

引っ張り圧縮混合型シェルの形状決定と主応力線による分割

Form-finding of tension-compression mixed shells and their subdivision based on principal stress lines.

三木 優彰 (Masaaki Miki)¹

¹東京大学 (The University of Tokyo)

e-mail: masaakim@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

1 概要

本報では SIGGRAPH ASIA 2022 に採択された論文[1]と SIGGRAPH 2024 に採択された論文[2]で述べたシェル構造の形状決定手法について完結にまとめる。提案した手法を用いると引っ張り圧縮混合型シェルの形状決定を正しく行えるとともに、共役応力ネットでありかつ共役曲率ネットであるような特別なグリッド—2重共役グリッド—の存在を保証することができる。本手法の解は建築における大空間構造物の1形態であるグリッドシェルの設計に直ちに応用可能である。また、Schaefer-Gurtin 応力関数を用いた新しいアイデアについても言及する。この新しいアイデアにより、[2]で述べた手法では計算に失敗する複雑な境界形状を持つ例題も安定して解けるようになる。(図 1)

2 シェルの釣り合い

発散が零となるような応力テンソル S^{ij} が与えられたときシェルの鉛直方向の釣り合いは

$$S^{ij}H_{ij} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\rho$$

と書ける。 $z(\theta^1, \theta^2)$ がシェルの各点の高さを表しているとき、 $H_{ij} = \nabla_{ij}z$ である(つまり曲率)。右辺は単位面積当たりの自重である。発散が0となるような応力テンソルはAiryの応力関数を $\phi(\theta^1, \theta^2)$ とおいたとき、 $S^{ij} = \bar{\epsilon}^{ik}\bar{\epsilon}^{jl}\nabla_{kl}\phi$ として得ることができる($\bar{\epsilon}^{ij}$ は投影平面上の置換テンソル)。この微分方程式は右辺の非線形項はともかく基本的に双線形型である。双線形連立方程式の解法としてVarPro(変数射影法)が既に確立している。これは本来微分方程式の解法として開発されたものではないが、著者等が[1]で双線形型微分方程式を安定的に解けると指摘した。また、2つの未知関数 (z, ϕ) に対して条件が1本なので広大な解空間が存在し、よほど性質の悪い条件を付加しない限り解の存在は常に期待してよい。そのため釣り合い式が双曲型となる引っ張り圧縮混合型についてもあっさり解けてしまう。

2 揃える条件

著者等が揃える条件と呼んでいるのは次式で与えられる微分方程式である。

$$h_{ij}\bar{E}^{jk}H_{kl} = \text{symm.}$$

h_{ij} は応力テンソルを90度回転させたもので $h_{ij} = \nabla_{ij}\phi$ である。 \bar{E}^{ij} は 2×2 の半正定値対称行列である。この方程式を解くと、3つの行列について同時に共役であるような方向の存在が保証された2枚の曲面が得られる。これを2重共役曲面と呼び、そのような共役方向をトレースして作ったグリッドを2重共役曲面と呼んでいる。2重共役曲面上の'揃った'共役方向は \bar{E}^{ij} を90度回転させた行列 $e_{ij} = \bar{\epsilon}_{im}\bar{\epsilon}_{jk}\bar{E}^{mk}$ についても共役である。例えば、 \bar{E}^{ij} として第一基本計量の逆行列 g^{ij} を選ぶと、2重共役グリッドはシェルの曲面の主曲率線となる。また

シェル of xy 平面への投影から作った第一基本計量の逆行列 \bar{g}^{ij} を用いると、2 重共役グリッドは xy 平面へ投影したとき直交グリッドとなる。より一般の \bar{E}^{ij} を仮定すると、そのような行列を第一基本計量に持つような曲面に投影したとき直交グリッドとなる。

本方程式も双線形型なので、釣り合い式と共に連立して VarPro により安定的に解くことができる。しかし、2 つの未知関数 (z, ϕ) に対して条件が 2 本となってしまったので解空間は狭いかもはや存在せず、[2] では単純な形状しか解けず、複雑な境界形状の場合失敗することがあると報告している。

2 新しい応力関数

Schaefer と Gurtin は独立に Airy の応力関数は発散を零とするような応力場の全体を完全にはカバーできず、新しい応力関数を追加することで完全にカバーすることができると指摘した。具体的には 2 つの調和関数 ξ, η を用いて

$$b_i = \partial_i \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, b_{ij} = b_i \cdot \bar{g}_j, q_{ij} = b_{ij} + b_{ji} - (b_{\alpha\beta} \bar{g}^{\alpha\beta}) \bar{g}_{ij}$$

と計算し、 $h_{ij} = \nabla_{ij} \phi$ を $\nabla_{ij} \phi + b_{ij}$ に置き換える。こうすることで [2] で解くのに失敗した複雑なトポロジーを持つ例題も安定的に解けるようになる。(図 1)

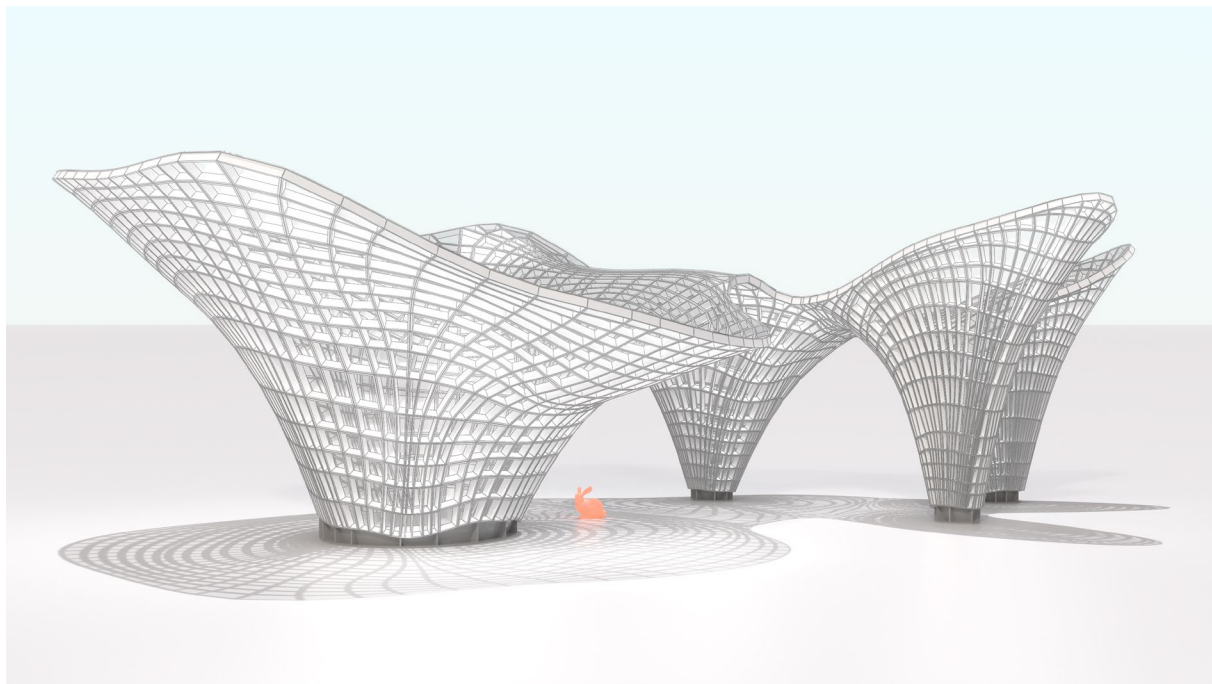


図 1: 提案手法により設計したグリッドシェルの CG によるレンダリング。

参考文献

- [1] Miki, M., and Mitchell, T. 2022. Interactive exploration of tension-compression mixed shells. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 41(6), Article 263
- [2] Miki, M., and Mitchell, T. 2024, Alignment conditions for NURBS-based design of mixed tension-compression grid shells. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 43(4), Article 81

ラプラシアンを明示的に考慮した強化学習エージェントによる 三角形分割されたシェル構造の施工順序最適化

Construction sequence optimization of triangulated shell structures using a reinforcement learning agent explicitly considering Laplacian

林 和希 (Kazuki Hayashi)¹, 大崎 純 (Makoto Ohsaki)¹,

¹京都大学 (Kyoto University)

e-mail: hayashi.kazuki@archi.kyoto-u.ac.jp

1 序

建築構造物の施工計画において、これまで多くのスケジューリング最適化手法が提案されてきたが、人工知能と構造物の幾何学的特性を組み合わせる建設作業効率を向上させる研究はほとんど存在しなかった。近年の機械学習技術の中でも、特にコンピュータグラフィックス分野において発展しつつある幾何学的深層学習モデルは、複雑な形状に対して実用レベルの複雑な分類・回帰を行うための有意な幾何学的情報を抽出する能力を有する。

本研究では、著者らによる既往研究^[1]を基に、仮設支持部材に作用する反力の最小化を目的として、三角形パネルからなるシェル構造の組立て順序を最適化する。パネルの形状および接続関係をメッシュで表現し、メッシュの **cotan-Laplacian** を明示的に考慮しながらシェルの幾何学的特徴を抽出する。さらに、組立て時の構造安定性に対する各パネルの寄与度を正確に推定するため、多様な構造形状を学習用材料とした強化学習によってモデルを訓練する。

2 メッシュのラプラシアンを考慮したパネルの組立順序推定および訓練手法

シェル構造の形を表す三角形メッシュにおいて、各節点の支配面積を対角行列で表した質量行列を **M**, **cotan-Laplacian** 行列を **L** とする。さらに、節点の支配面積, 恒久的なピン支持位置を判別するバイナリ値, 仮設支持の要否を判別するバイナリ値, そして **Heat Kernel Signature (HKS)**^[2] からなる節点ごとの入力ベクトル **u** を定義する。HKS はある点に擬似的に加えた熱の拡散を利用して記述された、その点の局所的な幾何情報であり、剛体変換に対して不変というメリットがある。熱の拡散方程式とのアナロジーによって節点の特徴量を伝播させる **DiffusionNet**^[3] と呼ばれる方法が提案されており、特徴量の更新式は以下のように表せる。

$$h_t(\mathbf{u}) = (\mathbf{M} + t\mathbf{L})^{-1}\mathbf{M}\mathbf{u} \quad (1)$$

t は特徴量を伝播させる時間ステップを表す非負の連続変数であり、各節点サイズ 128 の特徴ベクトルが生成されるよう、128 個の独立な時間ステップを設定する。DiffusionNet では Eq. (1) による特徴量更新を 4 回繰り返し、さらに各三角形要素での平均値をとることで、メッシュの幾何学的特徴量を考慮した三角形パネルの特徴ベクトル $\hat{\mathbf{u}}$ を計算する。

特徴ベクトルの各要素について、全パネルの和を計算したベクトルを $\hat{\mathbf{u}}_\Sigma$ とする。現状態からパネルを除去する行動価値 Q への変換は次式で行う。

$$Q(\hat{\mathbf{u}}) = -|\mathbf{w} \circ [\hat{\mathbf{u}}; \hat{\mathbf{u}}_\Sigma] + \mathbf{b}| \quad (2)$$

\mathbf{w} は $\hat{\mathbf{u}}$ と $\hat{\mathbf{u}}_\Sigma$ を結合したベクトル $[\hat{\mathbf{u}}; \hat{\mathbf{u}}_\Sigma]$ に対する重みづけパラメータ, \mathbf{b} はバイアス項である。

多様な三角形メッシュと支持条件をランダムに生成し、部材を逐次的に除去するシミュレ

ーションを行いながら強化学習によって行動価値を正しく推定するようエージェントの訓練を行う。部材除去過程における仮設支持の位置は剛性行列の固有値解析によって決定する。部材を除去するごとに与える報酬は、仮設支持に作用する反力の L_2 ノルムの総和に -1 を乗じた値とする。強化学習において変化させる訓練パラメータは t , \mathbf{w} , \mathbf{b} の3種類である。訓練後は、強化学習モデルが推定した部材除去プロセスの逆順を施工順序として利用する。

3 学習結果

1000種類のランダムなシェル構造を用いて、GPUを搭載した汎用PCで13.7時間かけて強化学習エージェントを訓練した結果を図1に示す。仮設支持の数なるべく減らすためにある支持点から別の支持点までを繋ぐように部分構造を優先的に架ける施工シーケンスが得られており、直感に適った合理的な施工順序をエージェントが推定できることを確認した。

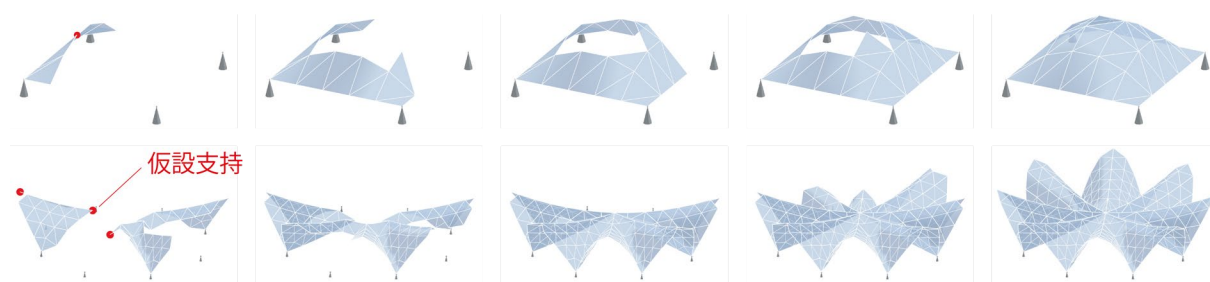


図1: 訓練した強化学習モデルが推定した部材施工順序

4 結論

膨大な組合せが存在する三角形パネルの施工順序の中から仮設支持に作用する反力が小さくなる順序を効率的に探索するため、ラプラシアンを用いた幾何学的深層学習モデルおよび強化学習を複合したアプローチを提案した。より詳細な報告は文献^[4]を参照されたい。

謝辞 本研究はJSPS 科研費 JP24K17392, および文部科学省令和元年度科学技術人材育成費補助事業 L-INSIGHT の援助を受けたものである。

参考文献

- [1] K. Hayashi, M. Ohsaki and M. Kotera, “Assembly sequence optimization of spatial trusses using graph embedding and reinforcement learning,” *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 63, pp. 232-240, Dec. 2022.
- [2] J. Sun, M. Ovsjanikov and L. Guibas, “A concise and provably informative multi-scale signature based on heat diffusion,” *Proceedings of the Eurographics Symposium on Geometry Processing*, Berlin, Germany, Jul. 15-17, 2009.
- [3] N. Sharp, S. Attaiqi, K. Crane and M. Ovsjanikov, “DiffusionNet: Discretization agnostic learning on surfaces,” *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 41, issue 3, no. 27, pp. 1-16, Mar. 2022.
- [4] K. Hayashi and M. Ohsaki, “Geometry-aware reinforcement learning for assembly sequence optimization of shells composed of triangular panels,” in: Proc. of IASS 2025 (to be appeared).

弾性測地線シザーズによる曲面展開機構の設計とシミュレーション

Design and Simulation of Deployable Surface Mechanisms using Elastic Geodesic Scissors

西本 清里 (Seri Nishimoto)¹, 舘 知宏 (Tomohiro Tachi)²¹ 東京大学大学院工学系研究科 (Graduate School of Engineering, The University of Tokyo),² 東京大学総合文化研究科 (Graduate School of Arts and Sciences, The University of Tokyo)

e-mail : s-nishimoto@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

■概要 弾性部材を回転ヒンジで接続して得られるグリッドシェルのうち、部材が測地線に沿う測地グリッドシェルは、面内変形自由度が1の曲面展開構造であり、展開後の形状をプログラムできる利点を持つ [1]。著者らは過去の研究において、構造を複数のユニットに分割する手法を提案し、目的形状から逆算して設計する方法を考案した [2]。しかし著者らの提案した既存モデルでは各ユニットが平面に拘束されており、部材の曲げや捩り剛性は考慮されていなかった。

本稿では、部材の剛性を取り入れたモデル化手法を新たに提案し、それに基づいた設計およびシミュレーション手法を示す。材の曲げ・捩り剛性、ユニット間の曲げ伝達を表現できる本モデルにより、設計自由度が広がるとともに、つり合い形状の解析や展開過程における歪エネルギーの変化の把握が可能となった。提案モデルは設計とシミュレーションの両方に用いることができる簡易なモデルであり、形状のスタディ段階に有用である。

■モデルの概要 薄板状の部材は面内方向と面外方向で異なる剛性を持つ。そこで面の方向を表す法線（ピボット法線および端点法線）を新たな変数として導入した。バーヒンジモデルを用い、動的緩和により釣り合い形状を得るシミュレーションモデルを構築した。実装には Rhinoceros、grasshopper 及び Kangaroo2 を使用している。

拘束条件は次のとおりである (図 1b)。[] は Kangaroo2 の Goals 名を示す。①直線ばね：各バーの長さ L を一定に保つ。強さ EA/L 。[Length(line)]。②面内曲げばね：ピボット法線とバーからなる三角形面間の2面角を 180° に保つ。面内剛性を表現。強い拘束 [Hinge]。③面外曲げばね：法線とバーの間の角度を直角に保つ。面外剛性を表現。強さ $EI/(L/2)$ 。④捩りばね：各バー両端の法線のうち、バーに垂直な成分どうしを互いに平行に保つ。捩り剛性を表現。強さ GJ/L 。

なお曲げ剛性 EI 、捩り剛性 GJ はそれぞれ任意に設定可能である。また、ユニット端点の面外曲げばね拘束を除去することで、ユニット間で曲げを伝えない球ジョイントによる接続を再現できる。

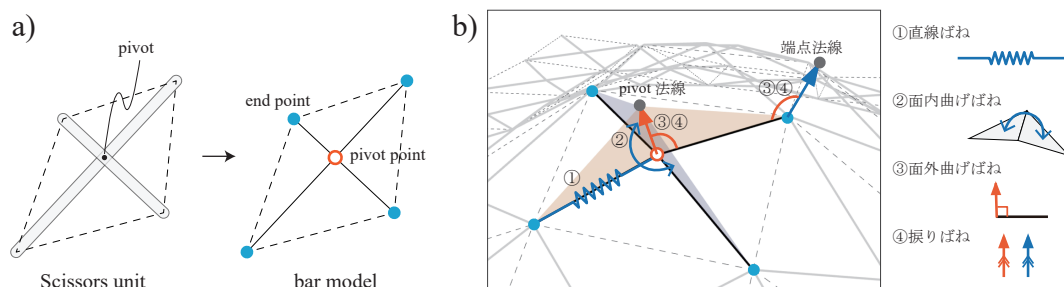


図 1. モデルの概要。a) シザーズユニットのバーによる表現。b) 拘束条件。

■**設計** 目的曲面に展開可能な機構の設計システムを構築した。目的曲面および、平坦状態・立体状態それぞれのバーの初期配置を入力とする。上記の直線ばね拘束の代替として、平坦状態と立体状態間で同一の辺が等長となる拘束 ([EqualLength]) を与えることで両状態間の形状変形可能性を保証する。さらに、立体状態においては頂点が目的曲面上に、平坦状態では平面上に配置されるよう、それぞれに対応する拘束 ([OnMesh]、[OnPlane]) を設定することで、平面から目的曲面への展開機構を設計する。本手法を用いて実際に設計し製作したモデルを図 2b に示す。

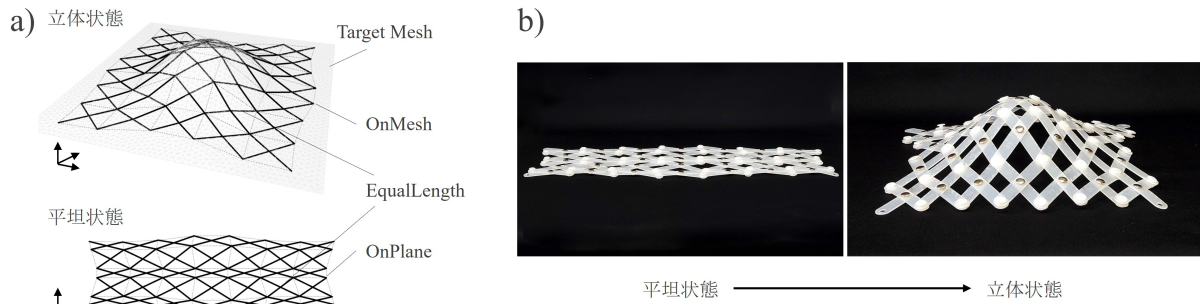


図 2. a) 設計のための拘束条件。b) 制作した物理モデル。

■**シミュレーション** 機構の展開挙動を再現するためのシミュレーションシステムを実装した。前述の拘束に加えて、ユニット辺に弱い直線ばね拘束を付与し、その自然長を変化させることで展開を作動させる (図 3a)。なお、ユニット辺の長さは次のように得られる。展開のパラメータを t (平坦状態を $t = 0$, 立体状態を $t = 1$) としたとき、中間状態におけるユニットの開き角 θ_t は $\cos \theta_t = t(\cos \theta_{t=1} - \cos \theta_{t=0}) + \cos \theta_{t=0}$ となる。この θ_t と各バーの長さから、時刻 t におけるエッジ長を計算する。展開シミュレーションの結果を図 3b に、そのときのバーと法線の角度に基づいて曲げ・振りそれぞれについて算出した歪エネルギーを図 3c に示す。

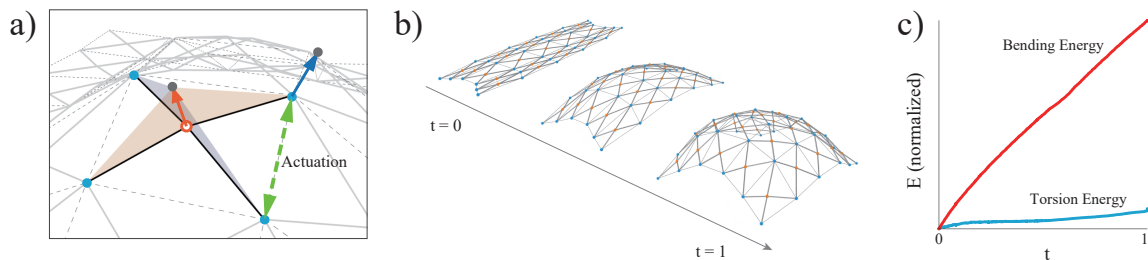


図 3. a) エッジ長による展開挙動の制御。b) 展開シミュレーション結果。c) 展開動作中の歪エネルギーの変化。

謝辞 本研究は JST ASPIRE JPMJAP2401、科研費 22H04954、24KJ0637 の助成を受けたものです。有益な討議をいただいた N. Toyonaga 博士と L. Mahadevan 教授に感謝します。

参考文献

- [1] Pillwein, Stefan, et al., On elastic geodesic grids and their planar to spatial deployment, ACM Trans. Graph. 39, 4, Article 125 (August 2020), 12 pages.
- [2] S. Nishimoto and T. Tachi, Transformable Surface Mechanisms Based on Bending-active Scissors Structures, Journal of the IASS, Vol. 65 (2024) No. 4, 268–276.

剛体折紙ユニットを用いた平坦折り可能なトーラスとマスト構造

Flat-foldable torus and mast structures formed by rigid origami units

早川 健太郎 (Kentaro Hayakawa)¹, 松尾 孝太郎 (Kotaro Matsuo)², 大崎 純 (Makoto Ohsaki)³

¹ 日本大学 (Nihon Univ.), ² 東京大学 (Univ. Tokyo), ³ 京都大学 (Kyoto Univ.)

e-mail : hayakawa.kentaro@nihon-u.ac.jp

1 はじめに

近年、折紙の工学的応用において非可展、筒状など1枚の紙を折るだけでは作ることのできない構造も提案されており [1], 筆者らは、8つの直角二等辺三角形パネルをヒンジで環状につないだ折紙ユニットからなる平坦折り可能なトーラス・マスト構造を提案している [2]。図1(a)のトーラス構造はユニットを面で「接着」して構成される。さらに、このトーラス構造を「積み上げる」ことで図1(b)の直線状のマスト構造を構成できる。本稿では、提案構造の剛体折り機構と折畳経路を数値解析で示し、力学的性質の一端を明らかにするため、panel-pin モデルの接線剛性行列の固有値解析を行う。

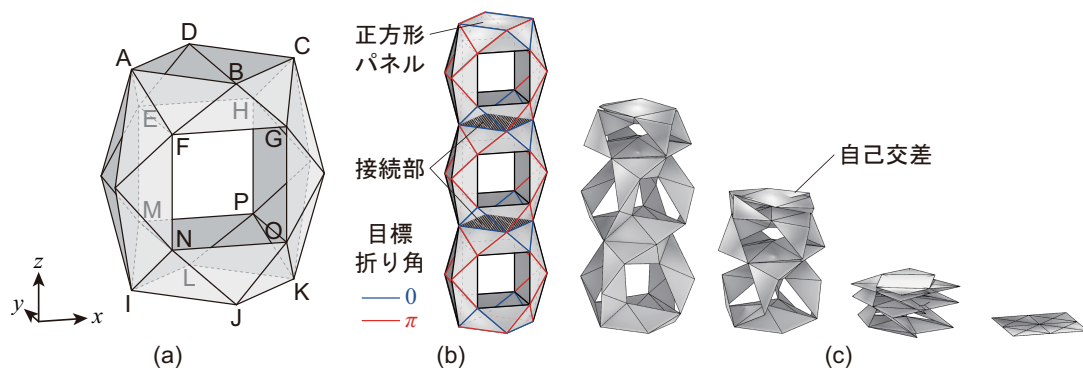


図1. (a) トーラス構造と (b) マスト構造の概観, および (c) マスト構造の剛体折りによる折畳過程

2 剛体折りメカニズムと折畳経路の数値解析

折紙ユニット (図1(a)の頂点A-Hなど) を4個接続したトーラス構造を頂点A-D, I-Lがそれぞれ正方形をなす状態で積み上げてマスト構造を構成する。本稿では直角二等辺三角形パネルの斜辺の長さを2とする。Panel-pin モデルを用いた微小変形メカニズムの解析 [3] より、トーラス構造間の接続部はマスト構造全体の微小変形メカニズムにおいて正方形から変形しないことが示される。また、図1(a)で頂点A-D, I-Lの相対変位をそれぞれ正方形から変形しないよう拘束すると、トーラス構造は1自由度の微小変形メカニズムをもつ。よって、図1(b)のようにマスト構造の上下端に正方形パネルを追加すると、トーラス構造はそれぞれ独立に1自由度メカニズムをもち、マスト構造全体の微小変形メカニズムの自由度は内部のトーラス構造の数と等しくなる。

次に、Panel-pin モデルに Li の手法 [4] を適用し、図1(b)の目標折り角に向かって剛体折りによる折畳経路を追跡する。経路解析ではパネルの重心の並進と回転を独立変数とし、隣接パネルの頂点での離間量が各座標軸方向成分 1×10^{-9} 未満、合わせて $\sqrt{3} \times 10^{-9}$ 未満になるよう変位の遷移を予測子-修正子法で求める。このとき、図1(c)のように剛体折りと十分見なせる変形経路で目標の平坦折り状態を実現できたが、その過程では自己交差が発生した。したがって、実際に剛体折り可能なのはパネルの接触が生じるまでの範囲であり、それ以降はパネル等の変形が必要であるといえる。

3 マスト構造の接線剛性行列の固有モード

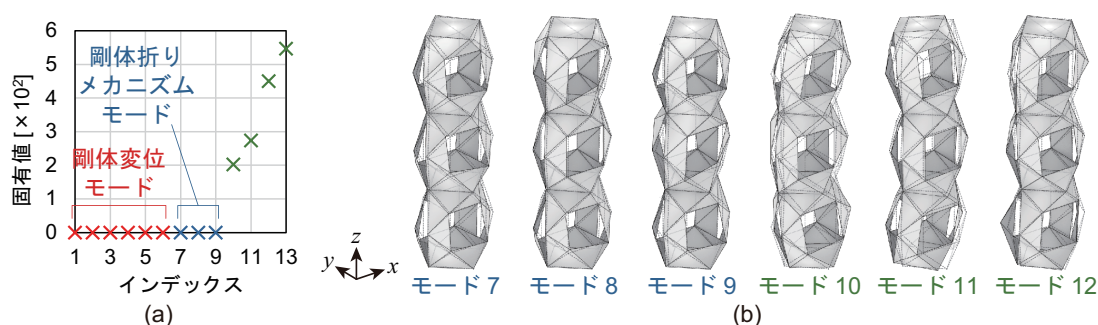


図 2. (a)Panel-pin モデルの接線剛性行列の固有値, (b) 剛体折りメカニズムモード (7–9) と非剛体折りモード (10–12)

文献 [5] の手法を用い, 3 個のトーラス構造をもつマスト構造の接線剛性行列の固有値解析を行った。接線剛性行列の固有値は構造物の“変形しにくさ”を表し, 最小から 13 番目までの固有値の値を図 2(a) に示す。本稿では構造の支持条件を与えなかったため, 構造全体が変形せず移動する剛体変位モードに対応する 6 個の固有値と, 剛体折りメカニズムモードに対応する 3 個の固有値がほぼゼロとなっている。図 2(b) のモード 7–9 は剛体折りメカニズムに対応し, トーラス構造が捩じられる変形を示している。一方, モード 10–12 の変形は非剛体折りで, 対応する固有値は図 2(a) のように剛体折りメカニズムモードに対応する固有値と比較してかなり大きい値をとっている。モード 10, 11 はそれぞれ y 軸, x 軸に平行な軸まわりにマスト構造全体を曲げるような変形を示しており, 対応する固有値はモード 12 に対応する固有値と比較して $1/2$ から $2/3$ 程度であることから, モード 12 のトーラス構造が個別に変形するような変形よりも生じやすい変形モードであることが期待される。

4 結論

本稿では, マスト構造の剛体折りメカニズムの自由度が内部のトーラス構造の数と等しいことと, 自己交差を無視した場合の平坦折り状態への折畳経路を示した。また, 構造物の剛性の指標となる接線剛性行列の固有値解析を行い, 剛体折りメカニズムモード以外ではマスト構造全体を曲げるような変形が生じやすいことを示した。

謝辞 本研究は JST CREST JPMJCR1911 および JSPS 科研費 JP25K17726 の助成を受けた。

参考文献

- [1] D. Misseroni, P.P. Pratapa, K. Liu, B. Kresling, Y. Chen, C. Daraio, and G.H. Paulino, Origami engineering, Nat. Rev. Methods Primers, Vol. 4, Article 40, 2024.
- [2] K. Hayakawa, K. Matsuo, and M. Ohsaki, Flat-foldable torus and mast structures of rigid-foldable ring units, in: Proc. APCS 2025, p. 349, 2025.
- [3] K. Hayakawa and M. Ohsaki, Panel-pin model for kinematic and equilibrium analysis of rigid origami, J. Int. Assoc. Shell and Spat. Struct., Vol. 64, No. 4, pp. 278–288, 2023.
- [4] Y. Li, Motion paths finding for multi-degree-of-freedom mechanisms, Int. J. Mech. Sci., Vol. 185, Article 105709, 2020.
- [5] K. Hayakawa and M. Ohsaki, Rigid- and flat-foldable grid origami structure exhibiting bifurcation of mechanism in non-flat state, Int. J. Solids Struct., accepted.