

Web3 時代の集団的意思決定に対する数理的アプローチ：トポロジカルデータ解析 (TDA) による構造変化の検出

A Mathematical Approach to Collective Decision-Making in the Web3 Era: Detecting Structural Changes via Topological Data Analysis (TDA)

中山 季之 (Toshiyuki Nakayama)
周南公立大学 (Shunan University)
e-mail : nakayama.t25@shunan-u.ac.jp

1 はじめに

ブロックチェーンを基盤とする Web3 領域では、分散型自律組織 (DAO) が普及し、投票による意思決定が重要な役割を担っている。特に、Quadratic Voting (QV) は Weyl により提案され [1], 従来の一票制を超え、公共的意思決定の効率性向上を目的とする仕組みとして注目されている。さらに、その拡張である Quadratic Funding (QF)[2] は、Gitcoin をはじめとする DAO の公共財支援メカニズムに適用されている。

一方、DAO の投票データは高次元であり、非線形要素を含む複雑な構造を持つと考えられる。このため、従来の線形モデルのみでは全体像の把握は難しい。本研究では、まず主要な線形成分を確認するために主成分分析 (PCA) を適用し、続いて非線形構造の解析にトポロジカルデータ解析 (TDA) を用いることで、秩序から無秩序への遷移に伴う位相的特徴の変化を定量化する初の試みを行う。

2 関連研究と本研究の位置づけ

TDA は、データに潜む幾何・位相的特徴 (連結成分、ループ、空洞) をスケールを変えながら抽出する枠組みであり、その理論は Carlsson により体系化され [3], 医療や生物学など多様な分野に応用されてきた [4]。しかし、投票データ、特に Web3 ガバナンスを対象とした事例はほとんど存在しない。本研究は、この空白を埋めるものである。

3 データと方法

対象は Gitcoin Steward Council Elections v3 の投票データであり、10 候補に対するスコアベクトル (全 2,632 件) を解析する。手順は以下の通りである：

- 1) 投票ベクトルを 10 次元空間の点とみなし、ユークリッド距離に基づき Vietoris-Rips 複体を構築、パーシステントホモロジーを計算し、 H_0 および H_1 の特徴を抽出。
- 2) データの線形成分の寄与を確認するため、PCA を適用し、累積寄与率と主要成分を評価。
- 3) 投票行動の潜在クラスをモデル化するため、ガウス混合モデル (GMM) を適用。さらに、GMM を基盤とし分散スケール因子 α を制御したシミュレーションを実施し、秩序から無秩序への遷移過程における TDA 指標の変動を評価。

4 結果

PCA の結果、第一主成分は候補 1 への強い支持、第二主成分は候補 5・9 への重視を特徴づけるパターンを示し、第 3 主成分までで累積寄与率 95% を超えた。このことから、データには低次元的な秩序が存在することが示唆される。

この秩序をモデル化するため、GMM によるクラスタリングを適用した結果、BIC および AIC でクラス数 6 が最適と判定された。さらに、GMM を用いたシミュレーションにより、分散スケール因子 α を増加させることで秩序から無秩序への遷移を再現し、その過程で H1 構造の変化を評価した。

分析の結果、 α の増加に伴い、GMM の対数尤度は単調に低下し、秩序崩壊を示した。一方、H1 バー総量と平均長は初期段階で急増し、 $\alpha \approx 10^2$ 付近で局所的ピークを形成した後、過剰な分散で減少に転じた。最大バー長も同様に中程度スケールでピークを示した。これは、完全な秩序状態から適度な分散への移行で構造的多様性が最大化し、無秩序が進むと複雑性が消失することを示している。

5 考察と結論

本研究は、 α の増加に伴う秩序（GMM 適合度）とトポロジカル複雑性（H1 特徴量）の関係が非単調であることを明らかにした。具体的には、適度な分散で位相的多様性が最大化し、過剰な分散で崩壊する臨界的挙動を確認した。

この結果は、TDA 指標が投票行動における「秩序崩壊の進展」と「多様性の臨界点」を定量的に捉える有効な手法であることを示す。さらに、本枠組みは DAO ガバナンス分析にとどまらず、金融市場の投資家嗜好や市場構造の変動検知への応用が期待され、数理ファイナンス分野においても新たなリスク計測手法として発展し得る。

加えて、TDA 指標や分布距離に基づくシャッフルテストを用いた異常検知は、日々の投票や資金フローにおける不自然な変動をリアルタイムに把握する仕組みとして有望である。このアプローチにより、Web3 ガバナンスや市場運営におけるリスク早期警戒の実装が可能になる。

.....

参考文献

- [1] E. G. Weyl, Quadratic Vote Buying, Working Paper, 2012.
- [2] V. Buterin, Z. Hitzig and E. G. Weyl, Liberal Radicalism: A Flexible Design for Philanthropic Matching Funds, Management Science, 65 (2019), 1348–1364.
- [3] G. Carlsson, Topology and data, Bull. Amer. Math. Soc., 46 (2009), 255–308.
- [4] P. Y. Lum, G. Singh and A. Lehman, Extracting insights from the shape of complex data, Scientific Reports, 3 (2013), 1–8.

安定指数が2に収束するときの Generalized Tempered Stable 過程の極限分布およびファイナンスへの応用

A limit theorem for generalized tempered stable processes and their quadratic variations with stable index tending to two and its application for finance

深澤 正彰 (Masaaki Fukasawa)¹, 広兼 巳紀雄 (Mikio Hirokane)²

^{1,2} 大阪大学 基礎工学研究科 (Graduate School of Engineering Science, The University of Osaka)

e-mail : ² hirokane@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

1 概要

数理ファイナンスにおいて、現実の市場におけるインプライド・ボラティリティ (IV) の挙動を捉えるモデルの探求は重要なトピックである。よく知られた事実 (例えば, [1]) として、アット・ザ・マネー (ATM) における IV スキューのべき乗則があり、この現象を表現できる数学的概念の1つとして安定過程などが持つ α -stable jumps が注目されている (例えば, [2])。

本研究 [3] は、先行研究のようにモデルを固定して短時間漸近挙動を見るのではなく、 α -stable jumps を持ちかつ Black-Scholes モデルに収束するような摂動モデルを定義し、その摂動モデルの ATM IV スキューを Black-Scholes モデルを中心として漸近展開することを考える。そうすることで、 α -stable jumps が IV スキューに与える影響を満期全体で取り出すことを考える。

また、そのような摂動モデルを定義するために、安定過程を一般化した確率過程である Generalized Tempered Stable (GTS) 過程の極限定理を証明する。GTS 過程が Brown 運動に収束するように Lévy 測度を適切にスケールリングし、同時に二次変分が退化しないように二次変分を適切に正規化し、安定指数 $\alpha \uparrow 2$ のときのそれらの同時分布の極限分布を求める。安定指数 α を2に近付けるのは、安定過程が $\alpha = 2$ のときは Brown 運動であることと対応している。

2 Generalized Tempered Stable 過程とその二次変分の極限分布

GTS 過程は以下のように定義される。

定義 1 (GTS 過程) X を triplet (m, V, ν) を持つ \mathbb{R}^d -値の Lévy 過程とする。次の条件を満たすとき、 X は (m, α, ρ, q) を持つ GTS 過程と呼ぶ：

$$V = 0 \quad \text{かつ} \quad \nu(B) = \int_S \rho(d\xi) \int_0^\infty \mathbf{1}_B(r\xi) \frac{q(r, \xi)}{r^{\alpha+1}} dr, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$$

が成立する。ここで、 $\alpha \in (0, 2)$ 、 ρ は単位球面 $S = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid |\xi| = 1\}$ 上の有限測度、 $q : (0, \infty) \times S \rightarrow [0, \infty)$ は可測関数であり、ある ρ -可積分関数 $p : S \rightarrow [0, \infty)$ が存在して $\int_S |q(r, \xi) - p(\xi)| \rho(d\xi) \rightarrow 0 \quad (r \downarrow 0)$ を満たす。

(e.g.) 例えば、 q が一定ならば安定過程になる。

Lévy 測度に $(2 - \alpha)$ のスケールリングを施した GTS 過程を X^α とし、二次変分 $[X^\alpha]$ を適切に正規化した確率過程を Y^α とすると、以下のような極限定理が示せる。

定理 2 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times d}$ -値の Lévy 過程 (X, Y) は、時刻 $t = 1$ において次のような特性関数を持つと

する：

$$\begin{aligned} \varphi(z, U) = & \exp \left\{ i \langle z, m \rangle - \frac{1}{2} \langle z, \Sigma z \rangle \right\} \\ & \times \exp \left\{ \int_S \left(-\frac{\pi}{2} |\langle \xi, U \xi \rangle| - i \langle \xi, U \xi \rangle \log |\langle \xi, U \xi \rangle| + i \gamma \langle \xi, U \xi \rangle \right) q(0+, \xi) \rho(d\xi) \right\} \end{aligned}$$

ここで $z \in \mathbb{R}^d$, $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$ は任意であり, Σ, γ は定数である. このとき, $\alpha \uparrow 2$ において

$$(X^\alpha, Y^\alpha) \xrightarrow{d} (X, Y)$$

が Skorokhod 空間 $D(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times d})$ 上の分布収束として成り立つ.

3 摂動モデルとしての ATM IV スキューの漸近展開

$(2 - \alpha)$ のスケーリングを施した Lévy 測度 ν_α と補正したドリフト m_α を持つ 1 次元 GTS 過程を X^α とし, 摂動モデル $S^\alpha := \exp(X^\alpha)$ を定義する. 定理 2 より, $\alpha \uparrow 2$ のとき摂動モデル S^α は Black-Scholes モデルに収束することが示せる. このとき, 以下のような ATM IV スキューの漸近展開が求まる.

定理 3 $\alpha \uparrow 2$ のとき, ATM IV スキューは以下のような展開を持つ:

$$\partial_K \hat{\sigma}(t, K, \alpha)|_{K=1} = (2 - \alpha) A_{\text{ATM}}(t) + o(2 - \alpha). \quad (1)$$

ただし, $A_{\text{call}}(t, 1)$ と $A_{\text{dig}}(t, 1)$ は t に関する関数であり,

$$A_{\text{ATM}}(t) := -\frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot A_{\text{call}}(t, 1) + \sqrt{2\pi} e^{\Sigma t/8} \cdot A_{\text{dig}}(t, 1) \right). \quad (2)$$

また, 単純な仮定での $A_{\text{ATM}}(t)$ の数値計算を行い, 実際にべき乗則が観測されることを確認した.

参考文献

- [1] J. Gatheral, and M. Rosenbaum, “Volatility Is Rough”, *Quantitative Finance*, 18 (2018), 933–949.
- [2] S. Gerhold, I. C. Gülüm, and A. Pinter, “Small-Maturity Asymptotics for the At-The-Money Implied Volatility Slope in Lévy Models”, *Applied Mathematical Finance*, 23 (2016), 135–157.
- [3] M. Fukasawa and M. Hirokane, ”A Limit Theorem for Generalized Tempered Stable Processes and Their Quadratic Variations with Stable Index Tending to Two and Its Application for Finance”, *arXiv preprint*, arXiv:2305.02733v3.

不均一経済主体におけるリスクモデルについて

Risk models with heterogeneous agents.

赤堀 次郎 (Jiro Akahori)¹, 前波 実里 (Misato Maeba)¹,
松下 智 (Tomo Matsushita)¹

¹ 立命館大学 (Ritsumeikan University)
e-mail: tom0120@gmail.com

1 概要

先行研究[1]と[2]では、生命保険における不均一経済主体のリスクモデルモデルが提起されている。本講演では、このフレームワークを長期の限度額タイプの無担保ローンにおける信用リスクモデルに応用する。

本講演では、当該フレームワークを、長期・限度額タイプの無担保ローンにおける信用リスクモデルへ応用する手法について論じる。

2 研究の背景

近年、キャッシュレス化の拡大とともに、限度額タイプの商品が普及している。限度額タイプの審査においては、現状、限度額の決定方法に関して標準化された枠組みが存在しない。限度額の設定は、貸し手である金融機関のリスクアペタイトや債務者の属性によって大きく異なり、多くはスコアリングモデルや決定木を用いて過去の貸倒事例等から確率的でデフォルトリスク見積もることが多い。

本研究では、貸し手である金融機関のリスクと収入を確率的に定義し、収益を期待値として計算する。

具体的には、借手が実際に希望する資金量を「拡散過程」としてモデル化し、その時間発展を確率的に記述し、貸し手である金融機関の「収入－コスト＝0」となるブレイクイーブン・ポイントとなる限度額を導出する。

参考文献

- [1] Akahori, J., Nishida, M., and Seto, Y. Thermodynamical Approach to Life Insurance: Discrete Space-Time Framework; a Toy Model and its Analysis. Proceedings of the 40th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and its Applications, 2009, 360--365.
- [2] Akahori, J., Ida, Y., Nishida, M., and Tamada, S. The Thermodynamic Approach to Whole-Life Insurance: A Method for Evaluation of Surrender Risk, arXiv:2012.09606 [q-fin.GN], 2020.

市場にシステミックな影響を与える可能性のあるカウンターパーティ破綻によるリスク指標への影響

Impact of Systemically Important Counterparty Bankruptcy on Risk Indicators

木谷 亮介 (Ryosuke KITANI)¹

¹ 一橋大学大学院 (Hitotsubashi University)

e-mail : woodcanyon@gmail.com

1 カウンターパーティリスクと当初証拠金

本研究は、変動証拠金 (VM) および当初証拠金 (IM) を授受する店頭デリバティブ取引について、カウンターパーティ (CP) の破綻が金融市場に影響を与えると仮定した場合におけるカウンターパーティリスク (CPR) への影響を計量するものである。

まず、 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ を確率空間とする。ここでは \mathbf{P} を実確率測度と定義し、そのうえでデリバティブ取引の価値を V 、CP の破綻時刻を示す停止時刻を τ で与える。

仮に、CP が t 時点で破綻しても、清算までの間、デリバティブ取引の価値 V は変動することになる。そこで、本研究では清算時点 $t + \delta^*$ で与え、 t 時点のエクスポージャーとして V から破綻直前の $VM(=V)$ および IM を減じた正のエクスポージャー (PE) として表現する。

$$PE(t) = (V(t + \delta^*) - V(t-) - IM(t-))^+ \Big|_{\tau=t}.$$

IM の保全対象は破綻から清算までの時間における価値変化であるが、これは $t-$ 時点では確率変数となっている。規制は IM にその確率変動の 99% を保全するように要求しているが、その具体的な計算には評価モデルの特定やパラメータの推定が必要である。しかし、これらは金融機関の経営方針や学術研究の進捗により異なることから、規制は画一的な算定方法の提示は避けている。

そのため、実務的には ISDA SIMM [1] という業界統一の簡易計算方式により計算されている。

また、CPR 指標として Kitani and Nakagawa [2] が定義した証拠金保全比率 (Mratio) および Gregory [3] が定義する潜在的将来エクスポージャー (PFE) を導入する。

$$Mratio(t) = \mathbf{P}(PE(t) = 0 | \mathcal{F}_{t-}), \quad PFE(t) = \text{ess.inf} \{y \in \mathbb{R} \mid \mathbf{P}(PE(t) \geq y \mid \mathcal{F}_{t-}) \leq 0.01\}.$$

2 CP の破綻と金融市場

本研究では、 V は原資産価格 X とそのボラティリティ σ で算定できるものし、CP 破綻の影響を除いたこれらの変動にかかる情報をフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$ で与える。

そして、ISDA SIMM [1] を参考に、CP の破綻が金融市場に与える影響をデリバティブ取引のリスクファクターのジャンプと捉え、その組を \mathcal{F}_t とは独立の確率変数 $J = (J_X, J_\sigma)$ で与える。

$$X(\tau) = X(\tau-) + J_X, \quad \sigma(\tau) = \sigma(\tau-) + J_\sigma.$$

また、本研究では PE を ISDA SIMM の基本要素にあたるデルタ (D)、ベガ (V)、カーベチャー (C)

とジャンプ (J) の 4 つの要素 PE_f に分解し, PFE の要因分解を実施した.

$$PE(t) = (A_D(t-, J)Z_X + A_V(t-, J)Z_\sigma + A_C(t-, J) + A_J(t-, J))^+ \Big|_{\tau=t},$$

$$f \in \{D, V, C, J\}, \quad PFE_f(t) = \mathbf{E} \left[PE_f(t) \mid PE(t) = PFE(t) \right].$$

3 SABR モデルによるスワップションの評価

本研究では標準的なスワップション (ヨーロピアンオプション) について, Hagan et al. [4] が提唱する SABR モデルで評価した際の CPR 指標を算定する. このモデルではヨーロピアンオプションの価格にかかる近似解が知られており, 上述の CPR 指標の導出が容易になっている.

CP 破綻によるジャンプ J は 4 つのシナリオを用意した.

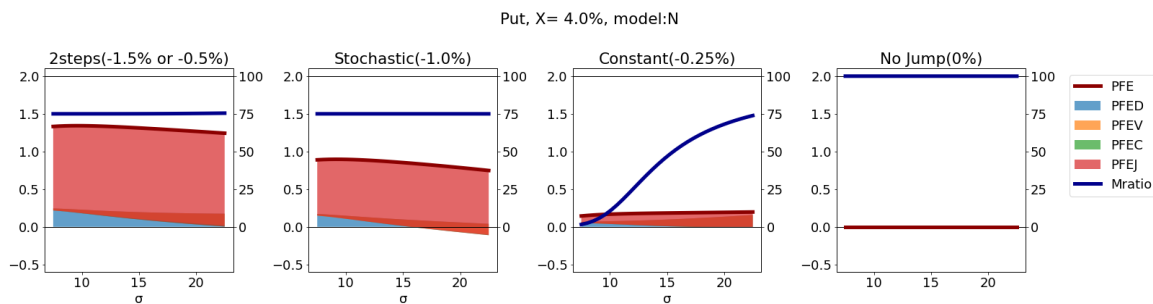


図 1. PFE(右軸) と Mratio(左軸), 単位: %.

図 1 より, ジャンプが発生しないシナリオ (No jump) においては Mratio が 99% 近傍で推移しており, IM が規制要件を満たすことを確認できた. しかし, それ以外のシナリオでは Mratio は 99% を下回り, 規制要件を満たしていないことが示唆された. 特に, J が確率変数であるシナリオ (2steps・Stochastic) については, ジャンプを要因として PFE が増大することがわかる.

この結果から, ジャンプを正確に把握することが CPR 管理に重要であることがわかった.

参考文献

- [1] International Swaps and Derivatives Association(ISDA), ISDA SIMM Methodology version 2.6, International Swaps and Derivatives Association(ISDA), 2023.
- [2] Kitani, R. and Nakagawa, H, Discrepancy between regulations and practice in initial margin calculation, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 41, 3. (2024).
- [3] Gregory, J., The xVA Challenge, Wiley & Sons, 2020.
- [4] Hagan, P. S., Kumar, D., Lesniewski, A. S. and Woodward, D. E., Managing smile risk, The Best of Wilmott, 1, 2002.