Optimal investment and reinsurance strategy for mean-variance insurers in a dependent risk model using a linear Gaussian stochastic factor model

羽生 寛明 (Hiroaki Hanyu)[1], 畑 宏明 (Hiroaki Hata)[1], 安田 和弘 (Kazuhiro Yasuda)[2]
[1] 一橋大学経営管理研究科, [2] 法政大学理工学部
e-mail : bd251004@g.hit-u.ac.jp

1 はじめに

従属リスクモデルおよび線形ガウス型確率ファクターモデルを統合した枠組みのもとで、平均分散最適化を行う保険会社のための最適投資・再保険戦略を考察する。本講演の目的は、複数のリスク資産および保険事業を扱う保険会社の最適ポートフォリオ問題を、より現実的な市場モデル下で理論的に解明し、明示的な最適戦略と効率的フロンティアを与えることである。本講演は [1] に基づく。

2 モデル

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上に、強度が $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ のポアソン過程 $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}$ と、$(n+m)$-次元ブラウン運動 W を定義し、互いに独立と仮定する。2 種類の保険事業を扱う保険会社を想定し、それぞれの保険金請求件数を共通ショック成分を含む従属ポアソン過程

$$C(t) := \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_1(t)+\mathcal{N}(t)} Z_{1j} + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_2(t)+\mathcal{N}(t)} Z_{2j}$$

として定義する。金融市場は 1 つの無リスク資産と複数のリスク資産から構成される。特に複数のファクターがリスク資産のリターンに影響する線形ガウス型確率ファクターモデルにより

$$dS_0(t) = rS_0(t)dt,$$

$$dS_i(t) = S_i(t)\left\{(a + AY(t))_i dt + \sum_{k=1}^{n+m} \Sigma_{ik} dW_k(t)\right\}, \quad S_i(0) = s_i > 0,$$

$$dY(t) = (b + BY(t))dt + \Lambda dW(t), \quad Y(0) = y \in \mathbb{R}^n,$$

$$r > 0,\ a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \Sigma \in \mathbb{R}^{n\times(n+m)}, \Lambda \in \mathbb{R}^{n\times(n+m)}$$

と与える。この設定の下で、リスク資産への投資額 $u(t)$ と再保険の割合 $q(t) = (q_1(t), q_2(t))$ をコントロールすることによる保険会社の平均分散最適化問題を考える。保険会社の余剰過程は、保険会社・再保険会社のセーフティローディングをそれぞれ δ_i, η_i（ただし $\delta_i < \eta_i$）として

$$\begin{aligned} dR^{q_1,q_2}(t) = {} & [c + \alpha_1\eta_1 q_1(t) + \alpha_2\eta_2 q_2(t)]dt - \int_0^\infty q_1(t) z_1 \tilde{N}_1(dt, dz_1) \\ & - \int_0^\infty q_2(t) z_2 \tilde{N}_2(dt, dz_2) - \int_0^\infty \int_0^\infty (q_1(t)z_1 + q_2(t)z_2)\tilde{N}(dt, dz_1, dz_2) \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = (\lambda_1 + \lambda)\mu_{11}, \quad \alpha_2 = (\lambda_2 + \lambda)\mu_{21}, \quad c = (\delta_1 - \eta_1)\alpha_1 + (\delta_2 - \eta_2)\alpha_2$$

と表すことができる。ここで $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}$ は $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}$ に対応する補償ポアソンランダム測度である。

このとき制御変数 $\pi=(u,q)$ に対し、保険会社の富の水準 X^π は、初期値を $X^\pi(0)=x_0$ として

$$
\begin{aligned}
dX^\pi(t) &= [rX^\pi(t)+c+u(t)^\top(a+AY(t)-r1)+\alpha_1\eta_1 q_1(t)+\alpha_2\eta_2 q_2(t)]dt+u(t)^\top\Sigma dW(t)\\
&\quad -\int_0^\infty q_1(t)z_1\tilde{N}_1(dt,dz_1)-\int_0^\infty q_2(t)z_2\tilde{N}_2(dt,dz_2)-\int_0^\infty\int_0^\infty (q_1(t)z_1+q_2(t)z_2)\tilde{N}(dt,dz_1,dz_2)
\end{aligned}
$$

と表される。目的関数（平均分散問題）は期末の富の期待値を ξ として、

$$
V(\xi)=\min_{\pi\in\mathcal{A}}\left\{\mathbb{E}\left[(X^\pi(T)-\xi)^2\right] \text{ subject to } \mathbb{E}[X^\pi(T)]=\xi\right\}
$$

となる。本問題は、一般にジャンプ拡散型の確率制御問題として定式化されるが、最適化問題の凸性に基づく Lagrange の未定乗数法により、以下のような無制約最適化問題に帰着される。

$$
V(\xi)=\max_{\zeta\in\mathbb{R}}\min_{\pi(\cdot)\in\mathcal{A}}\left\{\mathbb{E}\left[(X^\pi(T)-(\xi-\zeta))^2\right]-\zeta^2\right\}.
$$

3　数理的枠組みと主結果

線形二次制御理論に基づき、無制約最適化最適化問題に対応する後向き確率微分方程式（BSDE）

$$
\begin{aligned}
dQ(t) = \Big[&-2r+(a+AY(t)-r1)^\top(\Sigma\Sigma^\top)^{-1}(a+AY(t)-r1)-\frac{1}{2}\Gamma(t)^\top\left(I-2\Sigma^\top(\Sigma\Sigma^\top)^{-1}\Sigma\right)\Gamma(t)\\
&+2\Gamma(t)^\top\Sigma^\top(\Sigma\Sigma^\top)^{-1}(a+AY(t)-r1)\Big]dt+\Gamma(t)^\top dW(t),\quad Q(T)=0
\end{aligned}
$$

を定義する。この BSDE の解 $(\tilde{Q},\tilde{\Gamma})$ はある行列リッカチ方程式の解を用いて明示的に得られ、一意的である。この解を用いて、パラメータの値により場合分けを必要とするが、最適戦略は明示的に次のように構成できる。

$$
\begin{aligned}
\hat{u}(t) &= -(\Sigma\Sigma^\top)^{-1}\left[a+AY(t)-r1+\Sigma\tilde{\Gamma}(t)\right]\left(X^{\hat{\pi}}(t)-\hat{g}_1(t)\right),\\
\hat{q}(t) &= (-m_1(X^{\hat{\pi}}(t)-\hat{g}_1(t)),\ -m_2(X^{\hat{\pi}}(t)-\hat{g}_1(t))).
\end{aligned}
$$

効率的フロンティアは次で与えられる。

$$
\begin{aligned}
J_{VM}(\hat{\pi},\hat{\zeta}_1) &= \frac{e^{\tilde{Q}(0)}}{e^{(2r+A_i)T}-e^{\tilde{Q}(0)}}(\xi-\xi_{min})^2,\\
\xi_{min} &\coloneqq x_0e^{rT}-\frac{c}{r}(e^{rT}-1).
\end{aligned}
$$

ケースによって定数 $A_i,\hat{\zeta}_i$、関数 g_i の表現は異なる。

4　本研究の主な貢献

1) 複数の経済ファクターがリスク資産リターンに同時影響を及ぼす線形ガウス型確率ファクターモデルと、共通ショックを含む従属リスクモデルを組み合わせ、より現実的かつ柔軟な平均分散最適化問題の枠組みを構築した。
2) 線形二次制御理論と BSDE を用い、最適戦略と効率的フロンティアの明示的な解を導出した。
3) BSDE 関連問題の解の一意性証明と、ジャンプ拡散モデルにおける検証定理を与えた。

参考文献

[1] Hanyu, H., Hata, H and Yasuda. “Optimal investment and reinsurance strategy for mean-variance insurers in a dependent risk model using a linear Gaussian stochastic factor model”, (2025) preprint.

確率ファクターモデル下における Turnpike 定理の定量的評価の導出

Convergence Rate for Turnpike Theorem under Stochastic Factor Models

山道 宏紀 (Hiroki Yamamichi)[1]
[1] 大阪大学 (The University of Osaka)
e-mail：yamamichi@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

1 概要

最適投資問題における Turnpike 定理とは、「一般の効用関数に対する最適投資戦略は、同程度のリスク選好を持つべき型効用関数に対する最適投資戦略によって長期的に近似できる」ことを主張する定理である。[1] をはじめとする先行研究では、Turnpike 定理の成立を定性的に示した研究が多く、定量的な収束レートが得られた研究は Black-Scholes モデルを扱った [2] に限られていた。本講演では、線形ガウス型ファクターモデルの設定においても、指数関数的な収束レートが得られることを解説する。

2 設定：線形ガウス型ファクターモデル

W を n 次元 Brown 運動とし, 1 種類の安全資産 S^0 と n 種類の危険資産 $S = (S^1, \ldots, S^n)^\top$ から成る完備市場を考える．さらに, 危険資産の平均収益率は m 次元線形ガウスファクター過程 Y のアフィン関数によって定まるとする：

$$\begin{aligned} dS_t^0 &= S_t^0 r dt, && S_0^0 = 1, \\ dS_t &= \operatorname{diag}(S_t)\left\{(a + AY_t)dt + \Sigma dW_t\right\}, && S_0 \in \mathbb{R}^n_{++}, \\ dY_t &= (b + BY_t)dt + \Lambda dW_t, && Y_0 = y \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

ただし, $r > 0, a \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times m}, \Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^m, B \in \mathbb{R}^{m\times m}, \Lambda \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ に対して $\operatorname{diag}(x)$ は対角成分が x_i に等しい対角行列, $\mathbb{R}^n_{++} = (0, \infty)^n$.

$x > 0$ を初期投資額, $\pi = (\pi^1, \ldots, \pi^n)^\top$ を各危険資産への投資比率とすると, 対応する自己資金調達的な投資家の富過程 X^π は以下の確率微分方程式に従う：

$$dX_t^\pi = X_t^\pi \left[\left\{r + \pi_t^\top (a + AY_t - r\mathbf{1})\right\} dt + \pi_t^\top \Sigma dW_t\right], \qquad X_0^\pi = x.$$

3 期待効用最大化問題

効用関数 $U : (0, \infty) \to (-\infty, +\infty)$ は, 滑らかで稲田条件 $U'(0+) = \infty$, $U'(+\infty) = 0$ を満たす狭義凹関数とする．本講演では, 終端時刻 $T > 0$ における富 X_T^π から得られる期待効用を最大化する問題を考える：

$$\max_\pi \mathbb{E}[U(X_T^\pi)].$$

効用関数が CRRA 型のとき, すなわち $U(x) \coloneqq \frac{x^p}{p}, x \in (0, \infty), p < 0$ のとき, その場合の期待効用最大化問題は [3] などで詳しく調べられており, 最適投資戦略 $\hat{\pi}$ は Riccati 型常微分方程式の解などを用いて明示的に表現することが出来る．しかし, 関数形を仮定しない一般の効用関数 U に対して

は, マルチンゲール表現定理を用いてその最適投資戦略 $\hat{\pi}$ の存在を示すことはできるが, その明示的な表示を得ることは一般に難しい.

4　Turnpike 定理

2 人の投資家を考え、各投資家の効用関数はそれぞれ U_1, U_2 で与えられているとする. ここで, U_1 は関数形を仮定せずに一般の稲田型効用とするが, U_2 は CRRA 型効用, $U_2 := \frac{x^p}{p}, x \in (0,\infty), p < 0$ とする. 各効用関数の限界効用 U_i' の 逆関数を $I_i : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $I_i := (U_i')^{-1}$ とおく.

Turnpike 定理の定量的評価を導出する際には, 投資家のリスク選好と市場モデルの安定性それぞれに関する以下の仮定が本質的である. まず, 2 人の投資家は以下の意味で十分近いリスク選好を持つとする：

仮定 1　$q := \frac{p}{p-1}$ とする. ある $K > 0, \alpha \in (q-1, 0]$ が存在して, 任意の $z > 0$ に対して, 以下が成り立つ：

$$|I_1(z) - I_2(z)| \le K(1 + z^\alpha),$$
$$|zI_1'(z) - zI_2'(z)| \le K(1 + z^\alpha).$$

さらに, ファクター過程の挙動は以下の意味で十分安定的であるとする：

仮定 2　$R := B - (1+\alpha)\Lambda\Sigma^{-1}A + \alpha\Lambda\Lambda^\top \tilde{P}$ とする. ただし, $\tilde{P}$ は無限期間のリスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題で現れる代数 Riccati 方程式の解とする. このとき, ある m 次正定値行列 P が存在して, 以下が成り立つ：

$$PR + R^\top P < 0.$$

以上の仮定の下で, Turnpike 定理の指数関数的な収束レートが得られる.

定理 3　$\hat{\pi}^{1,T}, \hat{\pi}^{2,T}$ を, 各投資家に対する期間 $[0,T]$ における最適投資戦略とする. このとき, 仮定 1-2 の下で, 以下が成り立つ：

$$|\hat{\pi}_0^{1,T} - \hat{\pi}_0^{2,T}| = O\left(\exp\left\{-\left(1 - \frac{\alpha}{q-1}\right) rT\right\}\right), \quad (T \nearrow \infty).$$

上の結果に加えて, CIR モデルなど確率的金利過程を含むファクターモデルで得られている類似の結果についても, 講演内で言及する予定である.

謝辞　本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2138 の支援を受けたものです。

参考文献

[1] Guasoni, P., Kardaras, C., Robertson, S., Xing, H. (2014). Abstract, classic, and explicit turnpikes. Finance and stochastics, 18, 75-114.

[2] Bian, B., Zheng, H. (2015). Turnpike property and convergence rate for an investment model with general utility functions. Journal of Economic Dynamics and Control, 51, 28-49.

[3] Kuroda, K., Nagai, H. (2002). Risk-sensitive portfolio optimization on infinite time horizon. Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 73(3-4), 309-331.

確率 Volterra 方程式に関する最適制御と大域的最大原理

Global maximum principle for optimal control of stochastic Volterra equations with singular kernels

濱口 雄史 (Yushi Hamaguchi)[1]
[1] 京都大学 (Kyoto University)
e-mail : hamaguchi@math.kyoto-u.ac.jp

1 概要

非凸最適制御問題における大域的最大原理は, 与えられた制御過程の最適性の必要条件を, 変分解析を通してハミルトニアンの (大域的) 最大化によって特徴付けるための重要な定理であり, (決定論的) 常微分方程式や確率微分方程式に関する非凸制御問題においては多くの既存研究がある. 本講演では, 特異な核を持つ確率 Volterra 方程式 (stochastic Volterra equation; SVE) に関する非凸最適制御問題における大域的最大原理について得られた結果を紹介する. 本講演は [1] の内容に基づく.

2 SVE に関する制御問題

$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ を確率空間, W を 1 次元 Brown 運動, $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ を W に付随するフィルトレーション, $T>0$ を定数とする. U を空でない可分位相空間とし, $\mathcal{U}$ を U に値を取る発展的可測過程全体の集合とする. $\mathcal{U}$ の各元を制御過程とみなす. 与えられた制御過程 $u=(u_t)_{t\in[0,T]}\in\mathcal{U}$ に対応する (実数値) 状態過程 $X=(X_t)_{t\in[0,T]}$ を以下の SVE の解として定める:

$$X_t = x+\int_0^t K(t-s)b(s,u_s,X_s)\,\mathrm{d}s+\int_0^t K(t-s)\sigma(s,u_s,X_s)\,\mathrm{d}W_s,\quad t\in[0,T]. \tag{1}$$

また, コスト関数 $J(u)\in\mathbb{R}$ を

$$J(u):=\mathbb{E}\left[h(X_T^u)+\int_0^T f(t,u_t,X_t^u)\,\mathrm{d}t\right] \tag{2}$$

と定める. ただし, $x\in\mathbb{R}$ は与えられた初期状態であり, $b,\sigma,f:[0,T]\times U\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ および $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は十分良い性質を持つ関数とする. また $K:(0,T]\to\mathbb{R}$ は核と呼ばれる関数であり, 非増加かつ $K\in L^2(0,T)$ と仮定する. なお, 条件 $K\in L^2(0,T)$ は SVE(1) の確率積分項が well-defined であるための必要条件であることに注意する. この設定の下, 与えられた制御過程 $\hat{u}\in\mathcal{U}$ が最適 (すなわちコスト関数 (2) を最小化するような制御過程) であるための必要条件を, ハミルトニアンの大域的最大化によって特徴付けることが本研究の目的である.

確率制御問題 (1)–(2) の特徴/難点は以下の通りである.

- 制御過程が値を取る空間 U は凸集合とは限らない. したがって, 制御過程の凸結合に関する変分を用いた解析は適用できない. 代わりに, 制御過程 $\hat{u}$ の spike variation
$$u^{v,\tau,\varepsilon}:=v\mathbb{1}_{[\tau,\tau+\varepsilon]}+\hat{u}\mathbb{1}_{[0,T]\setminus[\tau,\tau+\varepsilon]}\quad (v\in\mathcal{U},\,\tau\in[0,T),\,\varepsilon\in(0,T-\tau])$$
に関する ($\varepsilon\downarrow 0$ としたときの) $X^{v,\tau,\varepsilon}:=X^{u^{v,\tau,\varepsilon}}$ の変分解析を行う.
- SVE(1) の核 K は一般に原点において特異的 (すなわち $\lim_{t\downarrow 0}K(t)=\infty$) である. 核が特異であるとき, SVE の解の標本路は Brown 運動の標本路と比べて低い regularity を持つことが

知られている．そのため, spike variation に関する変分解析は非自明であり, 精密な評価が必要である．

- 核 K が特異であるとき, SVE の解は一般にセミマルチンゲールの範疇を超えている．そのため, 確率微分方程式に関する大域的最大原理の既存研究で用いられてきた, 伊藤解析や後退確率微分方程式の解析に基づく標準的な方法は適用できない.

以上を念頭に, 本講演では, 制御された SVE の spike variation に関する Taylor(型) 展開を与え, その剰余項の収束の速さが核の特異性によって特徴付けられることを説明する．さらに, [2, 3] の枠組に則り, Taylor 展開における主要項として現れる (1 次/2 次) 変分 SVE の無限次元空間上へのリフトを考えることで, 無限次元後退確率微分方程式の形の (1 次/2 次) 随伴方程式を導出し, その解を用いて大域的最大原理を導く.

参考文献

[1] Yushi Hamaguchi, Global maximum principle for optimal control of stochastic Volterra equations with singular kernels: An infinite dimensional approach, Journal of Differential Equations, https://doi.org/10.1016/j.jde.2025.113618 (2025).

[2] Yushi Hamaguchi, Markovian lifting and asymptotic log-Harnack inequality for stochastic Volterra integral equations, Stochastic Processes and their Applications, 178. (2024), 104482.

[3] Yushi Hamaguchi, Weak well-posedness of stochastic Volterra equations with completely monotone kernels and nondegenerate noise, The Annals of Applied Probability, 35(2). (2025), 1442–1488.

Epstein-Zin 型確率微分効用最大化に対するホモトピー摂動近似

A Homotopy Perturbation Method for Approximating Epstein-Zin's Stochastic Differential Utility Maximization

関根 順 (SEKINE Jun)
大阪大学 (The University of Osaka)
e-mail : sekine.jun.es@osaka-u.ac.jp

1 設定

以下の確率微分方程式系で与えられる金融市場モデルを考える：終端時刻を $T > 0$ として

$$
\begin{aligned}
dS_t^0 =& r(X_t)S_t^0 dt, \quad S_0^0 = 1,\\
dS_t =& \operatorname{diag}(S_t)\left\{\mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t\right\}, \quad S_0 \in \mathbb{R}^n_{++},\\
dX_t =& b(X_t)dt + a(X_t)dW_t, \quad X_0 \in \mathbb{R}^m.
\end{aligned}
$$

ただし, $W := (W_t)_{t\in[0,T]}$, $W_t := (W_t^1, \ldots, W_t^d)^\top$ は $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ 上 d 次元 $\mathcal{F}_t$-Brown 運動, $r : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mu : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n\times d}$ $(\sigma\sigma^\top(x) > 0\ {}^\forall x \in \mathbb{R}^m)$, $b : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m\times d}$ で, S^0 は無リスク資産, S は n 種類のリスク資産の価格過程をそれぞれ表し, X は (S^0, S) に影響を与える m 次元の確率ファクター過程を表している. また, 確率微分方程式

$$
d\mathcal{W}_t^{(w,\pi,c)} = \mathcal{W}_t^{(w,\pi,c)} \left[\sum_{j=1}^n \pi_t^j \frac{dS_t^j}{S_t^j} + \left(1 - \sum_{j=1}^n \pi_t^j\right)\frac{dS_t^0}{S_t^0} - c_t dt\right], \quad \mathcal{W}_0^{(w,\pi,c)} = w,
$$

で自己資金調達的投資家の富過程を定義する. ここで, $\pi := (\pi_t)_{t\in[0,T]}$, $\pi_t := (\pi_t^1, \ldots, \pi_t^n)^\top$ は n 種類危険資産に対する投資比率戦略過程, $c := (c_t)_{t\in[0,T]}$ は消費比率戦略過程である. この富過程に関する Epstein-Zin 型確率微分効用過程 $\left(V_t^{(\pi,c)}\right)_{t\in[0,T]}$ は後退確率微分方程式：

$$
V_t^{(\pi,c)} = \mathbb{E}\left[\int_t^T f_{\mathrm{EZ}}\left(c_u \mathcal{W}_u^{(w,\pi,c)}, V_u^{(\pi,c)}\right)du + U_\gamma\left(\mathcal{W}_T^{(w,\pi,c)}\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] \quad (t \in [0,T]),
$$

の解として定義される. ここで

$$
f_{\mathrm{EZ}}(c,v) := \begin{cases} \dfrac{\rho(1-\gamma)}{(1-\delta)}v\left[\left\{\dfrac{c}{((1-\gamma)v)^{\frac{1}{1-\gamma}}}\right\}^{1-\delta} - 1\right], & \text{if } \delta \neq 1,\\ \rho(1-\gamma)v\left\{\log c - \dfrac{1}{1-\gamma}\log\left((1-\gamma)v\right)\right\}, & \text{if } \delta = 1, \end{cases}
$$

$$
U_\gamma(w) := \begin{cases} \dfrac{1}{1-\gamma}w^{1-\gamma}, & \gamma > 0, \neq 1 \text{ のとき},\\ \log w, & \gamma = 1 \text{ のとき}, \end{cases}
$$

はそれぞれ Epstein-Zin ドライバー関数, CRRA-効用関数と呼ばれ, $\rho > 0$ は割引率係数, $\psi := 1/\delta$ $(\delta > 0)$ は異時点間代替弾力性 (EIS) 係数, $\gamma > 0$ はリスク回避度係数である.

2 Epstein-Zin 型確率微分効用最大化問題

初期時刻 $t \in [0,T]$ に対する効用最大化問題

$$\operatorname*{esssup}_{(\pi,c)} V_t^{(\pi,c)} = U_\gamma(\mathcal{W}_t) \exp\{(1-\gamma)V(t,X_t)\}$$

を取り扱う．対応する動的計画方程式は

$$-\partial_t V = \hat{g}\left(x, V, a^\top \nabla V\right) + \mathbb{L}V, \quad V(T,x) = 0 \tag{HJB}$$

と, ファクター過程 X の生成作用素 $\mathbb{L}$ と関数：

$$\begin{aligned} &\hat{g}(x,y,z) \\ &= \begin{cases} r(x) + \dfrac{1}{2\gamma}\left\{|\lambda(x)|^2 + 2(1-\gamma)\lambda(x)^\top z + (1-\gamma)|z|^2\right\} + \dfrac{\rho}{\epsilon}\left\{e^{-\epsilon(y-\log\rho)} - 1\right\} - \rho, & \text{if } \delta \neq 1, \\ r(x) + \dfrac{1}{2\gamma}\left\{|\lambda(x)|^2 + 2(1-\gamma)\lambda(x)^\top z + (1-\gamma)|z|^2\right\} - \rho(y - \log\rho) - \rho, & \text{if } \delta = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

ただし, $\epsilon := \psi - 1 := 1/\delta - 1$, $\lambda := \sigma^\top\left(\sigma\sigma^\top\right)^{-1}(\mu - r\mathbf{1})$, $\mathbf{1} := (1,\ldots,1)^\top \in \mathbb{R}^n$ を用いて表される.

注意 1. (HJB) の適当な古典解が得られれば, これを用いてフィードバック型の最適投資戦略 $\hat{\pi}_t := \hat{\Pi}(t,X_t)$, $\hat{c}_t := \hat{C}(t,X_t)$ $(t \in [0,T])$ の "候補" が構成される．更に, verification の議論を通して実際に最適性が確認できれば, 効用最大化問題の解が得られる.

3 ホモトピー摂動法の適用：動機と背景

- (HJB) の明示解を得ることは一般には難しい．例外は以下の 3 つ：(i) Black-Scholes モデルのケース, (ii) $\gamma = \delta$ ($\Leftrightarrow$ CRRA 型効用最大化) で完備市場を想定するケース, (iii) $\delta = 1$ のときで CIR 型ファクターや Heston 形ファクターなどの所謂アファイン型ファクターモデルを採用したケース.
- 上記 (i)-(iii) 以外のケースで, $\delta \neq 1$ のときは, (HJB) は指数関数的な非線形項を持つが, これを「線形近似」することでアファイン型ファクターモデルに対して近似的な解析解が得られること (Campbell-Shiller 近似) が知られている．この近似的解析解は実証分析への応用も含めて広く用いられている（[1],[2] など参照）．しかし, この近似手法の数学的（理論的）正当化ができるのかは不明である（よくわからない）．また, ファクターや資産価格のボラティリティが大きい状況では, この近似手法の誤差が大きいことも指摘されている.
- Campbell-Shiller 近似のような指数関数項の線形化近似により得られる近似解を「主要項」とみなし, これに次ぐ「修正項」を明示的な形で求めることを目的として, 今回はホモトピー摂動法を適用して計算を行うことにした．手法や主結果は, 発表の中で紹介する予定である.

参考文献

[1] 安達智彦・池田昌幸「長期投資の理論と実践：パーソナル・ファイナンスと資産運用」, 東京大学出版会, 2019.

[2] Campbell, J. Y., and Viceira, L. M. "Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors", (Oxford University Press), 2002.