An Algebraic Stochastic Asymptotic Expansion of the Solution of a Semilinear PDE

大熊 香里 (Okuma Kaori)[1], 大平 彩恵 (Odaira Sae)[2]
[1] 株式会社 QUICK (QUICK Corp.), [2] 立命館大学大学院 (Ritsumeikan University)
e-mail： kaori.okuma@gmail.com

1 Overview

Let $T > 0$ be fixed and W be a d-dimensional Wiener process on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ equipped with a filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ satisfying the usual conditions. For the solution of forward-backward stochastic differential equation(FBSDE); for $0 \le t \le T$

$$\begin{cases} dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \\ \quad Y_t = \Phi(X_T) + \displaystyle\int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s^{\intercal} dW_s, \end{cases} \tag{1}$$

and the solution $u(t,x)$ of the partial differential equation(PDE)

$$\begin{cases} \partial_t u + \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}\sigma\sigma^{\intercal}\nabla^{\otimes 2}u + \mu^{\intercal}\nabla u + f(\cdot,\cdot,u,\sigma^{\intercal}\nabla u) = 0, \text{ on } [0,T) \times \mathbf{R}^d, \\ u(T,\cdot) = \Phi, \text{ on } \mathbf{R}^d, \end{cases} \tag{2}$$

where $\intercal$ denotes transposition of matrices/vectors, and we assume that $\sigma : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$, $\mu : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$, $\Phi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, and $f : [0,T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ have some regularity to ensure that the solution u of (2) is smooth, the following relationship holds (see e.g.[1]):

$$Y_t = u(t, X_t),\ 0 \le t \le T \text{ and } Z_t = \sigma^{\intercal}(t, X_t)\nabla u(t, X_t),\ 0 \le t \le T.$$

We are interested in obtaining a numerical value of $u(t,x)$ by discrediting the FBSDE (1).

If the derivatives $\partial_x^n u(t,x)$ were available, we may well use a Taylor series expansion to obtain a higher order approximation. In [2], this idea is employed, for the case $d = 1$ for clarity, combined with the nonlinear Feynman-Kac formula. The obtained expansion involves the higher order derivatives, but how they can be numerically obtained in each step is not explained in [2]. In the research presentation we will propose a scheme to numerically obtain them; they are given by the conditional expectation of the n-th derivative, $E[\partial_x^n \tilde{u}(t+\Delta, W_{t+\Delta})|\mathcal{F}_t]$, where $\tilde{u}$ is the approximation of u at $t + \Delta$ obtained via the scheme. They can be numerically calculated by solving an optimization problem for neural network functions— possibly by *deep learning*— via the non-linear Clark-Ocone formula proposed in [3]. In the research presentation, though we still restrict ourselves to the case where $d = 1$, $\mu = 0$ and $\sigma = 1$ for simplicity, we obtain, as the main results, the error estimates $|\partial_x^n u(t, W_t) - E[\partial_x^n \tilde{u}(t+\Delta, W_{t+\Delta})|\mathcal{F}_t]|$ of the second- and the third order.

Let $C_p^\infty([0,T] \times \mathbf{R})$ be the set of C^∞ functions whose derivatives of any order (including the 0-th one) are all with at most polynomial growth in x and bounded in t. For $w \in C_p^\infty([0,T] \times \mathbf{R})$, we denote by $\partial_1 w$ and $\partial_2 w$ the partial derivative with respect to the first variable, and the second one, respectively. Similarly, for $f \in C_p^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^3)$, we denote by $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_3 f$ and $\partial_4 f$ the partial derivative with respect to the first variable, the second one, the third one, and the fourth one respectively. Let $\mathcal{L} := \partial_1 + \frac{1}{2}\partial_2^2$.

Theorem 1 Let $\Phi \in L^2(\mathbf{R}, \mu)$ where

$$\mu(dx) = \frac{1}{(2\pi\Delta t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2\Delta t}} dx,$$

and $f \in C_p^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^3)$. We assume that the solution u of the equation

$$\mathcal{L}u(t,x) = -f(t,x,u(t,x),\partial_2 u(t,x)), \quad \Phi(W_T) = u(T,W_T) \tag{3}$$

exists in $C_p^\infty([0,T] \times \mathbf{R})$ for $t \in [T-\Delta t, T]$ for $T > 0$ and $0 < \Delta t < T$. Then, for $k = 2,3$, there is a function $C_k \in C_p^\infty(\mathbf{R})$ such that

$$|E[\partial_x^n \Phi(W_T) + G_{n,k}(T,W_T)|\mathcal{F}_{T-\Delta t}] - \partial_2^n u(T-\Delta t, W_{T-\Delta t})| \leq C_k(W_{T-\Delta t})(\Delta t)^k,$$

where the differential $\partial_x^n \Phi(x)$ is in the sense of the distribution. Here

$$G_{n,2}(T,W_T) = (\Delta t)\partial_2^n f(T,W_T,u(T,W_T),\partial_2 u(T,W_T))$$

and

$$G_{n,3}(T,W_T) = G_{n,2}(T,W_T) - \frac{(\Delta t)^2}{2}\mathcal{L}\partial_2^n f(T,W_T,u(T,W_T),\partial_2 u(T,W_T)).$$

We recall the main results in [2] and [3], namely, the nonlinear discrete Clark–Ocone formula. We present the numerical scheme for solving equation (3) and explain why Theorem 1 is important for the scheme.

Acknowledgement We acknowledge the discussions and the suggestions with/from Prof. Jirô Akahori.

Disclaimer Contents expressed or implied in this presentation are solely those of the authors, and do not represent the views of QUICK Corp.

References

[1] Jin Ma and Jiongmin Yong, Forward-Backward Stochastic Differential Equations and their Applications, Springer Berlin, 2007.

[2] Kaori Okuma, An asymptotic expansion of the solution of a semi-linear partial differential equation implied by a nonlinear Feynman-Kac formula, Int. J. Math. Industry, Vol.16 (2024) doi.org/10.1142/S2661335224500023.

[3] Jiro Akahori, Yui Furuichi and Kaori Okuma, Higher-order deep solver of non-linear PDEs implied by a non-linear discrete Clark-Ocone formula, JSIAM Lett., Vol.14 (2022), 9–12.

Pricing Swaption under Rough SABR Forward Market Model

Reo Adachi[1], Masaaki Fukasawa[2], Naoki Iida[1], Mitsumasa Ikeda[1], Yo Nakatsu[1], Ryota Tsurumi[1], Tomohisa Yamakami[1,3]
[1] Mizuho-DL Financial Technology, [2] The University of Osaka, [3] The University of Tokyo
e-mail : ryota-tsurumi@fintec.co.jp, fukasawa@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

1 A rough SABR Forward Market Model

Let $P_t(T)$ denote the price of the zero-coupon bond with maturity T at time $t \le T$. For a tenor structure $0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_N$, we define the forward term rate R^j for the term $(T_{j-1}, T_j]$ by

$$R^j_t = \frac{1}{\theta_j}\left(\frac{P_t(T_{j-1})}{P_t(T_j)} - 1\right), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

where $\theta_j = T_j - T_{j-1}$. For a given pair (I, J) with $1 \le I < J \le N$, the forward swap rate $S = \{S_t\}$ for the period $(T_I, T_J]$ is defined by

$$S_t = \frac{P_t(T_I) - P_t(T_J)}{A_t}, \quad A_t = \sum_{j=I+1}^{J} \theta_j P_t(T_j). \tag{1}$$

To accommodate a volatility skew for each caplet market in the framework of Forward Market Model [1], we propose a rough local-stochastic volatility model of the form

$$\mathrm{d}R^j_t = \gamma_j(t)\eta_j(R^j_t)\sqrt{V^j_t}\mathrm{d}W^{j\dagger}_t, \quad \log V^j_t = \log \xi_j(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \zeta(t-s)^2 \mathrm{d}s + \int_0^t \zeta(t-s)\mathrm{d}\bar{W}_s, \tag{2}$$

where

$$W^{j\dagger} = W^j + \sum_{i=1}^{j}\int_0^{\cdot} \frac{\theta_i}{1+\theta_i R^i_t}\gamma_i(t)\eta_i(R^i_t)\sqrt{V^i_t}\rho_{ij}\mathrm{d}t, \quad \bar{W} = W^0 + \sum_{i=1}^{N}\int_0^{\cdot} \frac{\theta_i}{1+\theta_i R^i_t}\gamma_i(t)\eta_i(R^i_t)\sqrt{V^i_t}\rho_{i0}\mathrm{d}t,$$

and $(W^0, W^1, \dots, W^N)$ is a correlated Brownian motion under a risk neutral measure with a constant correlation matrix $[\rho_{ij}]$. Here, γ_j are deterministic functions with $\gamma_j(t) = 0$ for $t \ge T_j$,

$$\zeta(t) = \kappa t^{H-1/2} \tag{3}$$

with $\kappa > 0$ and $H \in (0, 1/2)$, η_i are nonnegative C^2 functions with

$$\sup_{r>0} \frac{\eta_i(r)}{r} + \sup_{r>0} |\eta_i'(r)| + \sup_{r>0} r|\eta_i''(r)| < \infty \tag{4}$$

and ξ_j are deterministic positive continuous functions. We assume that $\rho_{i0} \le 0$ for $i = 1, \dots, N$. For each j, under the T_j-forward measure, R^j follows an extension of a rough SABR model [2].

2 An asymptotic expansion of the swaption implied volatility

Lemma 1 Let R^{j*} denote the local martingale part of the forward term rate R^j under Q^* for each $j = I+1, \dots, J$. Then,

$$\mathrm{d}S = \sum_{j=I+1}^{J} \Pi^j \mathrm{d}R^{j*}, \quad \Pi^j = \frac{\theta_j P(T_j)}{AP(T_{j-1})}\left(P(T_J) + S\sum_{k=j}^{J}\theta_k P(T_k)\right). \tag{5}$$

The swaption Black implied volatility $\sigma(k,t)$ at time 0 has the following asymptotic behavior.

Theorem 1 Under (2) with (3) and (4),

$$\sigma(k,t) = \sqrt{\bar{v}(t)}\left(1 + \psi k t^{H-1/2}\right) + o(t^H)$$

uniformly in $k \in \{k \in \mathbb{R}; |k| \le a\sqrt{t}\}$ as $t \to 0$ for any $a > 0$, where

$$\bar{v}(t) = \int_0^1 v(ts)\,\mathrm{d}s, \quad v(t) = \sum_{i,j=I+1}^{J} \rho_{ij}\pi_i\pi_j\sqrt{\xi_i(t)\xi_j(t)},$$

$$\pi_j = \frac{\Pi_0^j \eta_j(R_0^j)}{S_0}, \quad \psi = \frac{\kappa}{(2H+1)(H+3/2)v(0)}\sum_{j=I+1}^{J}\rho_{0j}\pi_j\sqrt{\xi_j(0)}.$$

This asymptotic formula enables us to construct a forward swap rate model S^* which approximates the forward swap rate S in the sense that the Black implied volatility $\sigma^*(k,t)$ under S^* has the same short-time asymptotics as $\sigma(k,t)$. Define S^* by

$$\frac{\mathrm{d}S_t^*}{S_t^*} = \sqrt{V_t}\,\mathrm{d}W_t^*, \quad V_t = v(t)\exp\left(\int_0^t \zeta(t-s)\,\mathrm{d}W_t^{0*} - \frac{1}{2}\int_0^t \zeta(t-s)^2\,\mathrm{d}s\right) \tag{6}$$

with $S_0^* = S_0$, where (W^{0*}, W^*) is a correlated Brownian motion under Q^* such that

$$\langle W^{0*}, W^* \rangle_t = \rho t, \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{v(0)}}\sum_{j=I+1}^{J}\rho_{0j}\pi_j\sqrt{\xi_j(0)}.$$

Such a Brownian motion exists; let W^{0*} be the local martingale part of W^0 under Q^* and

$$W^* = \frac{1}{\sqrt{v(0)}}\sum_{j=I+1}^{J}\pi_j\sqrt{\xi_j(0)}W^{j*},$$

where W^{j*} is the local martingale part of $W^{j\dagger}$ under Q^*. This means that $-1 \le \rho \le 0$.

Theorem 2 Under (2) and (6) with (3) and (4),

$$\sigma^*(k,t) = \sigma(k,t) + o(t^H)$$

uniformly in $k \in \{k \in \mathbb{R}; |k| \le a\sqrt{t}\}$ as $t \to 0$ for any $a > 0$.

. . . .

. . . .

References

[1] Lyashenko, A. and Mercurio, F., Looking Forward to Backward-Looking Rates: A Modeling Framework for Term Rates Replacing LIBOR (February 6, 2019). Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=3330240 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3330240

[2] Fukasawa, M. and Gatheral, J. (2022). A rough SABR formula, *Frontiers of Mathematical Finance* 1, 81-97.

[3] Fukasawa, M. (2021). Volatility has to be rough, *Quantitative Finance* 21, 1-8.

アメリカン・プット・オプションの最適権利行使境界の高精度数値計算

High-precision numerical computation for the optimal exercise boundary of American put option

杉田 恭将 (Yasumasa Sugita)[1], 小林 健太 (Kenta Kobayashi)[1]
[1] 一橋大学大学院経営管理研究科 (School of Business Administration, Hitotsubashi Univ.)
e-mail：bd231005@g.hit-u.ac.jp

1 概要

金融工学におけるひとつの興味の対象として，デリバティブの価格評価が挙げられる．デリバティブは理論的な側面から広く研究がなされているが，特にアメリカン・プット・オプションと呼ばれる金融派生商品の価格評価は，数学的に難しく，数値計算精度がよくない．本講演ではこのような課題に対して，応用数学で広く知られる DE 公式や Sinc 函数展開といった数値計算手法の適用による精度向上の方法を提案する．

2 非線形方程式の導出

確率過程 S_t（原資産価格）は幾何ブラウン運動に従うものとする．アメリカン・プット・オプションには，原資産価格がある価格よりも小さければ即座に権利行使されるような境界価格 $B(t)$ が存在し，これを最適権利行使境界と呼ぶ．$B(t)$ は満期 T までの任意の時刻で定義される函数である．アメリカン・プット・オプションの価格は最適権利行使境界により求められることが知られている．$B(t)$ の導出およびその性質に関しては Jacka[1]，Carr *et al.*[2]，Evans *et al.*[3] を参照のこと．

$\sigma > 0$ をボラティリティ，$r > 0$ を無リスク金利とし，$t = T - \dfrac{2u}{\sigma^2}$, $B(t) = Ke^{-b(u)}$, $q = \dfrac{2r}{\sigma^2}$ なる変換を適用すると，$B(t)$ が満たす函数方程式は以下のような $b(u)$ が満たす函数方程式に変換できる．$b(u)$ は $u \geq 0$ で定義され，狭義単調増加かつ $b(0) = 0$ を満たす函数である．

$$
\begin{aligned}
&e^{-qu} N\left(\frac{b(u)-(q-1)u}{\sqrt{2u}}\right) + e^{-b(u)} N\left(\frac{-b(u)+(q+1)u}{\sqrt{2u}}\right) - 1 \\
&\qquad + q\int_0^u e^{-q(u-v)} N\left(\frac{b(u)-b(v)-(q-1)(u-v)}{\sqrt{2(u-v)}}\right) dv = 0. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$b(u)$ は解析的に求めることができないため，数値計算により求める必要がある．この方程式 (1) に対し，以下のような漸化式を考え，$b_n(u)$ を用いて $b_{n+1}(u)$ を定めるスキームを構築することにより，権利行使境界 $b(u)$ を計算できることがわかった．

$$
\begin{aligned}
&e^{-qu} N\left(\frac{b_{n+1}(u)-(q-1)u}{\sqrt{2u}}\right) + e^{-b_{n+1}(u)} N\left(\frac{-b_{n+1}(u)+(q+1)u}{\sqrt{2u}}\right) - 1 \\
&\qquad + q\int_0^u e^{-q(u-v)} N\left(\frac{b_n(u)-b_n(v)-(q-1)(u-v)}{\sqrt{2(u-v)}}\right) dv = 0. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

3 離散化

本研究における非線形方程式を離散化する際には，以下の 2 つの離散化手法を用いる．

■**Double Exponential Numerical Integration**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi^{\mathrm{DE}}(s))\{\varphi^{\mathrm{DE}}\}'(s)ds \approx h\sum_{j=-N}^{N} f(\varphi^{\mathrm{DE}}(jh))\{\varphi^{\mathrm{DE}}\}'(jh)$$

where $\varphi(s)$ is the function as $\varphi(s) = \exp\left\{\frac{\pi}{2}\sinh(s)\right\}$.
本研究では，早期行使プレミアムを意味する積分項を全区間 $(-\infty, \infty)$ で定義される函数へと変数変換することにより，被積分関数を $f(\xi)$ として

$$\begin{aligned} q\varphi(s)\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi &\approx qh\varphi(s)\left\{\frac{1}{2}f(-R) + \sum_{j=1}^{4RM-1} f(-R+jh) + \frac{1}{2}f(R)\right\} \\ &\approx qh\varphi(s)\sum_{j=0}^{4RM} f(-R+jh). \end{aligned}$$

と離散化する．DE 数値積分公式による数値計算の高精度化は，古典的に知られている全区間無限積分に対し複合台形則を適用すると非常に高精度な解を得ることができるという事実に基づいている．

■**Sinc Approximation** For a function f defined on the real axis,

$$f(t) \approx \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(jh)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{h} - j\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(jh)\,S(j,\ h)(x),$$

where $S(j,\ h)$ is defined using the Sinc function as

$$S(j,\ h)(x) = \mathrm{Sinc}\left(\frac{x - jh}{h}\right).$$

これにより，函数 $b(u)$ は以下のように近似できる．

$$b(\varphi(s)) \approx \sum_{k=-N}^{N} c_k\ \mathrm{Sinc}\left(\frac{y - \varphi(s)}{h}\right) + \frac{\varphi(s)}{1+\varphi(s)}\log\left(1 + \frac{1}{q}\right).$$

離散化スキームの全体像や実際の数値計算結果については講演で報告する．

謝辞　本研究課題は科学技術振興機構（JST）SPRING, JPMJSP2174 の支援を受けている．

参考文献

[1] S. D. Jacka. Optimal stopping and the american put. Mathematical Finance, vol.1-num.2(1991), 1–14.

[2] P. Carr, R. Jarrow, and R. Myneni. Alternative characterizations of american put options. Mathematical Finance, vol.2-num.2(1992), 87–106.

[3] J. D. Evans, R. Kuske, and J. B. Keller. American options on assets with dividends near expiry. Mathematical Finance, vol.12-num.3(2002) 219–237.

Nプレイヤーおよび平均場ゲームでの最適投資・再保険問題：ベキ型効用の場合

Mean field and N-insurers games for optimal investment and reinsurance: Power utility case

畑 宏明 (Hiroaki Hata)[1], 孫 立憲 (Li-Hsien Sun)[2], 安田 和弘 (Kazuhiro Yasuda)[3]
[1] 一橋大学 (Hitotsubashi University), [2] 国立中央大学 (National Central University),
[3] 法政大学 (Hosei University)
e-mail : k_yasuda@hosei.ac.jp

1 概要

保険会社 n 社を考え，相対的パフォーマンス基準を用いた最適投資・再保険戦略を考える．市場モデルには Black-Scholes 市場を想定し，効用関数としてベキ型効用関数を用いた．各保険会社の剰余金プロセスは Cramér-Lundberg モデルの近似で表現し，保険事業のリスクを軽減するために再保険を活用することとします．本研究では，動的計画法を用いて HJB 方程式を導出し，この n 社間での Nash 均衡を考え，その明示的な解を得る．さらに，n を無限大とした場合の平均場ゲーム（MFG）とその均衡（MFE）も考察する．最後に，様々な数値結果を通じて，モデルパラメータが再保険および投資戦略に与える影響を分析した結果を紹介する．

2 モデル設定

本研究では，i 番目（$i = 1, 2, ..., n$）の保険会社のサープラス過程として，次の Cramér–Lundberg モデルの近似過程を採用する．

$$dR_i(t) = \{\beta_i + \eta_i q_i(t)\}a_i dt + b_i q_i(t) dZ_i(t), \quad R_i(0) = x_i. \tag{1}$$

ただし, $\{Z_i(t)\}$ をブラウン運動とし, $\beta_i := \upsilon_i - \eta_i \le 0$, $a_i := (\lambda+\lambda_i)\widehat{\mu}_1^i > 0$, $b_i := \sqrt{(\lambda+\lambda_i)\widehat{\mu}_2^i} > 0$ とする．ここで，$\lambda(>0)$ は全保険会社への共通のショックの回数を表すポアソン過程の強度で，$\lambda_i(>0)$ は i 番目の保険会社固有のショックの回数を表すポアソン過程の強度である．$\widehat{\mu}_1^i$，$\widehat{\mu}_2^i$ は i 番目の保険会社の支払い額の 1 次モーメントと 2 次モーメントである．υ_i，$\eta_i(>0)$ はそれぞれ i 番目の保険会社の safty loading と再保険に対する safty loading である．また，$\{q_i(t)\}$ は，$1-q_i(t)$ が i 番目の保険会社が再保険に加入している割合を表すとする．$q_i(t) = 1$ のとき再保険に全く加入していない状態で，$q_i(t) = 0$ のとき保険事業全体を再保険でカバーしている状態を表す．

次に市場に関して述べていく．市場には金利が 0 の安全資産があるとする．また，i 番目の保険会社は危険資産として株 $\{S_i(t)\}$ にのみ投資するものとする．このとき，$\{S_i(t)\}$ は次の確率微分方程式に従うとする．

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i dt + \nu_i dW_i(t) + \sigma_i dB(t). \tag{2}$$

ただし，$\{W_i(t)\}$ と $\{B(t)\}$ は互いに独立なブラウン運動で，固有のノイズと共通のノイズをそれぞれ表す．$\{Z(t)\}$ とも互いに独立とする．また，$\mu_i > 0$, $\nu_i \ge 0$, $\sigma_i \ge 0$, $\nu_i + \sigma_i > 0$ とする．

$\{\pi_i(t)\}$ を i 番目の保険会社が危険資産に投資する投資額とする．このとき，i 番目の保険会社の富

過程は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
dX_i(t) =& dR_i(t) + \pi_i(t)\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} \\
=& \{\pi_i(t)\mu_i + a_i(\beta_i + \eta_i q_i(t))\}dt + b_i q_i(t) dZ_i(t) + \pi_i(t)\nu_i dW_i(t) + \pi_i(t)\sigma_i dB(t). \\
X_i(0) =& x_i.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

このとき，許容可能な戦略 $\{\pi_i(t), q_i(t)\}$ に対して，期待効用

$$
J_i((\pi_i, q_i)_{i=1}^n) := \mathbb{E}\left[U\left(X_i(T)\{\overline{X}(T)\}^{-\theta_i}; \delta_i\right)\right] \tag{4}
$$

を考える．ここで，$\theta_i \in [0,1]$，$\overline{X}(T) := \left(\prod_{i=1}^n X_i(T)\right)^{1/n}$ とし，$U(x;\delta) := \frac{1}{1-1/\delta}x^{1-1/\delta}$（$x, \delta > 0,\ \delta \neq 1$）とする．本研究では，この n プレイヤーの中での Nash 均衡を考え，その戦略を明示的に与える．

3 主結果（n プレイヤーのとき）

次の定理が Hata et al. [1] の Theorem 2.2 として与えられている．

定理 1 $n \geq 2$ とする．任意の $i = 1, \cdots, n$ に対して，$x^i > 0, \delta_i > 0, \theta_i \in [0,1], \mu_i > 0, \sigma_i \geq 0, \nu_i \geq 0, \sigma_i + \nu_i > 0$ とする．また，任意の $1 \leq i \leq n$ に対して，$x_i > \max_{1 \leq i \leq n}(-a_i\beta_i)T$ とする．このとき，Nash 均衡が存在し，達成する戦略 $(\pi_i^*, q_i^*)_{i=1}^n$ は次のように与えられる．

$$
\pi_i^*(t) := \left\{\frac{\delta_i\mu_i}{\sigma_i^2 + \nu_i^2\{1 + (\delta_i - 1)\theta_i/n\}} - \frac{(\delta_i - 1)\theta_i\sigma_i}{\sigma_i^2 + \nu_i^2\{1 + (\delta_i - 1)\theta_i/n\}}\frac{\phi_n}{1 + \psi_n}\right\} \cdot \{X_i^{\pi_i^*, q_i^*}(t) + \alpha_i(t)\},
$$

$$
q_i^*(t) := (\bar{h}_i \vee 0) \cdot \{X_i^{\pi_i^*, q_i^*}(t) + \alpha_i(t)\}.
$$

ただし，$\bar{h}_i$ はある連立 1 次方程式の解であり，$\alpha_i(t) = a_i\beta_i(T - t)$ である．また，

$$
\phi_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i\sigma_i\mu_i}{\sigma_i^2 + \nu_i^2\{1 + (\delta_i - 1)\theta_i/n\}}, \quad \psi_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \theta_i(\delta_i - 1)\frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \nu_i^2\{1 + (\delta_i - 1)\theta_i/n\}}.
$$

4 主結果（平均場ゲームのとき）

前述の問題を適当な条件の下，$n \to \infty$ とし，平均場ゲームとしたとき次の結果が Hata et al. [1] の Theorem 3.2 で与えられている．

定理 2 $x > 0, \delta > 0, \theta \in [0,1], \mu > 0, \sigma \geq 0, \nu \geq 0, \sigma + \nu > 0$ とする．また，$x > -a\beta T$ とする．このとき，mean field equilibrium が存在し，それを達成する戦略 (π^*, q^*) は次で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\pi^*(t) &:= \left\{\frac{\delta\mu}{\sigma^2 + \nu^2} - \frac{(\delta - 1)\theta\sigma}{\sigma^2 + \nu^2}\frac{\phi_\infty}{1 + \psi_\infty}\right\} \cdot \{X^{\pi^*, q^*}(t) + \alpha(t)\}, \\
q^*(t) &:= \left(\frac{1}{b^2}\left\{\delta a\eta - \theta(\delta - 1) b \frac{\phi_{2,\infty}}{1 + \psi_{2,\infty}}\right\} \vee 0\right) \cdot \{X^{\pi^*, q^*}(t) + \alpha(t)\}.
\end{aligned}
$$

講演では，時間が許せば，これらに対する数値結果についても述べる．

参考文献

[1] H. Hata, L.-H. Sun, and K. Yasuda, Mean field and n-insurers games for optimal investment and reinsurance: Power utility case, *submitted*, (2025).