凸関数によるオプション価格の構成とボラティリティ指数の計算

Construction of option prices via convex functions and computation of the volatility index based on it

村山 俊太 (Shunta Murayama)[1]
[1] 大阪大学 基礎工学研究科 (Graduate school of Engineering science, The University of Osaka)
e-mail : murayama@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

1 概要

VIX などの従来手法では、観測されるオプション価格からリーマン和によって数値積分を近似し、ボラティリティ指数を算出している。[1] 本研究では、線形写像の上限（sup）が凸関数となる性質を利用し、オプション市場の無裁定性から Bid/Ask 価格帯を通過する凸関数を構成する。これにより離散的なオプション価格を連続的に近似し、より理論的に整合的な形でボラティリティ指数を算出する。そして得られた指数と VIX などの従来の指数との比較を行う。

2 研究の背景

VIX などのボラティリティ指数は、市場が織り込む将来の価格変動リスクを示す指標である。これは、満期を T とする原資産価格過程 F が連続セミマルチンゲールに従うという仮定の下で、リスク中立測度 Q に対して $\mathbb{E}^Q[\langle \log F\rangle_T]$ を計算することによって算出される。またこの期待値は次のように計算されることが知られている。[2]

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^Q[\langle \log F\rangle_T] &= -2\mathbb{E}^Q[\log(F_T/F_0)]\\ &= 2\int_0^{F_0} \frac{\mathbb{E}^Q[(K-F_T)^+]}{K^2}\,\mathrm{d}K + 2\int_{F_0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}^Q[(F_T-K)^+]}{K^2}\,\mathrm{d}K\end{aligned}$$

この積分の中の期待値はプット、コールオプションの価格と対応しているため、市場の取引価格を観察することによって期待値の部分を求めることができる。しかし、現実の市場で取引される行使価格は有限個しかないため、VIX などの従来のボラティリティ指数の計算においては積分のリーマン和での近似などによって値が算出されることがしばしばである。ただしこの計算方法ではリーマン和での近似によって裾の切り捨てが行われるため、その分価格変動のリスクを過小評価してしまうなどの問題点があげられる。また上記の計算では F_0 も算出する必要があるが、プットコールパリティと呼ばれる関係式を用いれば F_0 は期待値の大小関係が入れ替わる行使価格に一致することが分かり、もしもオプション価格を $\mathbb{R}_+$ 上連続に構成することができれば、結局積分は次のように計算することができる。

$$\mathbb{E}^Q[\langle \log F\rangle_T] = \frac{2}{D}\int_0^{\infty} \frac{\min\{P(K), C(K)\}}{K^2}\,\mathrm{d}K$$

ただしここで $P(K), C(K)$ は $\mathbb{R}_+$ 上に構成された満期 T、行使価格 K でのプット、コールオプションの価格であり、D は同一満期でのゼロクーポン債価格である。このように、オプション価格が得られれば、求めたい期待値は簡単に計算することができる。そこで本研究ではオプション価格を $\mathbb{R}_+$ 上に構成することによってボラティリティ指数を算出して，VIX などと比較を行った.

3　価格の構成

本研究では線形写像の上限が凸関数になるという性質を用いて Bid/Ask の無裁定性から凸性などの望ましい数学的性質を持つ価格を構成する手法を提案する．そのためにまずは必要な文字の設定を行う。はじめに、市場で取引されるプットオプションの行使価格と、それに対応したオプションの買値、売値をそれぞれ $K_i, A_i, B_i\,(1 \leq i \leq N)$ とする。ただしデータセットは行使価格に関して昇順に並んでいるとする。また便宜上 $K_0 = A_0 = B_0 = 0$ と定める。このデータセットに対して、買値同士をつないだ直線の上限を考えることによって価格を構成しようというのが今回の構成方法の発想である。そこで二つの異なる行使価格 $K_i, K_j\,(i < j)$ に対して二点 $(K_i, A_i), (K_j, A_j)$ をつないで得られる直線を与える関数を $f_{i,j}$ とおき、$f_{i,j}$ のクラスとして次のように $\mathcal{L}$ を定める。

$$\mathcal{L} = \{f_{i,j}\,;\, f_{i,j}(0) < 0, f_{i,j}(K_n) \leq A_n \text{ for } 1 \leq \forall n \leq N\}$$

この $\mathcal{L}$ 上での上限を考えることによって構成された価格が買値を超えないようにすることができる。次の定理が市場の無裁定性からプットオプションの価格を構成する方法に関する結果である。

定理 1　$\mathcal{L}$ が空でないと仮定して，I, J を次で定める．

$$I = \min\{i\,;\, N \geq \exists j \geq i,\, f_{i,j} \in \mathcal{L}\}, \quad J = \max\{j\,;\, j \geq \exists i > 0,\, f_{i,j} \in \mathcal{L}\}$$

さらに $f_0, \tilde{\mathcal{L}}$ を次で定める．

$$f_0(K) = \left(\min_{1 \leq i < I} \frac{A_I - B_i}{K_I - K_i}\right)(K - K_I) + A_I \quad (I \geq 2)$$

$$\tilde{\mathcal{L}} = \begin{cases} \mathcal{L} \cup \{0\} & I = 1 \text{ or } f_0' > \min_{f \in \mathcal{L}} f', \\ \mathcal{L} \cup \{f_0, 0\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき $J = N$ であり，$p = \sup_{f \in \tilde{\mathcal{L}}} f$ によって定められる p は以下を満たす非減少凸関数である．

$$\begin{cases} p(0) = 0 \\ B_n \leq p(K_n) \leq A_n & \text{for all } n \in \{1, \cdots, N\} \\ \int_0^x p(K)/K^2 \,\mathrm{d}K < \infty & \text{for all } x > 0 \end{cases}$$

ここではプットオプションの価格の構成に関して扱ったが、コールオプションに関してもほとんど同様の方法によって価格を構成することができる。最後に本研究は大阪大学基礎工学研究科の深澤正彰教授との共同研究である。

参考文献

[1] Cboe Global Markets, Cboe Volatility Index Methodology, Version 3, February 10, 2025.

[2] Carr, P., and Madan, D. (1998). Towards a Theory of Volatility Trading. In Volatility: New Estimation Techniques for Pricing Derivatives, edited by R. Jarrow, pp. 417-427.

ラフ・ボラティリティ・モデルの高次弱近似：マルコフ化と楠岡近似によるアプローチ

Higher-Order Weak Approximation for Rough Volatility Models via Markovian Approximation

篠崎 裕司 (Yuji Shinozaki)[1*], 林 晃平 (Kohei Hayashi)[2]
[1] 一橋大学経営管理研究科 (School of Business Administration, Hitotsubashi University),
[2] 大阪大学理学研究科 (Graduate School of Science, The University of Osaka)
e-mail : *yshinozaki@hub.hit-u.ac.jp

1. 概要

ラフ・ボラティリティ・モデルは、ボラティリティの時間発展を、従来のブラウン運動モデルよりサンプル・パスが荒い（低ヘルダー連続性）確率過程で記述するモデルである。代表例として、ラフ・ベルゴミ・モデル [1] のほか、リーマン・リュービル型の確率積分を用いたモデルが知られている：

$$\begin{cases} dS_t = \sqrt{V_t}S_t\left(\rho\, dW_t + \sqrt{1-\rho^2}\, dB_t\right), \quad S_0 = s_0, \\ V_t = V_0 + \int_0^t G_H(t-s)b\left(V_s\right)\, ds + \int_0^t G_H(t-s)\,\sigma\left(V_s\right)\, dW_s, \end{cases} \tag{1}$$

ここで積分核 $G_H(t)$ は、たとえば、$G_H(t) = \int_0^\infty e^{-\rho t} c_H \rho^{-H-1/2}\, d\rho$ などが用いられる。

これらのモデルは、実市場データの特性（デリバティブ市場や高頻度データにおける実現ボラティリテなど）を整合的に表現できること（[2] など）や、特定の挙動（インプライド・ボラティリティの形状）を示すデリバティブ市場で無裁定条件件を保って価格付けをするために必要であること（[3]）から、近年の数理ファイナンス分野で大きな注目を集めている。しかし、このモデルはマルコフ性を持たないため、期待値 $E\left[f(S_T, V_T)\right]$ などの計算が困難であり、実務適用上の障壁となっている。

この困難を解決するため、様々な数値的手法が提案されているが、その中でも、マルコフ近似（[4] [5]）は有力な枠組みとして注目されている。この枠組みでは、$G_H(t) \approx \widehat{G}^N(t) = \sum_{i=1}^N \gamma_i e^{-\rho_i t}$ と、積分核を離散近似し、方程式 (1) を有限次元のマルコフ型確率微分方程式（SDE）系に変換し、その解 $\left(\hat{S}_t, \hat{V}_t\right)$ を用いて、$E\left[f(S_T, V_T)\right] \approx \hat{E}\left[f(\hat{S}_T^{(N)}, \hat{V}_T^{(N)})\right]$ と、近似計算する。$\hat{E}\left[f(\hat{S}_T^{(N)}, \hat{V}_T^{(N)})\right]$ の近似計算は、時間分割 $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$ 上で離散近似手法を用いて確率変数 $\left\{\tilde{\hat{S}}_{t_i}^{(N,n)}, \tilde{\hat{V}}_{t_i}^{(N,n)}\right\}_{i=0,\ldots,n}$ を生成し、$\hat{E}\left[f\left(\hat{S}_T^{(N)}, \hat{V}_T^{(N)}\right)\right] \approx \tilde{\hat{E}}\left[f\left(\tilde{\hat{S}}_{t_n}^{(N,n)}, \tilde{\hat{V}}_{t_n}^{(N,n)}\right)\right]$ と近似されることが多い。

2. 結果

本研究では、上記のマルコフ近似の枠組みで現れる、確率微分方程式 $\left(\hat{S}_t, \hat{V}_t\right)$ のベクトル場を適切に分割した上で、二宮–ビクター型の作用素分解による高次離散近似（楠岡近似、[6, 7]）を用いる数値手法を提案し、理論的な誤差評価と数値実験による検証を行った。その結果、マルコフ近似の誤差 $\left|E\left[f(S_T, V_T)\right] - \hat{E}\left[f(\hat{S}_T, \hat{V}_T)\right]\right|$ と、SDE の近似誤差 $\left|\hat{E}\left[f\left(\hat{S}_T^{(N)}, \hat{V}_T^{(N)}\right)\right] - \tilde{\hat{E}}\left[f\left(\tilde{\hat{S}}_{t_n}^{(N,n)}, \tilde{\hat{V}}_{t_n}^{(N,n)}\right)\right]\right|$ には、相反関係（トレードオフ）があることが、誤差評価・数値計算の両面から明らかとなり、実用に耐えうる数値計算の精度を得るためには、数値計算上の設定を適切に行うことが重要であることがわかった。

マルコフ近似と高次離散近似の併用は先行研究 [8], [9] でも検討されているが、本研究では以下の

点において新たな貢献がある。第一に、楠岡近似の枠組みを用いることで、ペイオフ関数 f が滑らかでなく、かつ S_T に依存する場合でも誤差評価を厳密に行うことができる点である。さらには、二宮–ビクター型の作用素分解を用いることで、$\tilde{\hat{V}}_{t_i}^{(N,n)}$ の正値条件を明示でき、リチャードソン型の外挿法により任意の次数の離散近似が実現できる。第二に、誤差解析において以下の評価式を得た：

$$\begin{aligned}&\left|[f(S_T,V_T)] - \tilde{\hat{E}}\left[f\left(\tilde{\hat{S}}_{t_n}^{(N,n)},\, \tilde{\hat{V}}_{t_n}^{(N,n)}\right)\right]\right| \qquad (2)\\ &\le \underbrace{C_1(f)\exp\left(-\alpha\sqrt{HN}\right)}_{\text{マルコフ近似の誤差}\left|E[f(S_T,V_T)]-\hat{E}\left[f(\hat{S}_T^{(N)},\hat{V}_T^{(N)})\right]\right|} + \underbrace{C_2(f)\left(\max_{1\le i\le N}\rho_i\right)^{\kappa+1}(\hat{G}^N(0))^{2(\kappa+1)}n^{-\kappa}}_{\text{SDE の近似誤差}\left|\hat{E}\left[f\left(\hat{S}_T^{(N)},\hat{V}_T^{(N)}\right)\right]-\tilde{\hat{E}}\left[f\left(\tilde{\hat{S}}_{t_n}^{(N,n)},\tilde{\hat{V}}_{t_n}^{(N,n)}\right)\right]\right|}\end{aligned}$$

ここで、κ は SDE の離散近似の次数である。$\max_{1\le i\le N}\rho_i$ と $\hat{G}^N(0)$ は、マルコフ近似の積分核の離散化にも依るが、通常 N について増大する。そのため、(2) より、N を大きくすればマルコフ近似の誤差は減少するが、SDE の近似が増大することが分かる。さらには、準モンテカルロ法を用いる場合、N が大きくなると積分次元が大きくなるため誤差が増大することが知られている。すなわち、N を大きくすると、マルコフ近似の誤差は小さくなる一方で、SDE の近似誤差は大きくなる。これらを定量的に制御するために、N を n の関数として選ぶことが有効であり、とくに

$$N = O(\log n) \qquad (3)$$

と選べば、(2) の誤差が、時間分割数 n に関して $\mathcal{O}(n^{-\kappa+\varepsilon})$ と高次に抑えることが可能となる。第三に、数値検証により、実用上要求される精度に応じた N と n の設定が重要であることが分かった。

参考文献

[1] C. Bayer, P. Friz, and J. Gatheral, *Pricing under rough volatility*, Quantitative Finance, 16(6), pp. 887–904, 2016.

[2] J. Gatheral, T. Jaisson, and M. Rosenbaum, *Volatility is rough*, Quantitative Finance, 18(6), pp. 933–949, 2018.

[3] M. Fukasawa, *Volatility has to be rough*, Quantitative Finance, 21(1), pp. 1–8, 2021.

[4] E. Abi Jaber and R. El Euch, *Markovian structure of the Volterra Heston model*, Statistical Finance and Stochastic Processes, 23(3), pp. 709–748, 2019.

[5] C. Bayer and S. Breneis, *Markovian approximations of stochastic Volterra equations with the fractional kernel*, Quantitative Finance, 23(1), pp. 53 – 70, 2023.

[6] S. Kusuoka, *Approximation of expectation of diffusion processes and mathematical finance*, In: Taniguchi Symposium on Stochastic Analysis, pp. 147–165, 2001.

[7] S. Ninomiya and N. Victoir, *Weak approximation of stochastic differential equations and application to derivative pricing*, Applied Mathematical Finance, 15(2), pp. 107–121, 2008.

[8] C. Bayer and S. Breneis, *Weak Markovian approximations of rough Heston*, arXiv preprint, arXiv:2309.07023, 2023.

[9] A. Alfonsi, *Nonnegativity preserving convolution kernels: application to stochastic Volterra equations in closed convex domains and their approximation*, Preprint, arXiv:2401.01234, 2024.

PDF 法によるボラティリティ推定

Positive definite fourier estimator of spot volatility processes

神原　玲花 (Reika Kambara)[1]
[1] 立命館大学 (Department of Mathematical Sciences, Ritsumeikan University)
e-mail : ra0082vs@ed.ritsumei.ac.jp

1 Abstract

I will present a modified Fourier method, termed the Positive Definite Fourier (PDF) method, for estimating the spot volatility matrix process from high-frequency financial data. The primary contributions of this work are the introduction of the PDF method and the proof of its consistency. This addresses significant challenges in volatility estimation, namely high computational costs and accuracy issues.

2 Introduction

We consider a d-dimensional Itô-type semi-martingale X on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \leq T}, P)$. For $j = 1, \ldots, d$, the process is defined as:

$$X_t^j = x_0^j + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \sigma_{jk}(s) dW_s^k + \int_0^t b_j(s) ds, \quad t \in [0, T]$$

where W is a d-dimensional Brownian motion, and b_j and σ_{jk} are adapted processes. Our objective is to construct an estimator for the spot volatility matrix $\Sigma(t) = (\sigma_{jj'}(t))$, where $\sigma_{jj'}(t) = \sum_{k=1}^{d} \sigma_{jk}(t)\sigma_{j'k}(t)$, using discrete observations $\{X_{t_k}\}_{k=1}^{n}$.

A foundational approach is the Malliavin-Mancino (MM) method [2], which is robust to market microstructure noise. However, the resulting estimator matrix, $(\hat{\sigma}_F^2)_{jl}$, is not guaranteed to be symmetric. This implies its eigenvalues may not be positive real numbers, which is a significant drawback.

3 The PDF Method

To overcome the limitations of the MM estimator, Akahori, et al. [1] introduced a modification known as the PDF method. This estimator is designed to be always positive (semi) definite. The PDF estimator is defined for $t \in (0, 2\pi)$:

$$(\hat{\sigma}_P^2)_{jl}(t) := \frac{1}{2\pi(2N+1)} \sum_{1 \leq j' \leq n_j, 1 \leq l' \leq n_{j'}} \mathbb{D}_{N,M}(t - t_{j'}, t - t_{l'}) \Delta X_{j'}^{j} \Delta X_{l'}^{j'}$$

where $\mathbb{D}_{N,M}$ is a kernel constructed from the Dirichlet kernel $D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}$ and a probability measure μ_M:

$$\mathbb{D}_{N,M}(u, v) := \int_{\mathbb{R}} D_N(u + y) D_N(v + y) \mu_M(dy).$$

4 Consistency of the Estimator

A core result of our research is the proof of consistency for the PDF estimator. We analyze the expected supremum error, which can be bounded by three main terms, I, II, III:

$$E\left[\sup_{t\in[\epsilon,2\pi-\epsilon]}|(\hat{\sigma}_P^2)_{jl}(t)-\sigma_{jl}(t)|\right]\leq I+II+III$$

These terms represent the error from the estimator's structure, a stochastic error component, and an approximation error for the volatility function, respectively. Each term is bounded as follows:

$$I\leq 2\pi C_{V,b,1}N\rho(2+N\rho)\sum_{|k|\leq 2N}\left(1-\frac{|k|}{2N+1}\right)|(\mathcal{F}\mu_M)(k)|$$

$$II\leq C_{V,b,2}(2N+1)^{-\frac{1}{2}}\sum_{|k|\leq 2N}|(\mathcal{F}\mu_M)(k)|\left(1-\frac{|k|}{2N+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$III\leq \omega_0(\delta)+\frac{C_{V,3}}{(2N+1)(\delta-\delta')}+C_{V,4}(2N+1)\mu_M(\mathbb{R}\backslash(-\delta',\delta'))$$

By controlling the parameters $N, M, \rho, \delta, \delta'$, we can show that the total error converges to zero, thus proving consistency.

参考文献

[1] Akahori, J., Liu, N-L., Mancino, M.E. and Yasuda, Y., The Fourier estimation method with positive semi-definite estimators, arXiv:1410.0112 (2014).

[2] Malliavin, P. and Mancino, M. E., Fourier series method for measurement of multivariate volatilities, Finance and Stochastics, Vol. 6 (2002), 49–61.