

折り畳みと展開が結合した折紙チューブによる弾性・音響のメタマテリアル

Elastic and acoustic metamaterials via coupling of folding and unfolding origami tubes

富田 直 (Sunao Tomita)¹, 野村 壮史 (Tsuyoshi Nomura)¹, 舘 知宏 (Tomohiro Tachi)²

¹ 株式会社豊田中央研究所 (Toyota Central R&D Labs., Inc.),

² 東京大学 (The University of Tokyo)

e-mail : stomita@mosk.tytlabs.co.jp

■概要 折紙構造はその折り畳みパターンによって機能をプログラム可能とし工学応用が期待される。キネマティクスを利用した特異な波動現象や、格子の変化による調整可能性が挙げられ、ミウラ折りに代表される折紙テッセレーションが、弾性波 [1] や音波 [2] のバンド構造の変化を引き起こすために用いられている。一方で、一般的な剛体折紙では、均一な収縮や膨張がテッセレーション構造中で生成されるが、収縮と膨張が混在するようなテッセレーション構造を用いて引き起こされるバンド構造の変化を議論した研究例は、著者らの知る限り存在しない。本講演では、断面配向が直交する折紙チューブを交互に連結するミウラ折チューブ [3] によって生成される折り畳みと展開が結合するミウラ折りのキネマティクスについて解説し、折紙チューブ自体を伝わる弾性波がキネマティクスとカップリングすることで発生する現象のほか、折紙チューブの内部空間に伝わる音波のトポロジカル状態の転移現象についても報告する。

■折り畳みと展開の結合 断面配向が直交する折紙チューブを交互に連結するミウラ折チューブにより、展開（チューブの伸長）と折り畳み（チューブの収縮）が連動するキネマティクス（図 1）を生成することができる。このキネマティクスは、ふたつのミウラ折チューブがチューブの軸まわりに回転して角度 φ を共有して連結することで、チューブの伸長/収縮が打ち消しあう運動が生じる。共有される断面の角度 φ は、 $[90^\circ - \alpha_r, \alpha_{nr}]$ の範囲で制限され、ここで、 α_r と α_{nr} はそれぞれ、回転したミウラ折チューブと回転していないミウラ折チューブの平行四辺形の内角である。

■バンド構造 前節で導入したシステムを用いた折り変形によるバンド構造変化の一例として、チューブ内の音波に関する結果を図 2 に示す。この例では、青いチューブと赤いチューブの長さの比を 1:2 に設定している。まず、 $\varphi = 36^\circ$ のときには、長いミウラ折りのチューブが折り畳まれており、約 40Hz に大きなバンドギャップが開く。 φ の増加にともない、長いチューブが展開され、短いチューブが折り畳まれると、バンドギャップの幅が小さくなり、約 $\varphi = 50^\circ$ でギャップが閉じる。さらに φ を増加させると、 $\varphi = 54^\circ$ では、長いチューブが完全に展開され、短いチューブが折り畳まれて再度ギャップが開く。図 2 の下部に、ギャップの上下端のモードを示すとおり、折り畳みの過程で偶モードと奇モードが反転しており、音響系のバンド反転 [4] が折り畳みによって誘発されている。

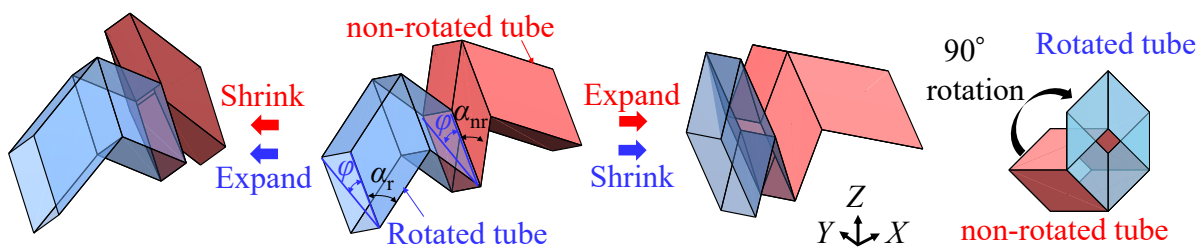


図 1. 断面配向が直交するミウラ折チューブの形状と変形

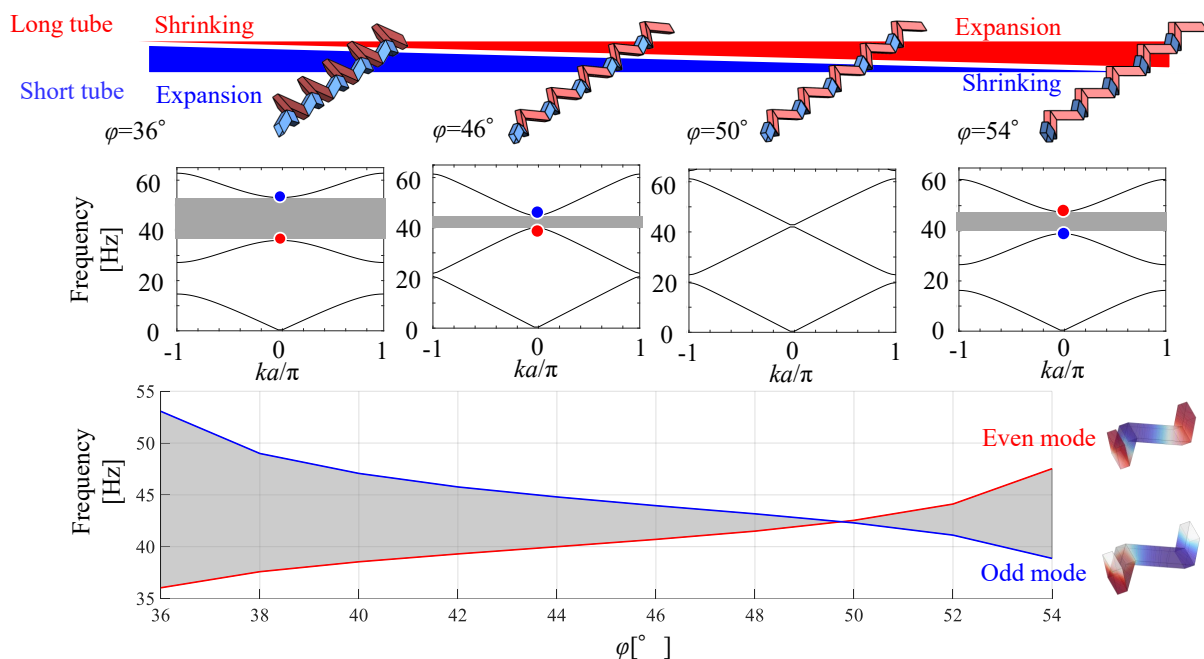


図 2. ミウラ折りの辺長の比が 1:2 の系における変形が誘発するバンド図の変化

参考文献

- [1] P. P. Pratapa, P. Suryanarayana, G. H. Paulino, Bloch wave framework for structures with nonlocal interactions: Application to the design of origami acoustic metamaterials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 118 (2018) 115–132.
- [2] M. Thota, S. Li, K. W. Wang, Lattice reconfiguration and phononic band-gap adaptation via origami folding, *Physical Review B* 95 (6) (2017) 064307. doi:10.1103/PhysRevB.95.064307.
- [3] S. Tomita, T. Tachi, Tunable wave coupling in periodically rotated miura-ori tubes, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 382 (2283) (2024) 20240006. doi:10.1098/rsta.2024.0006.
- [4] M. Xiao, G. Ma, Z. Yang, P. Sheng, Z. Q. Zhang, C. T. Chan, Geometric phase and band inversion in periodic acoustic systems, *Nature Physics* 11 (3) (2015) 240–244. doi:10.1038/nphys3228.

無限に長い曲線を短くする

Shortening infinite-length curves

三浦 達哉 (Tatsuya Miura)¹, Fabian Rupp²

¹ 京都大学 (Kyoto University), ²University of Vienna

e-mail : tatsuya.miura@math.kyoto-u.ac.jp

1 概要

曲線の変形を記述する幾何学的発展方程式（幾何学流）は様々な分野で広く研究されている．その中でも**曲線の長さを減らす**効果を伴う勾配流として得られる幾何学流は多くあり，例えば二階放物型方程式である曲線短縮流 (curve shortening flow) を始め，表面拡散流 (surface diffusion flow) や弾性流 (elastic flow) などの高階放物型方程式もよく知られている．勾配流として得られる方程式の解の時間大域挙動の解析には，付随するエネルギー等式がしばしば重要な役割を果たす．

しかしながら，上記の幾何学流の方程式を，例えば \mathbf{R} 上のグラフ曲線のように**無限に長い曲線**について考える場合，当然長さ汎関数の値は無限大となるため，通常の意味のエネルギー等式は破綻する．もちろん放物型方程式の解であることに変わりはないので，局所解の構成や小さい初期値からの大域解の解析を行うことは可能である．また，平面内の曲線短縮流であれば，最大値原理を用いて解の漸近挙動の解析が可能であることも知られている [1]．一方で，空間曲線の場合や高階の方程式については，種々の最大値原理が破綻することもあり，無限に長い曲線の解の時間大域挙動の解析には基本的な道具が欠如しているという状況であった．

ここで今回の研究 [2] の主結果の概略を述べる． \mathbf{R}^n 内の曲線 γ に対する長さ汎関数 $L[\gamma] := \int_{\gamma} ds$ に対応する新しいエネルギーとして，単位ベクトル $e_1 \in \mathbf{R}^n$ を基準とした**方向エネルギー**

$$D[\gamma] := \frac{1}{2} \int_{\gamma} |\partial_s \gamma - e_1|^2 ds$$

を定める．すぐにわかる通り，もし $L[\gamma] = \infty$ であっても， γ の接方向が無限遠で e_1 に十分近ければ $D[\gamma] < \infty$ となる．例えば滑らかな関数 $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ が $u(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{4}-\varepsilon}$ のように $u' \in L^2 \cap L^\infty$ を満たすならば， u のグラフ曲線は有限の方向エネルギーを持つ．更に，最も重要な観察として， L と D は実は modulo null Lagrangian で等号が成り立つ (cf. [3]) ため，標語的に述べると，

長さ汎関数と方向エネルギーは同じ勾配流を定める

という命題が一般に成立する．これにより「長さ汎関数によるエネルギー等式を用いた解析を，方向エネルギー有限の範囲で無限長曲線にも拡張可能とした」というのが我々の主結果の概略である．

以下では曲線短縮流と弾性流に焦点を当て，具体的にどのような帰結が得られるかを紹介する．

2 曲線短縮流

滑らかなはめ込み曲線の one-parameter family $\gamma = \gamma(x, t) : I \times [0, T) \rightarrow \mathbf{R}^n$ (ただし $n \geq 2$, I は \mathbf{S}^1 または区間) が次の方程式を満たすとき，曲線短縮流であるという．

$$\partial_t \gamma = \kappa. \quad (\text{CSF})$$

ここで $\kappa := \partial_s^2 \gamma$ は曲率ベクトルである．この方程式は長さ汎関数 L の L^2 -勾配流として得られることが知られており，特に I がコンパクトかつ適切な境界条件の下では $L[\gamma(\cdot, t_2)] =$

$L[\gamma(\cdot, t_1)] - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\gamma(\cdot, t)} |\kappa|^2 ds dt$ というエネルギー等式が成り立つことが知られている．よって特に $T = \infty$ の場合は $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\gamma(\cdot, t)} |\kappa|^2 ds = 0$ が導かれ、極限が線分になることが従う [1]．このような証明の手法を D を用いて無限長の場合にも拡張したのが我々の主定理の一つである．

以下では $I = \mathbf{R}$ とし、 $\sup_{\mathbf{R}} |\partial_x^m \gamma_0| < \infty$ ($m \geq 1$) かつ $\inf_{\mathbf{R}} |\partial_x \gamma_0| > 0$ とする．

定理 1 ([2]) 初期曲線 $\gamma_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ が $D[\gamma_0] < \infty$ を満たすならば、 $\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0$ となる曲線短縮流 (CSF) の一意解 $\gamma : \mathbf{R} \times [0, T) \rightarrow \mathbf{R}^n$ について次のエネルギー等式が成り立つ：

$$D[\gamma(\cdot, t_2)] = D[\gamma(\cdot, t_1)] - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\gamma(\cdot, t)} |\kappa|^2 ds dt \quad (0 \leq t_1 < t_2 < T).$$

また、もし $T = \infty$ (大域解) ならば、解は $t \rightarrow \infty$ で直線に (適当な意味で) 収束する．

上記の定理は平面曲線に限っても [1] の直線への収束の結果の拡張になっており、空間曲線の場合は新しい結果である．ちなみに一般には $T < \infty$ もありえるが、 $T = \infty$ の十分条件も知られている．

3 弾性流

弾性流とは、曲げエネルギー $B[\gamma] := \frac{1}{2} \int_{\gamma} |\kappa|^2 ds$ と長さ L の和として定まる弾性エネルギー $B + L$ の L^2 -勾配流として得られる次の方程式の解のことである．

$$\partial_t \gamma = -\nabla_s^2 \kappa - \frac{1}{2} |\kappa|^2 \kappa + \kappa. \quad (\text{EF})$$

有限長曲線の場合の弾性流は非常に良く研究されており、特に勾配流の構造から B が常に有界なので、多くの場合に解の大域存在が成り立つ．一方で、無限長曲線の場合は $B + L = \infty$ となり勾配流構造が破綻するため、ほとんど研究がなされていなかった．著者の知る唯一の先行研究は Novaga–Okabe [4] によるもので、有限長の解の境界条件を無限遠に飛ばした極限として無限長の時間大域解を構成する手法であり、極めて先駆的ではあるものの、解の一意性など基本的な未解決問題が数多く残されていた．本研究では方向エネルギーを用いるアイデアを出発点とし、無限長版のエネルギー法の理論を確立することで、時間大域解の一意存在など種々の未解決問題の解決に成功した．

定理 2 ([2]) 初期曲線 $\gamma_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ が $B[\gamma_0] + D[\gamma_0] < \infty$ を満たすならば、 $\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0$ となる弾性流 (EF) の一意大域解 $\gamma : \mathbf{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$ が存在し、更に“所望のエネルギー等式”が成り立つ．また解は $t \rightarrow \infty$ で直線もしくはボーダーラインエラスティカに (適当な意味で) 収束する．

参考文献

- [1] G. Huisken, A distance comparison principle for evolving curves, Asian J. Math. 2 (1998), no. 1, 127–133.
- [2] T. Miura, F. Rupp, A new energy method for shortening and straightening complete curves, arXiv:2504.03395
- [3] T. Miura, G. Wheeler, Uniqueness and minimality of Euler’s elastica with monotone curvature, to appear in J. Eur. Math. Soc. (JEMS)
- [4] M. Novaga, S. Okabe, Curve shortening-straightening flow for non-closed planar curves with infinite length, J. Differential Equations 256 (2014), no. 3, 1093–1132.

トポロジー最適化の骨形態学への応用：魚類椎骨の研究を例として

Application of topology optimization to bone morphology: Research on fish vertebrae

坂下 美咲 (Misaki Sakashita)¹

¹ 東京理科大学創域理工学部生命生物科学科 (Department of Applied Biological Science, Tokyo University of Science)

e-mail: sakashita@rs.tus.ac.jp

1 概要

トポロジー最適化は、構造最適化手法の一種であり、特定の制約のもと目的関数を最大化または最小化するために最適な材料分布を求める[1]。本手法では設計領域を微細要素に細分化し、各要素の材料密度を求めることから、従来構築されてきた構造最適化手法である寸法最適化や形状最適化に比べて、生成できる構造の自由度が高く、複雑な曲線を含む有機的な構造の設計が可能である。この特徴から、トポロジー最適化は、建造物や工業部品の設計への活用が多数提案されている。

トポロジー最適化は設計工学の分野での活用が著しいが、生物学の分野でも骨を対象として形態の再現に用いられてきた。骨の形態再現においては、「骨の形態は骨に加わる荷重に適応して作られる」という仮定 (Wolff の法則[2]) のもと、構造の剛性を最大化する最適化問題をトポロジー最適化で解くことにより構造を生成している。従来の再現対象は、骨の内部に見られる海綿骨の網目構造が主だった[3]。一方で、生物の骨格を決定する骨の外形は再現されていなかった。

筆者らは骨の外形も荷重に適応すると仮定し、これまで魚類の椎骨を対象としてトポロジー最適化による形態の再現を試みてきた。魚類の椎骨は種間で形態が多様であり[4]、それらの形態は魚種ごとに異なる遊泳法と関連していることが示唆されていた。筆者らは、魚類の椎骨の形態が遊泳によって異なる荷重に適応して形成されると仮定し、魚類椎骨を模倣した設計領域において剛性最大化問題をトポロジー最適化で解き最適構造を生成する、という計算機実験を行った。その結果、遊泳によって発生するであろう圧縮荷重を椎骨に加えることで、魚類の椎骨に似た形態を生成することができた[5] (図 1)。また、荷重条件を変えることで多様な椎骨の形態的特徴を再現できた。これらの結果から、トポロジー最適化が骨の外形の形態再現シミュレーションにも利用できることを示した。

筆者らは現在、トポロジー最適化を用いた計算機実験の結果をもとに、魚類椎骨の形態形成に関わる細胞挙動を調べている。トポロジー最適化は剛性最大化問題を解くために、応力・歪みの大小に応じて材料の付加・削減を調節している。この操作は、骨を形成する骨芽細胞と破骨細胞の活動に極めてよく似ている。実際に、トポロジー最適化で材料の付加または削減の起こる領域に、骨芽細胞と破骨細胞の局在が観察された[6]。細胞分布の観察と、荷重およびその応答機構を攪乱する実験を進めることで、魚類椎骨の荷重に適応した形態形成メカニズムを明らかにできると予想している。上

記の研究を本講演で紹介することにより、トポロジー最適化を基軸として形態学的研究が展開できる可能性を伝えたい。

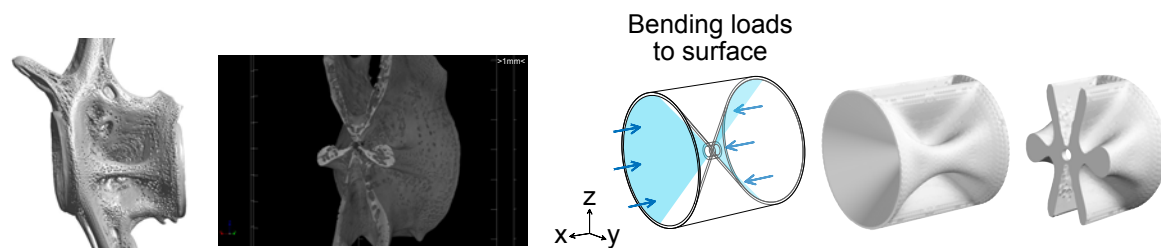


図 1 トポロジー最適化を用いた魚類椎骨の再現。左から、マダイ椎骨の CT 撮影像、マダイ椎骨の横断面、脊椎の曲げに基づいた椎骨への圧縮荷重（最適化では右半分にも同様の荷重を付加）、同荷重条件下でのトポロジー最適化の結果、計算結果の断面（参考文献[5]より改変）。

謝辞 本講演で発表する研究は、近藤滋博士（国立遺伝学研究所）、佐藤真央博士（琉球大学）、山崎慎太郎教授（早稲田大学）、矢地謙太郎准教授（大阪大学）、川本敦史博士（株式会社豊田中央研究所）、近藤継男博士（京都大学）の協力を得て行われている。また、本研究は JSPS 科研費 19J11643、20H05949、22K15154 の助成を受けている。

参考文献

- [1] Bendsøe MP, Sigmund O. Topology Optimization. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [2] Wolff J. The Law of Bone Remodelling. Springer-Verlag Berlin Heidelberg; 1986.
- [3] Jang IG, Kim IY. Computational study of Wolff's law with trabecular architecture in the human proximal femur using topology optimization. J Biomech. 2008 Aug 7;41(11):2353-2361.
- [4] Sakashita M, Sato M, Kondo S. Comparative morphological examination of vertebral bodies of teleost fish using high-resolution micro-CT scans. J Morphol. 2019 Jun;280(6):778-795.
- [5] Sakashita M, Yamasaki S, Yaji K, Kawamoto A, Kondo S. Three-dimensional topology optimization model to simulate the external shapes of bone. PLoS Comput Biol. 2021 Jun 16;17(6):e1009043.
- [6] Sakashita M, Kondo S, Wada N. Lateral bone ridge expansion and internal tissue replacement for vertebral body growth in Pacific bluefin tuna *Thunnus orientalis*. J Morphol. 2024 Feb;285(2):e21666.

2次元シートから3次元円筒構造へ至る皮膚付属器の形態形成を再現する数理モデル

Mathematical model to reproduce morphogenesis of skin appendages from 2D sheet to 3D cylindrical structure

香川 溪一郎 (Keiichiro Kagawa)¹, 奥村 真善美 (Makoto Okumura)²,
小林 康明 (Yasuaki Kobayashi)³,
Wuergezhen Duligengaowa (Duligengaowa Wuergezhen),
森田 梨津子 (Ritsuko Morita)⁴, 藤原 裕展 (Hironobu Fujiwara)⁵,
長山 雅晴 (Masaharu Nagayama)¹

¹北海道大学 (Hokkaido University), ²甲南大学 (Konan University)

³城西大学 (Josai University), ⁴大阪大学 (Osaka University)

⁵理化学研究所 (RIKEN BDR)

e-mail: kkagawa@es.hokudai.ac.jp

1 概要

皮膚は生物の表面を覆う臓器であり、生体を保持するために外界との境界の役割を果たす。皮膚を断面で観ると、外界側から順に表皮、真皮、皮下組織の三層構造をなしている。表皮の最外層には角質細胞からなる角層が存在し、外界から生体を防御する重要な役割を果たしている。真皮には膠原繊維（コラーゲン）や弾性繊維といった支持組織や、汗を分泌する汗腺、皮脂を分泌する脂腺、毛を包み込み支える毛包といった付属器が存在する。毛包は円筒状の構造をしており、生命の発生期において、平坦な形状をしたシート状の生体の表面に毛包が形成されるには、シート状の表面が体内側に陥没した形状を取る必要がある。Morita らは毛包が形成される予定領域に同心円状の遺伝子発現パターンが出現し、これが体内側に望遠鏡を伸ばすようにして陥入することで毛包を形成することを、時空間的な解析によって明らかにした[1]。表皮と真皮の間には基底膜と呼ばれるシート状の構造物が存在する。基底膜は IV 型コラーゲンやラミニンといった数種の高分子がネットワーク状に結合することで形成されている。Wuergezhen らは毛包の形態形成時での基底膜のダイナミクスを観察した。基底膜の分解阻害剤を加えたマウスでは、筒状の毛包の形成は実現されず、袋状に膨らんだ形状になることを観察し、このことから毛包形成時には高分子ネットワークからなる基底膜は分解と生成を繰り返すことで伸張していることを示唆する観察結果を得ている[2]。

我々の研究グループではこれまで皮膚の恒常性を記述する数理モデルの構築に取り組んできた。Ohno らは表皮構造を再現する数理モデルを構築した[3]。この数理モデルは細胞を大きさのある粒子で近似し、各粒子がその位置における脂質やカルシウムイオンなどの濃度の代表値を保持しながら表皮における化学物質のダイナミクスを表現する。また、細胞同士は排除体積による斥力と細胞接着などによる引力からなる力学的な相互作用をすることで全体としての皮膚の構造を表現するエージェントベースのモデルとなっている。他にエージェントベースの数理モデルを用いた数値実験系の先行研究として、Sütterlin らによる角層バリア機能の評価[4]や Miller らによる皮膚疾患の数値実験系[5]などがある。

本講演では Ohno らのモデルを基に、発生期の毛包の形態形成における、平坦に細胞が並んだ 2 次元シート状の構造から円筒状の 3 次元構造を実現する条件を提示することを目指した

研究成果[6]を報告する．ここでは Morita らの実験において毛包の予定領域直下の真皮層に線維芽細胞が凝集していることに注目し，線維芽細胞を起源として細胞の細胞分裂周期や真皮や基底膜といった構造物の力学的な物性値を変化させる化学物質が拡散されていると仮定した．これらの仮定の下で円筒状の陥入現象を実現することに成功した．また，毛包の形態形成のために構築した数理モデルに対して，パラメタの変更などの僅かな変更を加えることにより，他の皮膚付属器で分枝状の陥入を起こす乳腺や，鳥の毛包のように陥入せずに盛り上がる形状を実現する可能性について得られる示唆も紹介する．

謝辞 本講演内容は JST CREST (JPMJCR1926), JSPS 科研費 (JP23H04936, JP23H04927) の助成を受けた研究成果に基づく．

参考文献

- [1] R. Morita, N. Sanzen, H. Sasaki, T. Hayashi, M. Umeda, M. Yoshimura, T. Yamamoto, T. Shibata, T. Abe, H. Kiyonari, Y. Furuta, I. Nikaido and H. Fujiwara, Tracing the origin of hair follicle stem cells, *Nature*, 594 (2021), 547–552.
- [2] D. Wuerghezhen, E. Gindroz, R. Morita, K. Hashimoto, T. Abe, H. Kiyonari and H. Fujiwara, An eGFP-Col4a2 mouse model reveals basement membrane dynamics underlying hair follicle morphogenesis, *Journal of Cell Biology*, 224 (2025), e202404003.
- [3] K. Ohno, Y. Kobayashi, M. Uesaka, T. Gotoda, M. Denda, H. Kosumi, M. Watanabe, K. Natsuga and M. Nagayama, A computational model of the epidermis with the deformable dermis and its application to skin diseases, *Scientific Reports*, 11 (2021), 13234.
- [4] T. Sütterlin, E. Tsingos, J. Bensaci, G. N. Stamatas and N. Grabe, A 3D self-organizing multicellular epidermis model of barrier formation and hydration with realistic cell morphology based on EPISIM, *Scientific Reports*, 7 (2017), 43472.
- [5] C. Miller, E. Crampin and J. M. Osborne, Multiscale modelling of desquamation in the interfollicular epidermis, *PLOS Computational Biology*, 18 (2022), e1010368.
- [6] 香川溪一郎, 奥村真善美, 小林康明, Wuerghezhen Duligengaowa, 森田梨津子, 藤原裕展, 長山雅晴, 線維芽細胞に着目した毛包形態形成の数理モデル, 計算工学講演会論文集, 29 (2024), D-04-05.