

環状帯折りに対する考察

A Consideration on Cyclic Strip Folding

賈 伊陽 (Yiyang Jia)¹, 三谷 純 (Jun Mitani)²,

¹東京都市大学 (Tokyo City University), ²筑波大学 (University of Tsukuba)

e-mail: kaiyou@tcu.ac.jp

1 序論

計算折り紙の分野における平坦折り問題とは、すなわち与えられた展開図が平坦に折れるかどうかを決定する問題である[2]。単一頂点の場合、局所的な平坦折り可能性は、角度の和に関する川崎-Justin の定理[4]や、山折り (M) の数と谷折り (V) の数の差が 2 でなければならないとする前川-Justin の定理[3]などの結果を通じてよく理解されている。しかし、複数の頂点を含む折り目パターンを扱う場合、この問題は NP 困難であることが知られている[2]。この問題のより単純で広く研究されている変形が地図折りであり、これは通常、格子状のパターンを持つ長方形のシートを折ることを含む。 $1 \times n$ の帯折り問題は、空間次元を 1 つ減らすことによって地図折りをさらに単純化するものである[1]。

我々は、環状帯折りを、 $1 \times n$ の帯の両端を結合し、追加の折り目を導入することによって環状にした帯折り問題の変形として定義する (図 1 参照)。任意の山谷割り当てが平坦に折れるパターンとなる標準的な帯折りとは異なり、環状帯折りでは多くの折り目パターンが平坦に折ることができない。これは、平坦折り可能性の条件と、その根底にある数学的構造に関する新たな課題と問いを生じさせるものである。

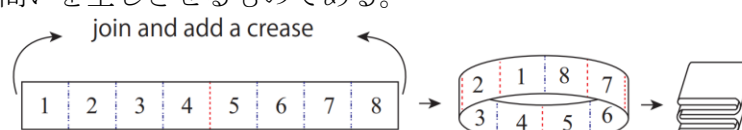


図 1. 線形の帯の両端を結合し、折り目を 1 つ追加することで 1×8 の環状帯折りを作成
興味深いことに、このモデルにおける平坦折り可能性の条件は、前川-Justin の定理に直接対応する。等間隔の折り目を持つ単一頂点折りの境界を考えると、そのトポロジーは $1 \times n$ の環状帯折りのトポロジーと等価である。その結果、山折り (M) と谷折り (V) の数の絶対差が 2 でなければならないという条件 $|M-V|=2$ は、環状帯折りにも適用される。しかし、この条件は与えられたパターンが折り畳み可能かどうかを決定するものの、異なる折り方の数やそれらを列挙する方法を明らかにするものではない。

このギャップを埋めるために、我々は 2 つの基本的な構成要素、すなわち星 (stars) と木 (trees) からなる組み合わせ生成集合 (図 2) を導入する。これらは、開いた状態の折り目パターンによって定義される。開いた星は山折りと谷折りが交互に現れる特徴を持ち、一方で開いた木は連続した折り目を持つ。

さらに、我々は、任意の有効な折り畳み状態を構築できる最小生成集合を特定する。この集合に基づき、すべての最終的な折り畳み状態の圏を定義する。我々は、この圏がモノイド圏を形成することを示す。そこでは、テンソル積演算により、より単純なものから複雑な折り畳み状態を合成することが可能となる。コフレームワークは、 $1 \times n$ の環状帯折りを分析するための、新規でより包括的な代数的構造を提供するものである。

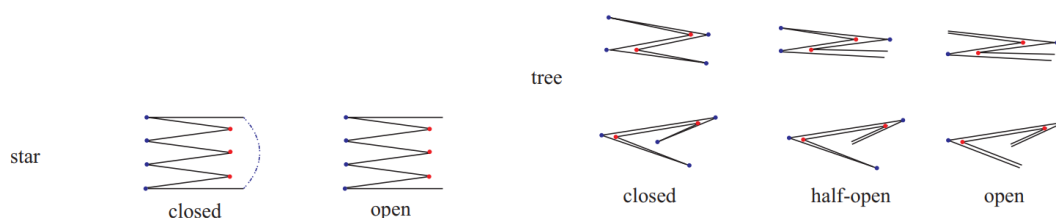


図 2. 折り畳まれた状態における 2 種類の組み合わせ要素

2 基本的な構成要素：星と木

すべての折り畳まれた状態は、2 つの基本要素の組み合わせとして記述することができる。これらの要素は、（開いた状態における）局所的な折り目のパターンによって区別される。

- **星 (Stars)**：紙の帯の領域に対応し、そこでは M（山）折りと V（谷）折りが厳密に交互に現れ、「...MVMV...」というシーケンスを形成する。これらはジグザグ折りのパターンの構造的な結果である。
- **木 (Trees)**：「...MM...」や「...VV...」のような、連続する同一の折りから生じる。

各要素は、閉じた、半開きの、または開いたという 3 つの状態のいずれかで存在する。閉じた要素は、完全に独立した折り畳まれた状態である。対照的に、開いた要素と半開きの要素（後者は木にのみ適用可能）は、有効で完全に折り畳まれた状態を形成するために他の要素と組み合わせる必要がある中間的な構成要素として機能する（図 2）。

3 再帰的列挙アルゴリズム及び環状帯折りの代数構造

この生成集合に基づき、我々はすべての可能な折り畳み状態を構築し列挙するための再帰的アルゴリズムを開発した。このアルゴリズムは、星ベースの構造を生成する関数と、木ベースの構造を生成する関数を含む、相互再帰的な戦略を中心に構築され、与えられた $1 \times n$ の展開図に対するすべての有効な平坦折り状態の網羅的かつ体系的な列挙を保証するものである。さらに、我々の研究は、 $1 \times n$ の環状帯に対するすべての閉じた、折り畳まれた状態の空間がモノイド圏を形成することを示すものである。この圏において、折り畳まれた状態は対象として扱われ、テンソル積演算が状態の合成を定義する。

謝辞

本研究は、JST CREST の助成金（課題番号：JPMJCR1911）による支援を受けたものである。

参考文献

- [1] E. M. Arkin, M. A. Bender, E. D. Demaine, M. L. Demaine, J. S. B. Mitchell, S. Sethia, and S. S. Skiena. When Can You Fold a Map? Computational Geometry: Theory and Applications, 29(1):23-46, 2002.
- [2] M. Bern and B. Hayes. The Complexity of Flat Origami. In Ann. ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pages 175-183. ACM, 1996.
- [3] J. Justin. Towards a mathematical theory of origami. In Int. Meeting of Origami Science and Scientific Origami, pages 15-29. K. Miura (Ed.), 1996.
- [4] T. Kawasaki. On the relation between mountaincreases and valley-creases on a flat origami. In Int. Meeting of Origami Science and Technology, 229-237, 1989.

From 3D Model to 2D Manufacturable Design

Chen Muyan¹, Jun Mitani²,

^{1,2}University of Tsukuba

e-mail: s2520702@u.tsukuba.ac.jp

1. Introduction

The process of transforming flat materials into 3D shapes is a common manufacturing procedure, often used in packaging, prop creation, decoration, and entertainment. A representative example of this is Papercraft, which is a traditional art form.

For the design problem, we typically consider the reverse problem: unfolding a 3D model into flat sections. Computer graphics technology is commonly used to assist in this process by unfolding the user-input model to the 2D plane. However, not all models are suitable for unfolding. This requires the user to have knowledge of modeling to be able to simplify and optimize the model to make it suitable for unfolding, which can be difficult.

Models that can be fabricated are often formed by piecing together a set of developable surfaces. Recent mainstream methods approximate the input model as developable surfaces, which is known as piecewise developable approximation. However, many of these methods do not consider design principles in their process and lack the ability to adequately represent model features.

Thus, this research aims to develop a method that can extract the main features of an input model, reconstruct the model based on these features, and integrate certain design principles as constraints into this process, making the results more suitable for design use.

2. Method

We consider a relatively concise form of shape representation: the wireframe. A 3D model's wireframe is its outer contour, much like a sketch or a skeleton, outlining the original model's shape with relatively simple lines. We first extract the model's wireframe and then reconstruct the surface based on it to generate a simplified model that emphasizes feature representation. The process is as follows:

- 1) First, we extract the crest lines (feature curves) from the model surface[1], which are the geometric features of the model.
- 2) The first step often extracts many insignificant features, so we apply three filters—based on length, curvature, and fitting error to obtain a model that only retains significant features (Fig. 1a).
- 3) Extension starts from the endpoints of curves. First, we identify the endpoint P_0 , which may not lie on the mesh, and project it to the nearest mesh vertex V_0 and its 1-ring neighbors are the optional directions (Fig. 2a). Then we evaluate costs and select the optimal V_1 as the candidate direction (Fig. 2b) and push it into a priority queue, the candidate directions of all endpoints will be

maintained in the priority queue. The cost includes the angle of extension and the magnitude and direction of curvature, so that the extended curve is smooth and remains in the feature-significant area. When dequeued, extend by connecting (V_0 , V_1), and treat V_1 as the new endpoint P_0 (Fig. 2c). Extensions are iteratively performed until closure is achieved to form a wireframe (Fig. 1b).

- 4) Finally, the simplified wireframe is used to reconstruct the surface through triangulation[2] (Fig. 1c).

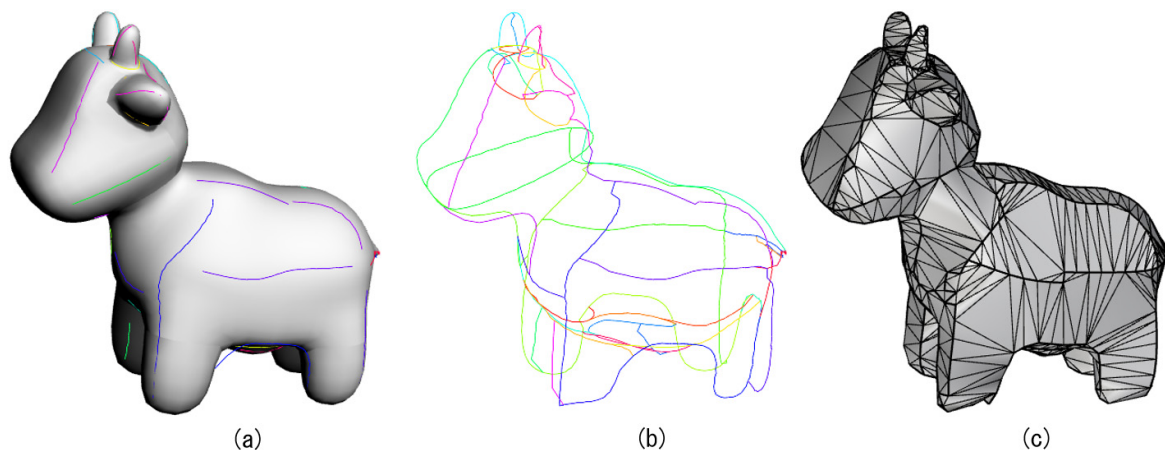


Fig. 1: (a) The main features detected on the surface. (b) The wireframe model. (c) Triangulation result.

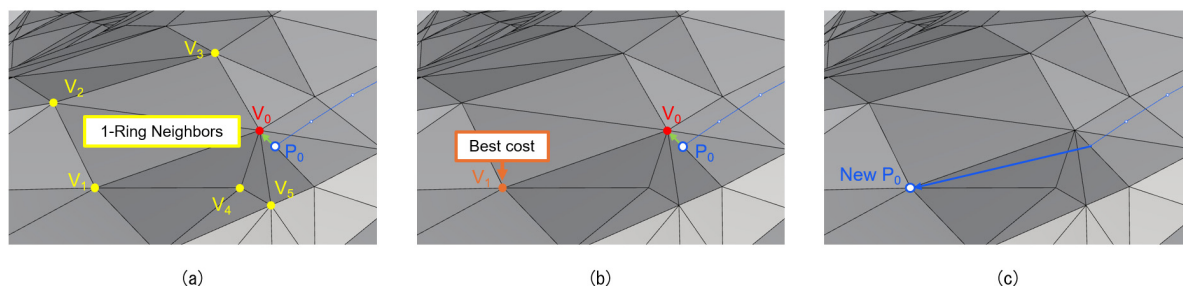


Fig. 2: An example of one extension step.

3. Conclusion and Future Work

In this research, we developed a feature-based model reconstruction method to make input models suitable for papercraft design. In the future, we plan to incorporate more design principles and provide user interaction to further enhance the quality of the design.

References

- [1] S. Yoshizawa, A. Belyaev and H. P. Seidel, Fast and robust detection of crest lines on meshes, in: Proceedings of the 2005 ACM symposium on Solid and physical modeling, pp. 227-232, 2005.
- [2] M. Zou, T. Ju and N. Carr, An algorithm for triangulating multiple 3d polygons, in: Computer Graphics Forum, Vol. 32, Wiley Online Library, pp. 157-166, 2013.

ガウス球上のトレース図による円錐特異点を含む離散可展面のインタラクティブモデリング

Interactive Modeling of Discrete Developable Surfaces with Conical Singularities Using Trace Diagrams on the Gaussian Sphere

堀内 宏輔 (Kosuke HORIUCHI)¹, 三谷 純 (Jun MITANI)²

^{1,2} 筑波大学 (University of Tsukuba)

e-mail : s2429652@u.tsukuba.ac.jp

1 はじめに

可展面は伸縮しない一枚のシートを曲げたりねじったりして作られる曲面であり、直線要素である ruling の軌跡で表現される。可展面の基本的性質として、ガウス曲率が常にゼロであることが挙げられる。折り紙は代表的な可展面の例であるが、従来の折り目を使う手法に加えて、折り目を付けずにくぼみ（円錐特異点）を作ることで局所的に曲率を集中させる手法（折り目なし）がある。折り目なしは、特異点付近に曲率を集中させることで複雑な形状を生成可能である。折り目なし可展面を計算機上でインタラクティブに設計可能にすることは、デジタルアーカイブや解析、アート作品の創作を支援すると期待される。しかし、既存の CAD ソフトウェアでは、円錐特異点を含む可展面を直感的に操作しながら設計し、可展性を厳密に保つことは難しい。

2 手法

本研究ではガウス球上のトレース図 [1] を用いたインタフェースを提案する。トレース図は表面法線の挙動を球面上に可視化し、各頂点付近の曲率分布を示す。また、円錐特異点では表面が微分不可能となるが、トレース図を用いることで、円錐特異点周りの曲率を表現することができる。可展面に対するトレース図の重要な性質として、囲まれた符号付き面積の総和がゼロになることがあり、これを拘束条件として利用する。ユーザは事前定義された円錐特異点を含む可展面のトレース図を編集することで所望の形状になるように設計し、システムはトレースの長さや角度をリアルタイムで最適化し、拘束条件を保つ。所望の形状を作成後、システムは折り線パターン（展開図）を出力する。

2.1 ガウスのトレース図

図 1 について、+ 記号は辺が凸、- 記号は辺が凹であることを示す。また、 A, B, C, D は経辺同士のなす角でありセクター角と呼ばれる。立方体において赤い辺で B, C をセクター角に持つ 2 面の法線ベクトル同士のなす角が $\pi/2$ となっており、これをガウス写像すると大円弧になる。この大円弧をトレースという。したがってトレースの長さが 2 面角の大きさに相当し、トレースの折れ曲がる角度が、セクター角に相当する。また、トレースで囲まれた面積がガウス曲率を示し、時計回りなら正、反時計回りなら負となる。可展面上の任意の点についてはガウス曲率は 0 でありセクター角の和は 2π となる。そのため、図 1 の可展面のトレース図において、左右の面積を足し合わせると 0 となる。

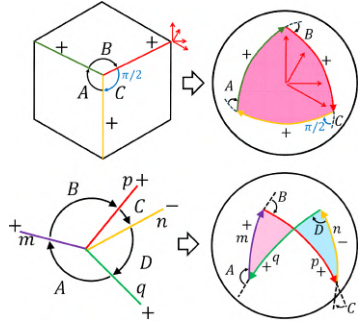


図 1. 立方体と可展面におけるトレース図

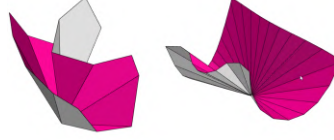


図 2. 設計した形状

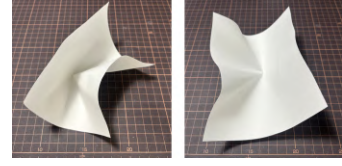


図 3. 設計形状を再現した紙

2.2 トレース図の面積計算方法

トレースに囲まれた面積を計算するために、球面上の符号付き面積計算を行う。離散化展面のトレース図を構成する N 個の単位長頂点ベクトル列 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, $\|v_i\| = 1$ に対して、重心 \bar{v} を計算し、 \bar{v} に最も近い頂点を基準頂点 v_{i_0} とする。基準頂点 v_{i_0} を共通頂点とする三角形分割をして、符号付き面積 $A(V)$ を計算する。

$$A(V) = \sum_{k=1}^{N-2} T(v_{i_0}, v_{i_0+k}, v_{i_0+k+1})$$

$$T(v_{i_0}, v_{i_0+k}, v_{i_0+k+1}) = 2 \arctan \left(\frac{\det(v_{i_0}, v_{i_0+k}, v_{i_0+k+1})}{1 + v_{i_0} \cdot v_{i_0+k} + v_{i_0+k} \cdot v_{i_0+k+1} + v_{i_0+k+1} \cdot v_{i_0}} \right)$$

2.3 面積の最適化方法

ユーザがトレース図を編集した後、編集直後の頂点配置 $V^0 = \{v_i^0\}$ を保持しつつ、面積誤差をゼロに近づける最適化を行う。目的関数は以下のように設計する。

$$E(V) = \alpha (A(V))^2 + \beta \sum_{i=1}^N \|v_i - v_i^0\|^2 + \gamma \sum_{i=1}^N (\theta_i - \theta_i^0)^2$$

ここで、 α, β, γ はそれぞれ面積誤差項、移動量ペナルティ項、角度保持ペナルティ項の重みである。

3 結果

トレース図の描画、編集、最適化、展開図の作成機能を Unity 上に実装し、可展面の設計を行った。また設計形状が、実際に紙で再現できることを検証した。最適化処理によりトレースに囲まれた符号付き面積を 0 に近づけることで、可展面の制約を保ちながら設計をすることができた。実際に紙で再現した際も紙が破れることなく設計形状を作成することができた。設計形状と紙で再現したものを図 2, 3 に示す。

参考文献

- [1] D. Huffman, Curvature and Creases: A Primer on Paper, IEEE Trans. on Computer, Vol. C-25, No. 10, pp. 1010–1019, 1976.

Parametric Design Tools for 3D Curved-Origami Shapes in Conceptual and Prototype Architectural Design

Aida Safary¹, Jun Mitani²,
^{1,2}University of Tsukuba, Japan
e-mail: s2330170@.tsukuba.ac.jp

1 Overview

This research develops digital parametric tools for 3D origami-based architectural elements that enable users to change the geometric features of the designed shapes and explore other design options. The first project is about the One-Fold digital module, which is originally made by Patkau Architects {1}, allowing users to create architectural shelters from a single folded plane. The next research project is the parametric design of David Huffman's elliptical fold structures, with the ability to change the size, fold angle, and rotation. The methodology of this research is to apply quad mesh geometry by using a similar approach to the additive algorithm technique. Our final project is to recreate a physical model of the One-Fold project with a different material and compare the physical and digital models using 3D scanning, Elastica curve evaluation, and RMSE surface error analysis. The goal of our research is to bring curved-crease origami designs into CAD settings for architectural usage.

2 Methodology

Our research started by making a geometric design tool for One-Fold, a type of curved origami that consists of only a single fold inside the structure (see Figure 1(a)). We used a custom parametric system to create a digital model of a 3D origami shape consisting of a single fold. This system lets users easily change and modify geometric features of folded shapes, including the size, length, fold angle, and apex movement through various input options {2}. In the second study, we reviewed David Huffman's Design with ellipses, which is a classic example of curved-crease origami (see Figure 1(b)). By studying related journal papers that examined the fabrication of a physical model of the mentioned ellipse {3}, we suggested a parametrized method for redesigning this shape with various geometric parameters to be changed by the users in the folded and unfolded state in the Grasshopper Environment, using a similar approach to the additive algorithm method {4}.

The third and current stage of this research involves evaluating the translation of digital origami forms into physical models. A prototype was fabricated to test the structural feasibility and geometric accuracy of a digitally designed One-Fold-based surface. Using 3D scanning and Root Mean Square Error (RMSE) calculations via Cloud-

Compare software, we compared the digital model to its physical counterpart. The analysis confirmed a close correspondence between the two, validating the digital model's predictive capability. Moreover, the curvature of the structural framework made of flexible rods was observed to align with the principles ofastica Curves, which define the equilibrium states of elastic materials (see Figure 1(c)).

3 Conclusion

This study integrates the outcomes of these three studies to offer a comprehensive approach to origami-based architectural geometry from algorithmic design and mathematical modeling to physical prototyping and evaluation. The results demonstrate not only the feasibility of folding-based design systems but also their potential for real-world architectural applications.

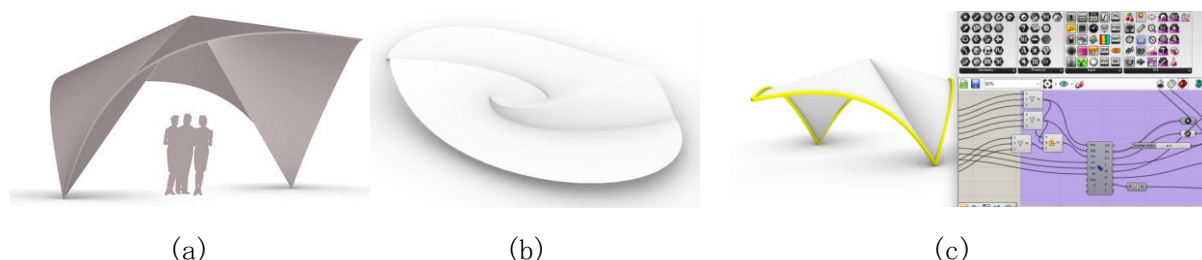


Figure 1. (a). Render of the One-Fold digital model, (b). Render of Huffman's ellipse digital model, (c). Render of Elastica Curves generated by the related Grasshopper script.

References

- [1] Patkau Architects, One Fold, <https://www.patkau.ca/projects/one-fold>.
- [2] Aida Safary, Hamid Shafieasl, and Jun Mitani, Geometric Design Tool for One-Fold, a Curved Origami with a Single Fold, *Journal for Geometry and Graphics*, 28 (2024), 089-101.
- [3] Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, and Duks Koschitz, Reconstructing David Huffman's Legacy in Curved-Crease Folding, in: *Proc. of Origami 5*, Vol. 5, pp. 39-52, 2011.
- [4] Aida Safary, Hamid Shafieasl, and Jun Mitani, Parameterized Folded State Shape Modeling of David Huffman's Ellipse, *Journal for Geometry and Graphics*, 28 (2024), 199-212..