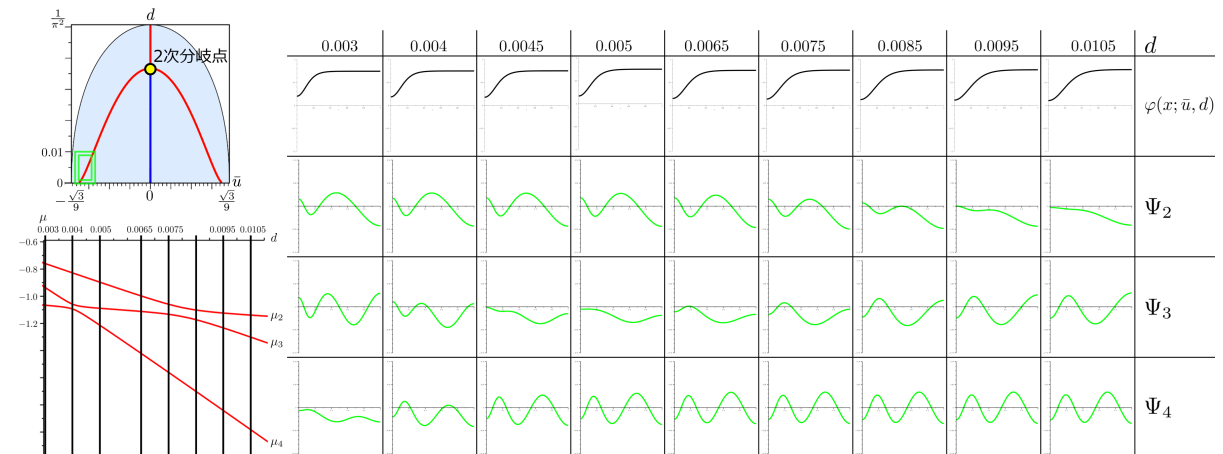


図 1.  $\ell = 0.5, m = 0$  における 2 次分岐後の非対称解まわりで (3) を数値的に解いた結果である. 左上図は横軸  $\bar{u}$ , 縦軸  $d$  の分岐ダイアグラムであり, 青色の枝上の解は安定であり, 赤色の枝上の解は不安定である. 左下図は横軸  $d$ , 縦軸  $\mu$  として, 左上図内の黄緑色で囲った領域内の非対称解まわりの固有値  $\mu_2 > \mu_3 > \mu_4$  を描いている. 右の表は, 左下図内の各  $d$  における固有値  $\mu_2, \mu_3, \mu_4$  に対応する固有関数  $\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$  の形状の変化を描いている.

なお, 本研究は田崎創平 (北海道大学), 辻川亨 (宮崎大学名誉教授, 明治大学), 宮本安人 (東京大学), 四ツ谷晶二 (龍谷大学名誉教授) との議論に基づくものである.

# 曲線短縮問題に現れる準線形放物型偏微分方程式の Type II 爆発解の振る舞いに関する一考察

## Remarks on behavior for Type II blow-up solutions of a quasilinear parabolic equation in the curve shortening problems

穴田 浩一 (ANADA, Koichi)<sup>1</sup>, 石渡 哲哉 (ISHIWATA, Tetsuya)<sup>2</sup>,

牛島 健夫 (USHIJIMA, Takeo)<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 早稲田大学高等学院 (Waseda Univ. Senior High School),

<sup>2</sup> 芝浦工業大学 (Shibaura Inst. of Tech.), <sup>3</sup> 東京理科大学 (Tokyo Univ. of Sci.)

e-mail : anada-koichi@waseda.jp

図 1 のような自己交差する閉曲線  $\mathcal{X}_0$  が, 曲率の冪乗の速度で収縮する曲線短縮問題を考える. 具体的には,  $\alpha > 0$  に対し,

$$\frac{d\mathcal{X}}{dt} = -\kappa^\alpha \mathcal{N} \quad \text{and} \quad \mathcal{X}(\cdot, 0) = \mathcal{X}_0.$$

をみたす曲線の族  $\{\mathcal{X}(\cdot, t)\}$  を考える. ここで,  $\kappa(\cdot, t)$  は  $\mathcal{X}(\cdot, t)$  の曲率,  $\mathcal{N}(\cdot, t)$  は外向き単位法線. このとき,  $\theta$  を各点の法線角 ( $\mathcal{X}_0$  の曲率が最大となる点の法線角を  $\theta = 0$  とする) とし,

$$v(\theta, t) = \left( \alpha^{\frac{1}{\alpha+1}} k(\theta, t) \right)^\alpha, \quad p = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

とおくと,  $v$  は次の方程式の初期値問題の解となる.

$$v_t(\theta, t) = v(\theta, t)^p (v_{\theta\theta}(\theta, t) + v(\theta, t)) \quad \text{and} \quad v(\theta, 0) = v_0(\theta) := \left( \alpha^{\frac{1}{\alpha+1}} \kappa_0(\theta) \right)^\alpha. \quad (1)$$

ただし,  $\kappa_0(\theta)$  は, 次の (I1), (I2), (I3), (I4) をみたす  $\theta$  をパラメータとした  $\mathcal{X}_0$  の曲率.

(I1)  $\kappa_0(\theta) = \kappa_0(-\theta)$ .

(I2)  $\kappa'_0(\theta) < 0$  if  $0 < \theta < 2\pi$ .

(I3) There exists  $\eta_0 > 0$  such that  $\inf_{-2\pi \leq \theta \leq 2\pi} \kappa_0(\theta) \geq \eta_0$ .

(I4) There exists  $A_0 > 0$  such that  $\sup_{-2\pi \leq \theta \leq 2\pi} \sqrt{\kappa'_0(\theta)^{2\alpha} + \kappa_0(\theta)^{2\alpha}} \leq A_0$ .

準線形偏微分方程式 (1) には Type II 爆発する解があることが知られている ([3], [4], [5], [6]). 本講演では, まず  $v$  がある閾値を超えた後に現れる単調増加性について, 次の定理を証明する.

**定理 1**  $v$  は (1) の解,  $0 < \alpha < 1$  とする. また, (I1), (I2), (I3), (I4) を仮定する. このとき,  $(\theta_0, t_0)$  において

$$\sqrt{v(\theta_0, t_0)^2 + v_\theta(\theta_0, t_0)^2} > \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} A_0 \quad (2)$$

をみたしたならば, 次が成り立つ:

- 1)  $v_{\theta\theta}(\theta_0, t_0) + v(\theta_0, t_0) > 0$  and  $v_t(\theta_0, t_0) > 0$ .
- 2)  $\int_{\theta_0}^{\theta} (v_{\theta\theta}(y, t_0) + v(y, t_0)) \sin(\theta - y) dy > 0$  if  $\theta_0 < \theta \leq \theta_0 + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{-v_\theta(\theta_0, t_0)}{v(\theta_0, t_0)}$ .

**注意**  $\alpha = 1$  の場合は, [3], [4] により定理 1 と同様の結果が証明されている.

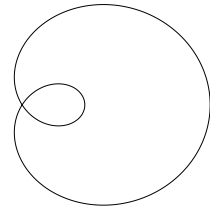


図 1:  $\mathcal{X}_0$  の例

次に, 時刻変数と解を

$$\tau := \log \frac{1}{T-t}, \quad V(\theta, \tau) := e^{-\frac{\tau}{p}} v(\theta, T - e^{-\tau}) \quad (3)$$

とスケール変換した問題を考える. このとき  $V$  は

$$V_\tau(\theta, \tau) = V(\theta, \tau)^p (V_{\theta\theta}(\theta, \tau) + V(\theta, \tau)) - \frac{1}{p} V(\theta, \tau) \quad (4)$$

の解となる. ここでは, この  $V$  の振る舞いについて, 次の定理を証明する.

**定理 2**  $2 < p \leq 3$  ( $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ ) とし, (I1), (I2), (I3), (I4) を仮定する. このとき,  $V$  は次をみたす:

$$V\left(\frac{\pi}{2}, \tau\right) = R\left(\frac{\pi}{2}; V(0, \tau)\right) + o\left(r(V(0, \tau))\right) \quad \text{as } \tau \nearrow \infty.$$

ここで,  $R(\theta; \kappa)$  は, [2] で導出された (4) に対するある進行波解のプロファイル. また,

$$r(V(0, \tau)) = \begin{cases} \frac{1}{V(0, \tau)^{p-1}} & \text{if } 2 < p < 3 \left(\frac{1}{2} < \alpha < 1\right), \\ \frac{\log V(0, \tau)}{V(0, \tau)^2} & \text{if } p = 3 \left(\alpha = \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

**注意**  $p = 2$  ( $\alpha = 1$ ) の場合は, [5] により定理 2 と同様の結果が証明されている.

この定理と [2] の結果から, さらに次のことがわかる.

**系 3**  $2 < p \leq 3$  ( $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ ) とし, (I1), (I2), (I3), (I4) を仮定する. このとき,  $V$  は次をみたす:

$$V\left(\frac{\pi}{2}, \tau\right) = \begin{cases} \left[ \frac{1}{2p} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3-p}{2}\right) + o(1) \right] \frac{1}{V(0, \tau)^{p-1}} & \text{if } 2 < p < 3 \left(\frac{1}{2} < \alpha < 1\right), \\ [1 + o(1)] \frac{\log V(0, \tau)}{V(0, \tau)^2} & \text{if } p = 3 \left(\alpha = \frac{1}{2}\right). \end{cases} \quad \text{as } \tau \nearrow \infty.$$

ここで,  $B(\cdot, \cdot)$  はベータ関数.

**注意** 定理 2 の  $V$  と  $R$  の  $\theta = \frac{\pi}{2}$  における振る舞いの類似性や系 3 の漸近展開は, (1) の解の爆発レートの評価のために有用な結果である ([1], [3], [5]).

## 参考文献

- [1] K. Anada, T. Ishiwata, T. Ushijima, Upper estimates for blow-up solutions of a quasi-linear parabolic equation, Japan J. Indust. Appl. Math. 41 (2024) 381–405.
- [2] K. Anada, T. Ishiwata, T. Ushijima, Asymptotic expansions of traveling wave solutions for a quasilinear parabolic equation, Japan J. Indust. Appl. Math. 39 (2022) 889–920.
- [3] K. Anada, T. Ishiwata, Blow-up rates of solutions of initial-boundary value problems for a quasi-linear parabolic equation, J. Diff. Eq. 262 (2017) 181–271.
- [4] S.B. Angenent, On the formation of singularities in the curve shortening flow, J. Diff. Geo. 33 (1991) 601–633.
- [5] S.B. Angenent, J.J.L. Velázquez, Asymptotic shape of cusp singularities in curve shortening, Duke Math. J. 77 (1995) 71–110.
- [6] C. C. Poon, Blowup rate of solutions of a degenerate nonlinear parabolic equation, Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser. B 24 (2019) 5317–5336.