

折り紙の folded state における local stacking order を表す幾何的 object とその応用

Geometric Objects Representing Local Stacking Order in Folded States of Origami and Their Applications

村井 紘子 (Hiroko Murai)¹

¹ 奈良女子大学 (Nara Women's University)

e-mail : murai@cc.nara-wu.ac.jp

1 概要

折り紙の数学的定式化が Demaine-O'Rourke [1] により与えられている。筆者は日本応用数理学会 2024 年度年会 [2] において、1 次元折り紙の特殊な folded state 及び folding motion に対しては、より簡明な形で記述できることに注意し、[1] の定義を少し修正することにより、folding motion における stacking の変位を表す $P \times P \times [0, 1]$ 内の幾何的 object (: graphic と呼ぶ) を定義した。本稿では 2 次元折り紙 P の flat folded state に対して graphic の定義を拡張し、その性質を述べる。さらにその性質を用いることにより、ある展開図が平坦折り可能でないことを簡潔に証明できることを紹介する。

2 準備

P を \mathbb{R}^3 内の向き付け可能 2 次元多様体とし、 C を P に埋め込まれた 1 次元複体、つまり P 内の有限個の頂点と、いくつかの頂点を結ぶ線分から成る集合とする。ただし \mathbb{R}^3 には標準的な向きが入っているとす。このとき組 (P, C) を 2 次元折り紙の **crease pattern** といい、 $P \setminus C$ の各成分を (P, C) の **face** と呼ぶ。 C の各成分に山折り M または谷折り V が割り当てられているとき、この割り当てを $\mu : C \rightarrow \{M, V\}$ で表し、三つ組 (P, C, μ) を 2 次元折り紙の山谷の情報付き **crease pattern** という。 f を P から \mathbb{R}^3 への piecewise- C^2 級写像とし、 $f(P)$ には横断的な自己交差がなく、 f の singular set が C に含まれており、 $f(P)$ が内在的距離に関して P と isometric であるとする。 P から \mathbb{R}^3 への連続写像 f が **piecewise-rigid** であるとは、 (P, C) の各 face F に対し、 F と $f(F)$ が合同であり、 $f(F)$ が \mathbb{R}^3 内のある平面上にあるときにいう。 (P, C) が f の **canonical crease pattern** であるとは、 C がこのような定義を満たす集合の中で最も小さいときにいう。Piecewise-rigid な f が **flat** であるとは、 $f(P)$ が \mathbb{R}^3 内のある平面上にあるときにいう。以下では f は flat であるとする。

$P \times P$ の部分集合 $S(f)$ を次で定める: $S(f) := \{(p, q) \in P \times P \mid p, q \notin \partial P \cup C, p \neq q, f(p) = f(q)\}$. (このとき、定義より直ちに $(p, q) \in S(f) \Leftrightarrow (q, p) \in S(f)$ がわかる。) P の向きを 1 つ固定する。 P_1, P_2, \dots, P_m を $P \setminus (\partial P \cup C)$ の成分とし、各 P_i に P の向きから誘導される向きを入れておく。 $\forall p \in P \setminus (\partial P \cup C)$ に対し、 $n(f(p))$ を $f(p)$ における $f(P)$ の長さ 1 の法線ベクトルとする。

定義 1 $(P, C), f$ を上の通りとし、 f は flat であるとする。 λ を $P \times P$ から 3 点集合 $\{1, -1, *\}$ への写像で以下の 1)~ 4) を満たすものとする。このとき写像の組 (f, λ) を P の **flat folded state** という。また λ を **local stacking order** という。

1) $\lambda(p, q) = * \Leftrightarrow (p, q) \notin S(f)$.

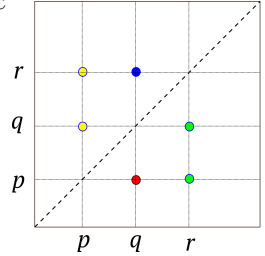
- 2) $S(f)$ の任意の元 (p, q) に対し, $\lambda(q, p) \mathbf{n}(f(p)) = -\lambda(p, q) \mathbf{n}(f(q))$ が成り立つ.
- 3) $(p, q), (q, r)$ を $S(f)$ の元とする (この時 (p, r) も $S(f)$ の元となる). $\lambda(q, p) = -\lambda(q, r)$ ならば $\lambda(p, r) = \lambda(p, q)$ である.
- 4) (p, q) を $S(f)$ の元とする. (p, q) を含む $S(f)$ の弧状連結成分の任意の点 (p', q') に対し, $\lambda(p', q') = \lambda(p, q)$ が成り立つ.

定義 2 2次元折り紙の山谷の情報付き crease pattern (P, C, μ) が平坦折り可能であるとは flat folded state (f, λ) で, (P, C) がその canonical crease pattern であり, C の各成分に対し μ の指定通りの山谷で折られている (: 定義は割愛) ものが存在するときをいう.

定義 3 (P, C) を 2次元折り紙の crease pattern とし, (f, λ) をその flat folded state とする. このとき $P \times P$ の部分集合 $G(f, \lambda)_+, G(f, \lambda)_-, G(f, \lambda)$ を次のように定める. $G(f, \lambda)_+ := \{(p, q) \in P \times P \mid \lambda(p, q) = 1\}$, $G(f, \lambda)_- := \{(p, q) \in P \times P \mid \lambda(p, q) = -1\}$, $G(f, \lambda) := G(f, \lambda)_+ \cup G(f, \lambda)_-$. $G(f, \lambda)$ を (f, λ) の **graphic** と呼ぶ.

命題 4 2次元折り紙の任意の flat folded state (f, λ) に対し, その graphic $G(f, \lambda)$ は次を満たす.

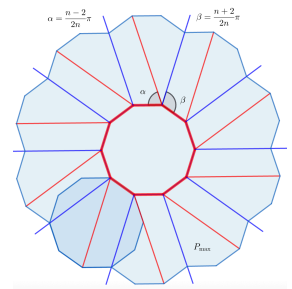
- 1) $(q, p) \in G(f, \lambda)_\pm$ かつ $(q, r) \in G(f, \lambda)_\mp$ であるような任意の $p, q, r \in P$ に対し, $((p, q), (p, r) \in G(f, \lambda)_- \text{ または } (p, q), (p, r) \in G(f, \lambda)_+)$ かつ $((r, p), (r, q) \in G(f, \lambda)_- \text{ または } (r, p), (r, q) \in G(f, \lambda)_+)$ が成り立つ.
- 2) $G(f, \lambda)$ の各弧状連結成分は $G(f, \lambda)_+, G(f, \lambda)_-$ のいずれかに含まれる.



注意 5 $G(f, \lambda)_+$ の点を赤, $G(f, \lambda)_-$ の点を青で描くことにすると, 命題 4 1) は, (q, p) と (q, r) の色が異なるならば, (p, q) と (p, r) は同じ色, (r, p) と (r, q) は同じ色であることを表す (右図参照. ただし黄色と緑はそれぞれ赤または青であることを表す).

2次元折り紙の平坦折り可能性に関して次の定理が成り立つが, 特に $(\mathbb{R}^2, C, \mu)|_{P'}$ が平坦折り可能でないことを示すのに graphic とその性質を用いるのが有効である. 具体的には $(\mathbb{R}^2, C, \mu)|_{P'}$ が平坦折り可能であると仮定し, その graphic の性質を考察することにより命題 4 に矛盾することがわかることを紹介する.

定理 6 正 $n (\geq 6)$ 角形から得られる右図の展開図 (図は $n = 10$ のとき) を (\mathbb{R}^2, C, μ) とする. 正 n 角形の各辺に中心の正 n 角形のコピーを貼り合わせて得られる, 図の領域 P_{\max} に対し $(\mathbb{R}^2, C, \mu)|_{P_{\max}}$ は平坦折り可能であり, P_{\max} を真部分集合として含む任意の領域 P' に対し, $(\mathbb{R}^2, C, \mu)|_{P'}$ は平坦折り可能でない.



謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP22K03313, JP23K03231 の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] Erik D Demaine, Joseph O'Rourke, Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedra. Cambridge university press, 2007.
- [2] Hiroko Murai, 1次元折り紙の folding motion に対応する local stacking order の変化の様子を表す幾何的 object の提案, 日本応用数学会 2024 年度年会講演予稿集, 2024.

立体化するねじり折りの双安定性に与える自己交差の影響

Bistability of Non-Flat Twist Origami under Self-Intersection Constraints

豊岡 龍弥 (Ryuya Toyooka)¹, 館 知宏 (Tomohiro Tachi)²

^{1,2}東京大学 (Graduate school of Arts and Sciences, The university of Tokyo)

e-mail: tykryu@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

はじめに ねじり折りは剛体折不可能な折紙の1つであり、展開状態と折状態の2つで安定となる双安定性を示すパターンである。Langらは、可展かつ平坦折可能なねじり折りについて解いている[1]。ここで、セクター角を変化させると、双安定状態に加えて、折りの進展に伴ってパネル間で大域的な自己交差（ブロッキング）が発生することが知られている。Foschiらは、双安定状態と自己交差状態が同じ折角で発生するような場合を配置空間を用いて解析しているが、構成される4価頂点の2つのセクター角を固定した状態でのみ解かれている[2]。

本研究では、セクター角を1つのみ固定し、Foschiらの検討したパターンを拡張する。これによって双安定状態と自己交差状態が異なる折角で発生する場合について、パラメータごとにまとめる。さらに、ユニットの中央が正方形から平行四辺形に拡張した時に、2種類の4価頂点でそれぞれ配置空間を評価することで、折状態を設計することを試みる。

ねじり折りパターンの拡張 図1はねじり折りのユニットセルを示している。また、パラメータを展開角 α 、辺長比 γ 、ねじり角 θ 、補正角 δ_u, δ_v と定義する。対称性から向かい合う折角が同じであると仮定し、2方向の折角 ρ_u, ρ_v について、Foschiらによる折角の理論式を用いて配置空間を1つのグラフ上に図示する。

まず、正方形の場合($\alpha = 90^\circ, \gamma = 1$)について考える。簡単にするために $\delta_u = \delta_v = \delta$ とおき、頂点構成を1種類のみに絞る。この条件から、パラメータ $\{\theta, \delta\}$ を変化させながら双安定状態と自己交差状態の関係を解析する。

図2において、赤と青のパスはそれぞれ折角 ρ_u, ρ_v の配置空間を表している。双安定状態は、構造にひずみが発生しない剛体折可能 ($\rho_u = \rho_v$) のパス上にあるため、配置空間との交点が双安定状態である。自己交差は、隣接するパネル同士（隣接ブロッキング）と、向かい合うパネル同士（対面ブロッキング）があるため、それぞれが発生する状態をプロットした。境界内は自己交差が発生せず、2領域の交差は折状態が存在する解空間となる。

図3は、 $\{\theta, \delta\}$ を変化させたときの配置空間である。折状態における挙動によって a~e の5

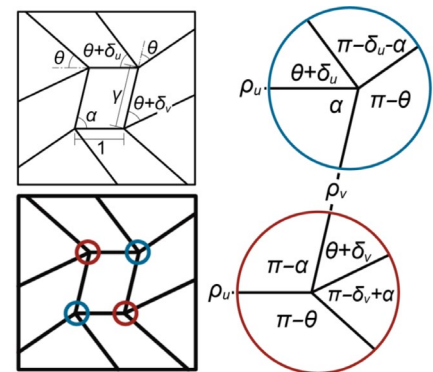


図1 ユニットセルと4価頂点の構成

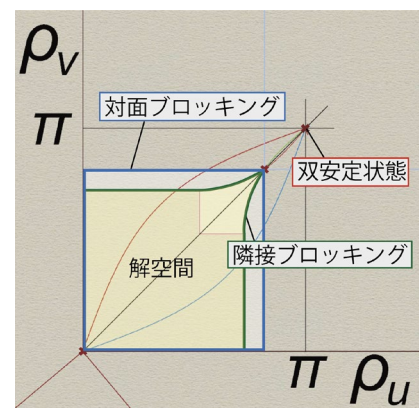


図2 折角の配置空間と、双安定状態および自己交差状態の領域図

つに分類することが出来る。それぞれ、

- a: 解空間内に双安定状態があり、自己交差が発生するよりも前で安定となる。
- b: 平坦折り・双安定・自己交差状態が同一折角で同時に発生する。
- c: 折りが 180 度まで進むが、パネルにはひずみが溜まっており平坦折状態と異なる。双安定状態が初期状態のみで、e と異なりロッキング状態で安定とならない。
- d: 平坦折不可能だが、双安定状態と自己交差状態が同時に発生する。
- e: 自己交差状態の先に双安定状態があるため、自己交差状態においてより折りが進展する方向にパネル同士が動き、隙間なく空隙を埋めようとする。

といった特徴を持つ。実際の模型では、スプリングバックによって双安定状態の折角が低下してしまうが、双安定状態の手前で自己交差する場合は、双安定状態への内部応力がスプリングバックの影響を解消し、自己交差状態で安定性を示す。e の折状態はこの性質を示している。また、双安定状態と自己交差状態の配置空間上の距離によっておおまかに自己交差状態におけるパネルのひずみを評価できる。

長方形($1 < \gamma$)や平行四辺形

($\alpha < 90^\circ, 1 < \gamma$)へと拡張することで、構成可能なねじり折が増える。図 4 のようなパラメータの調節によって、安定なロッキング状態の制御が可能であると考えられる。

謝辞 本研究は JSPS の特別研究員奨励費、JST ASPIRE JPMJAP2401、および学術変革 24H00822 からの支援を受けています。

参考文献

- [1] LANG, Robert J. *Twists, tilings, and tessellations: Mathematical methods for geometric origami*. AK Peters/CRC Press, 2017.
- [2] FOSCHI, Riccardo; HULL, Thomas C.; KU, Jason S. Explicit kinematic equations for degree-4 rigid origami vertices, Euclidean and non-Euclidean. *Physical Review E*, 2022, 106.5: 055001.

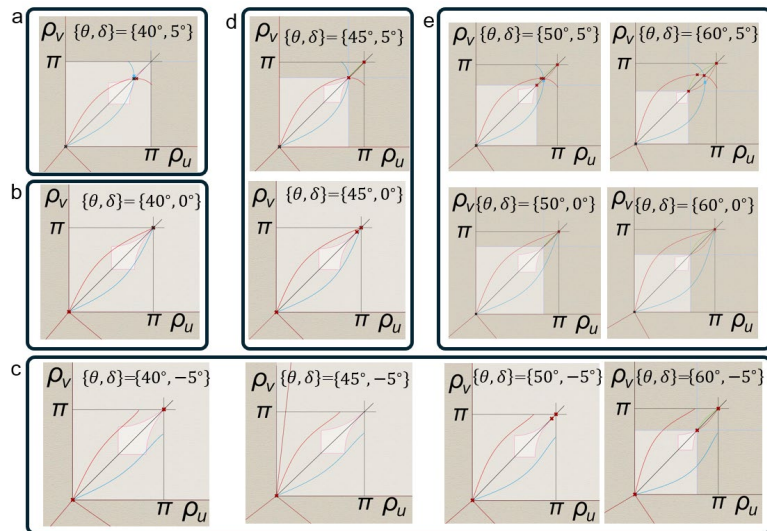


図 3 $\{\theta, \delta\}$ を変化させたときの配置空間。折状態における構造的性質を a~e の 5 種類に分類することができる。

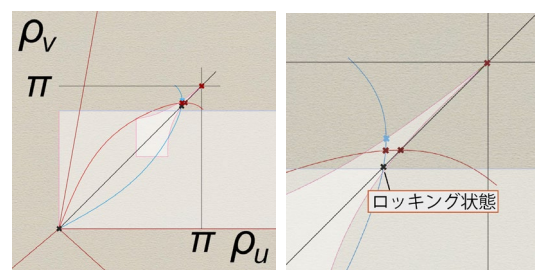


図 4 平行四辺形状態における安定なロッキング状態の設計

天の川切紙のモード分岐における弾性モデルと角度バネモデルの比較

Comparison of Elastic Model and Angular Spring Model in Mode Bifurcation of Ribbon Kirigami

安達 瑛翔 (Akito Adachi)¹, 河原 慶嗣 (Keishi Kawahara)²,

岩瀬 英治 (Eiji Iwase)², 館 知宏 (Tomohiro Tachi)¹

¹ 東京大学 (The University of Tokyo), ² 早稲田大学 (Waseda University)

e-mail : adachiakito8w@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

■イントロダクション 七夕飾りの天の川と呼ばれる切紙は、材料の弾性変形範囲で全体構造を大きく伸長するため、ウェアラブルデバイスなどへの応用が期待される。スリットのないシートの面内変形に対し天の川が面外座屈によって大きく伸びるとき、大別してシートの法線で回転対称なモード、同じく法線で回反なモード (図 1(b)), 回転対称と回反が混ざったモードが存在する [1]。Yang et al. [1] はスリットのパラメータを変えて、実験と有限要素法により座屈モードを調べている。Kawahara et al. [2] は天の川の一行を取り出し、折り目を与えて切り折紙化し、引張試験により回転対称モードと回反モードが現れることを確かめている。即ち、スリットパラメータによっては引張のみでキリガミハニカム [3] と同相の切紙を得られる。

変形モードにおいてつり合い状態の経路を考え、その外力について平面状態への極限がゼロでない場合、この変形モードは座屈モードであり外力の極限值が座屈荷重 F_{cr} として理解できる。天の川を平面状態から準静的に引っ張るとき、座屈荷重が最小のモードで座屈することが期待される。Yang et al. [1] は弾性モデルで回転対称モードと回反モードの座屈荷重を比較している。我々は天の川に折り目を与えて剛体切り折紙とし、各折り目のエネルギーが折り目の長さ、折り角度の二乗に比例する角度バネモデルで座屈荷重を比較した。弾性モデルと角度バネモデルとではスリットパラメータに対する座屈荷重の概形が異なる (図 2(a), (b))。

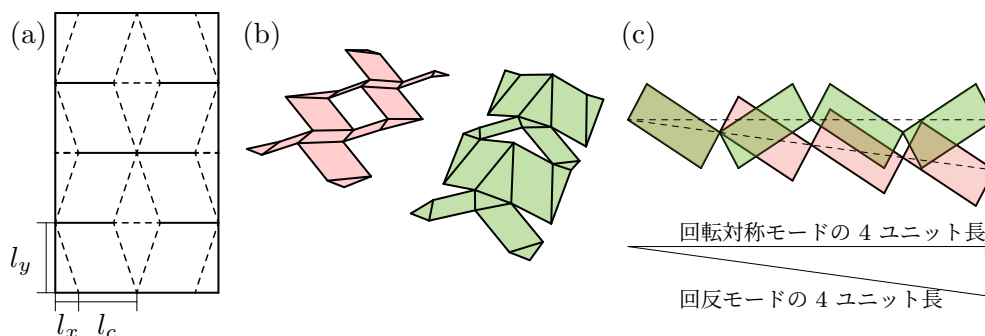


図 1. 折り目を持つ天の川. (a) 展開図 (b) 回転対称モード (緑), 回反モード (赤) の変形状態 (c) 横から見た図.

■角度バネモデルの修正 ヤング率を E , 断面二次モーメントを I とする。Yang et al. [1] に習い、天の川の回反モードは S 字に曲がる滑り支持の折り目からなり、回転対称モードでは加えて tape spring の折り目を持つとする。単純な曲げでは、折り目が幅 w を持つとして、バネ剛性は EI/w である。滑り支持では板長 L に対し $w = L/6$ の角度バネが両端にあるとみなす。Tape spring では直

交方向に同じ曲率で鞍型に曲がっている [4]。曲率の内，ポアソン効果による分はエネルギーに含まれないことを考慮すると，直交するそれぞれのバネ剛性はポアソン比 ν を用いて $\frac{EI}{(1-\nu)w}$ である。角度バネモデルのバネ剛性を以上のように修正し，S 字曲げ部分の長方形への近似 [1] を用いると，引張による歪みとエネルギーがそれぞれ一致する。ただし図 2(c) では長方形への近似は行っていない。

■座屈荷重の比較 Yang et al. [1] の実験パラメータで座屈荷重の大小を比較したところ，Yang らの弾性モデルでも角度バネモデルでも，常に回反モードの座屈荷重が小さく，実験で観察されるモード選択が起こらないことがわかった (図 2)。この状況を幾何学的に説明するために，滑り支持の変形が同じ二つの座屈モードを横から見た状態を比較する (図 1(c))。回転対称モードは tape spring のエネルギーが付加された上で回反モード以上に伸びていることはないので，外力は常に回反モードより大きい。実験で確かめられている設計パラメータによるモード選択は，幾何学的な曲げバネでは説明できず，材料のポアソン比や曲率集中など，今回無視した現象に着目したより詳細なモデルが必要である。

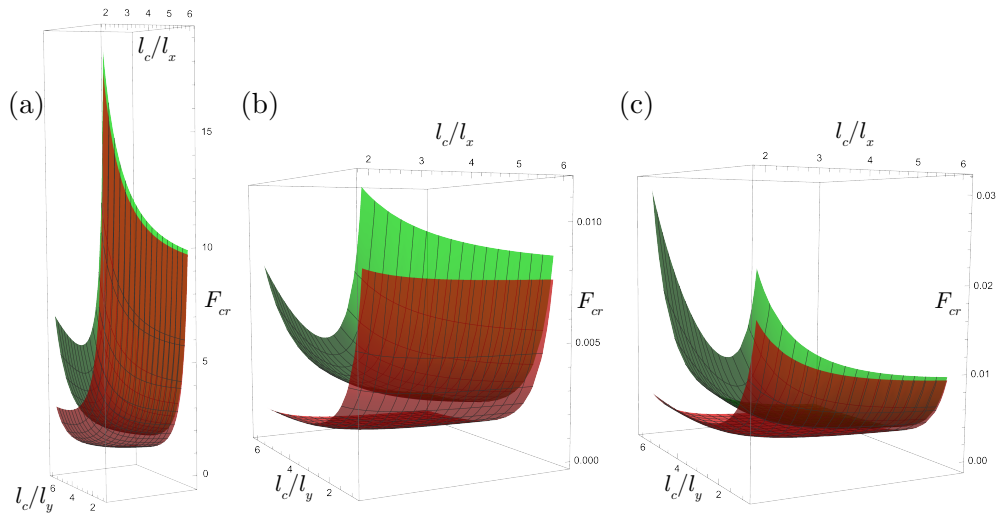


図 2. 座屈荷重の回転対称モード (緑) と回反モード (赤) の比較. (a) 角度バネモデル (b) 弾性モデル (c) 修正角度バネモデル. スリット長 $l_c = 15.2$, (b)(c) においてヤング率 $E = 3.5$, ポアソン比 $\nu = 0.38$, 紙厚 $h = 0.127$ として計算。

謝辞 この研究は科研費 22H04954 切り紙構造が誘起する折り紙構造の学理創出とデバイス実証の助成を受けています。

参考文献

- [1] Yi Yang, Marcelo A. Dias, and Douglas P. Holmes, Multistable kirigami for tunable architected materials, *Phys. Rev. Mater.*, Vol. 2, Issue 11 (2018), 110601.
- [2] K. Kawahara, N. Nakamura, S. Ikezawa, K. Saito, and E. Iwase, Fabrication of DCRA using Kiri-origami Structure, *Proc. of 8OSME*, 未発行, 2024.
- [3] 斉藤 一哉, 野島 武敏, 任意断面を持つハニカムコアの展開図設計法, *日本機械学会論文集A編*, 2012, 78 巻, 787 号, p. 324-335
- [4] K. A. Seffen and S. Pellegrino, Deployment dynamics of tape springs, *Proc. R. Soc. A*, Vol. 455, pp. 1003–1048, 1999.

Exploration of the mountain-valley assignments of rigid origami tessellations

Léo Wichlacz¹, Tomohiro Tachi¹

¹The University of Tokyo

e-mail : leo.wchlcz@gmail.com, tachi@idea.c.u-tokyo.ac.jp

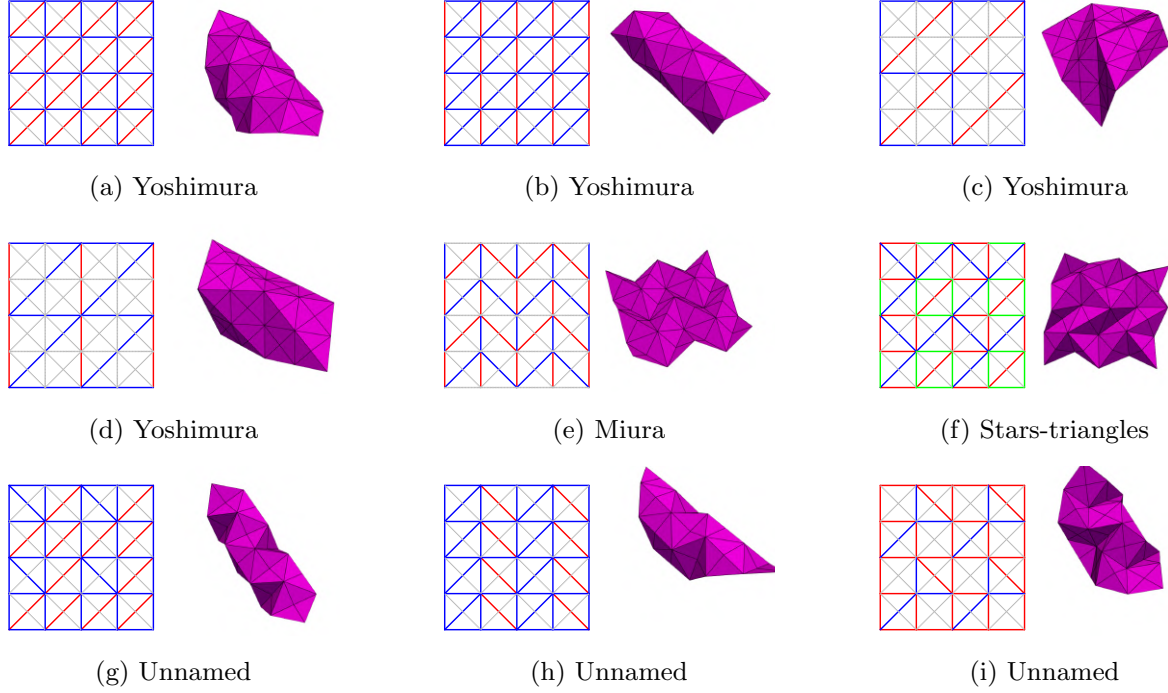


図 1: 2×2 -periodic assignments of the box pleating pattern. Mountain - Valley - Either - Deactivated

■ **Mountain-valley assignments and global kinematics** A mountain-valley assignment is a primary instruction to achieve a folding from a flat crease pattern, either by hand or for more complex folding techniques like self-folding [1]. From the plane configuration, the same crease pattern can adopt different mountain-valley assignments and realize different shapes and functions. This idea was used by Hawkes et al. to design a reconfigurable foldable system [2], using the box pleating pattern.

Several, but not all, mountain-valley assignments can be kinematically compatible with a crease pattern with rigid folding conditions. Understanding which assignments result in valid foldings and the types of shape they produce is crucial for both the theoretical study and practical applications of origami. In this work, a numerical method for exploring the compatible mountain-valley assignments of a crease pattern, in particular, origami tessellations, is presented.

■Numerical exploration method An angular model is adopted, i.e., a folding is represented by a vector whose components contain the folding angle of each crease, with compatibility equations given by paper closing conditions around each vertex [3], including rigid folding conditions. The exploration is limited to assignments accessible directly from the plane configuration which we believe includes all the assignments with fold angles smaller than π . Usual 1st order methods fail to give significant results. The exploration then consists in testing the compatibility of a family of trial assignments by comparing the assignments with the result of the projection on the configuration space of a corresponding small finite perturbation in the parameter space.

The method has at least exponential complexity. However, the running time can be reduced by reducing the trial family with global compatibility observations (e.g., assignments for which all creases adjacent to a vertex are mountains (resp. valleys) are not compatible), or with pattern-specific compatibility observations.

■Application to the box pleating pattern The box pleating pattern has degenerate parts which reduce the behavior of a 4-crease system to the behavior of a 1-crease system. The degeneracy is used to reduce the assignments tested for the numerical exploration method.

The method was applied to the box pleating pattern with periodicity consisting of the repetition of 4 unit squares arranged in a 2×2 fashion. Periodic conditions help unveiling global kinematics while keeping a low number of edges, hence reducing the running time. Apart from trivial assignments, the exploration method unveiled several compatible assignments for the 2×2 -periodic box pleating pattern, including known famous tessellation (1a,1b,1c,1d,1e,1f,) but also foldings that, to the best of our knowledge have not been yet been named (1g,1h,1i). With bigger periods, other foldings are found, a lot of which can be seen in Huffman's [4] and Fujimoto's [5] work.

参考文献

- [1] K. Narumi, K. Koyama, K. Suto, Y. Noma, H. Sato, T. Tachi, M. Sugimoto, T. Igarashi and Y. Kawahara, Inkjet 4D Print: Self-folding Tessellated Origami Objects by Inkjet UV Printing., ACM Trans. Graph. 42, 4, (2023)
- [2] E. Hawkes, B. An, N.M. Benbernou, H. Tanaka, S. Kim, E.D. Demaine, D. Rus and R.J. Wood, Programmable matter by folding, in: Proc of Natl. Acad. Sci. U.S.A., Vol. 107 (28), pp. 12441-12445, 2010.
- [3] S. Belcastro and T. Hull, Modelling the folding of paper into three dimensions using affine transformations, Linear Algebra and its Applications, Vol. 348 Issues 1–3 (2002), 273-282
- [4] S. Fujimoto, Solid Origami, Self-published, 1976
- [5] E. Davis, E.D. Demaine, M. L. Demaine and J. Ramseyer, Reconstructing David Huffman's Origami Tessellations, Journal of Mechanical Design 135, no. 11 (2013), 111010.