不可分な負担の公平かつパレート効率的な配分の存在

Existence of Fair and Efficient Allocation of Indivisible Chores

馬原凌河 (Ryoga Mahara)
東京大学 (University of Tokyo)
e-mail : mahara@mist.i.u-tokyo.ac.jp

1 はじめに

近年，分割不可能なアイテムの公平配分理論は経済学，数学，計算機科学などの多分野で注目を集めている．本稿では，不可分な負担の公平配分問題を取り上げ，公平性とパレート効率性を同時に満たす配分の存在について論じる．

2 問題設定

エージェントの集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，不可分な負担 (アイテム) の集合を $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ とする．各エージェント $i \in N$ は**コスト関数** $c_i : 2^M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ をもつ．本稿では，コスト関数はすべて**加法的**であると仮定する．すなわち，任意の $i \in N$ と任意の $S \subseteq M$ に対して，$c_i(S) = \sum_{j \in S} c_i(\{j\})$ が成り立つ．我々の目標は「公平性」と「効率性」を同時に満たす**配分** $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を求めることである．ここで，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は M の分割であり，各 X_i はエージェント i に配分されるアイテム集合を表す．

2.1 公平性と効率性

不可分なアイテムの公平配分問題において，**EF1 (Envy-freeness up to one item)** は最も広く用いられている公平性の指標である．配分 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ が **EF1 配分**であるとは，任意の $i, i' \in N$ に対して, $X_i = \emptyset$ であるか，または $c_i(X_i \setminus \{j\}) \leq c_i(X_{i'})$ を満たすアイテム $j \in X_i$ が存在することをいう．EF1 配分は常に存在し，多項式時間で計算可能であることが知られている．

一方，**パレート効率性 (Pareto efficiency)** は効率性を評価する代表的な指標である．配分 Y が配分 X を**パレート支配**するとは，任意の $i \in N$ に対して，$c_i(Y_i) \leq c_i(X_i)$ が成立し, かつある $i' \in N$ に対して $c_{i'}(Y_{i'}) < c_{i'}(X_{i'})$ が成立することをいう．配分 X が**パレート最適（PO）**であるとは，任意の配分 Y に対して, Y が X をパレート支配しないことをいう．

PO よりも強く，かつ扱いやすい効率性の指標として，fPO (Fractional Pareto optimality) と呼ばれる概念がある．具体的には，k 個の配分 $Y^1, ..., Y^k$ が配分 X を**小数パレート支配**するとは，ある $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ が存在し，$\sum_{r=1}^{k} \lambda_r = 1$ かつ $\lambda_r \geq 0 \ \forall r \in \{1, \ldots, k\}$ を満たし，任意の $i \in N$ に対して, $\sum_{r=1}^{k} \lambda_r c_i(Y_i^r) \leq c_i(X_i)$ が成立し, かつある $j \in N$ に対して $\sum_{r=1}^{k} \lambda_r c_j(Y_j^r) < c_j(X_j)$ が成立することをいう．配分 X が**小数パレート最適（fPO）**であるとは，任意の有限個の配分によって, X が小数パレート支配されないことをいう．

EF1 配分や PO 配分はそれぞれ単独では存在が保証されるが，これらを同時に達成する配分が存在するかどうかは，自然な問題設定でありながら，極めて困難な課題となる．負担配分においては, EF1 かつ PO を同時に満たす配分が常に存在するかどうかは，多くの研究者の努力にも関わらず，以下の限定された場合を除いて長らく未解決であった．すなわち，エージェントが 2 人または 3 人の場

合，アイテムの種類が高々 2 種類の場合，コスト関数の種類が高々 3 種類の場合，およびすべてのコスト関数が 2 値コスト関数である場合である．

3　本研究の主結果

本研究の主結果は，EF1 かつ PO を満たす配分の存在を示したことである．

4　本研究の手法

本研究の存在証明では，はじめにコスト関数をわずかに摂動させ，適切に摂動されたインスタンスに対して EF1 かつ fPO を満たす配分の存在を示す．摂動が十分に小さい場合，得られた配分は元のインスタンスに対しても EF1 かつ PO を満たす．

経済学の古典的な結果によれば，配分 X が fPO であることと，ある正の重みベクトル $(w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ に対して，X が重みつき総コスト $\sum_{i \in N} w_i c_i(X_i)$ を最小化する配分であることは同値である．この重みつき総コスト最小化問題は線形計画問題として定式化でき，その双対問題には双対変数 $(p_1, \ldots, p_m)$ が現れ，これは各負担に対する価格（あるいは報酬）として解釈できる．

さて，$(w_1, \ldots, w_n)$ を $(n-1)$ 次元標準単体 Δ^{n-1} 上の重みとする．また，縮小パラメータ $\tau > 0$ を導入し，わずかに縮小された単体上の重み $(w'_1, \ldots, w'_n)$ を定義する．ここで，$w'_i := \tau + (1 - \tau n) w_i$ である．そして，この $(w'_1, \ldots, w'_n)$ に基づく重みつき総コスト最小化問題 $\mathbf{LP}(w_1, \ldots, w_n, \tau)$ を考える．任意の $(w_1, \ldots, w_n) \in \Delta^{n-1}$ に対し，X を $\mathbf{LP}(w_1, \ldots, w_n, \tau)$ の最適配分，$(p_1, \ldots, p_m)$ を対応する双対問題の一意的な最適解とする．縮小パラメータ τ を十分小さく設定することで，ある正の重み $w_i > 0$ を持つエージェント i が**価格に基づく羨望なし（price envy-free, pEF）**となることを保証できる．ここで，エージェント i が pEF とは，i の受け取る負担の合計価格が他のどのエージェントのものよりも高くないことを意味する．

この性質を用いると，不動点定理の一種である KKM 補題（Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz 補題）を適用することで，ある重みベクトル $(w_1, \ldots, w_n) \in \Delta^{n-1}$ が存在して，各エージェント i に対して，$\mathbf{LP}(w_1, \ldots, w_n, \tau)$ のある最適配分 X が存在して，エージェント i は X および対応する双対問題の一意的な最適解 $(p_1, \ldots, p_m)$ に関して，価格に基づく羨望なしとなることを示すことができる．縮小単体上の重み $(w'_1, \ldots, w'_n)$ に基づく重みつき総コスト最小化問題を考えているので，これらすべての最適配分が fPO であることも保証できる．適切に摂動されたインスタンスにおいては，この望ましい重みベクトルの下で EF1 かつ fPO を同時に満たす最適配分が存在することを示すことができる．これにより，EF1 かつ PO を満たす配分の存在が保証される．

5　おわりに

本研究は，不動点定理と離散アルゴリズムを組み合わせている点で特に興味深い．具体的には，望ましい重みベクトルの存在を不動点的な議論によって示し，その重みの下での最適配分の集合から EF1 かつ fPO を満たす配分を構成する部分は，離散アルゴリズムを用いて達成している．不動点定理の威力は古くからよく知られている．例えば，Arrow と Debreu は角谷の不動点定理を用いて市場均衡の存在を示し，Su は Sperner の補題を用いてケーキ分割問題における無羨望配分の存在を証明した．これに対して，不可分なアイテムを扱う設定では，これまでの多くの存在証明が純粋に離散アルゴリズムに依拠してきた．本研究は，離散的な問題設定においても，不動点定理に基づくアプローチが離散アルゴリズムと強力に結びつく可能性を示唆している．

予測精度がオンラインアルゴリズムの分布的ロバスト競合比に与える影響の解析

Analyzing the Effect of Prediction Accuracy on the Distributionally-Robust Competitive Ratio

善永 徹 (Toru Yoshinaga)[1], 河瀬 康志 (Yasushi Kawase)[1]
[1] 東京大学 (The University of Tokyo)
e-mail：yoshinaga-toru106@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

1　はじめに

予測付きアルゴリズム [1] は近年盛んに研究されているアルゴリズム設計の一分野である．本分野では，問題に関する予測がアルゴリズム設計者に提供される．予測は誤っている可能性があるが，正しい場合にはアルゴリズムの性能向上に寄与する情報である．アルゴリズムは，予測が正しい場合の性能（**一貫性**）および予測が正しいとは限らない場合の性能（**頑健性**）の二つの指標で評価される．

近年，Sun ら [2] は予測とその予測精度が利用できる状況におけるオンラインアルゴリズムの性能指標として，**分布的ロバスト競合比** (DRCR) を提案した．この指標を用いた問題設定では，インスタンス I はインスタンス集合 $\mathcal{I}$ を台とする確率分布からサンプルされる．予測 θ はインスタンス部分集合 $\mathcal{I}_\theta \subseteq \mathcal{I}$ を特徴づける．予測精度 δ はサンプルされたインスタンスが $\mathcal{I}_\theta$ に含まれる確率が少なくとも $1-\delta$ であることを保証する．確率分布集合 $\mathcal{D}_{\theta,\delta}$ は予測 θ および予測精度 δ が指定する条件を満たす確率分布をすべて集めたものである．DRCR は，$\mathcal{D}_{\theta,\delta}$ のうちで最悪の分布に対する，オンラインアルゴリズム A が達成するコスト ALG と最適オフラインアルゴリズム OPT が達成するコストの比の期待値として定義される．

定義 1　(分布的ロバスト競合比, DRCR [2])

$$\mathrm{DRCR}_{\theta,\delta}(A) = \max_{d\in\mathcal{D}_{\theta,\delta}} \mathbb{E}_{I\sim d}\left[\frac{\mathrm{ALG}(I)}{\mathrm{OPT}(I)}\right].$$

Sun ら [2] は，一つの予測が与えられたとき，DRCR は一貫性と頑健性の凸結合で記述できることを示した．

2　分布的ロバスト競合比の構造

まず我々は複数の予測が与えられた場合にも DRCR が各予測の一貫性および頑健性の凸結合で記述できることを示す．n 個の予測 $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_i\}_{i=1}^n$ および予測精度 $\boldsymbol{\delta} = \{\delta_i\}_{i=1}^n$ が与えられるとする．各予測 θ_i はインスタンス部分集合 $\mathcal{I}_{\theta_i}$ を特徴づける．予測精度 δ_i は，サンプルされるインスタンスについて $\Pr[I \in \mathcal{I}_{\theta_i}] \geq 1-\delta_i$ であることを保証する．ここで我々は $\mathcal{I}_{\theta_1} \subseteq \mathcal{I}_{\theta_2} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{I}_{\theta_n}$ かつ $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \cdots \geq \delta_n$ を仮定する．確率分布集合 $\mathcal{D}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\delta}}$ は，n 個の予測 $\boldsymbol{\theta}$ および予測精度 $\boldsymbol{\delta}$ が指定する条件をすべて満たす確率分布全体の集合である．新たに定義した確率分布集合 $\mathcal{D}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\delta}}$ を用いて，定義 1 を書き換えたものを $\mathrm{DRCR}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\delta}}(A)$ と表記する．アルゴリズムの頑健性を $r(A) = \max_{I\in\mathcal{I}} \mathrm{ALG}(I)/\mathrm{OPT}(I)$ と定義する．また，アルゴリズムの各予測 θ_i における一貫性を $c_i(A) = \max_{I\in\mathcal{I}_i} \mathrm{ALG}(I)/\mathrm{OPT}(I)$ と定義する．このとき次が成り立つ：

定理 2　$\delta_0 = 1$ とする．アルゴリズム A の $\mathrm{DRCR}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\delta}}$ は次のように書き直せる：

$$\mathrm{DRCR}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\delta}}(A) = \sum_{i=1}^{n} (\delta_{i-1} - \delta_i) \cdot c_i(A) + \delta_n \cdot r(A).$$

次に予測 $\boldsymbol{\theta}$ を固定し，各 δ_i を変数とみなす．このときの DRCR は A および $\boldsymbol{\delta}$ の関数である．定理 2 より，各アルゴリズム A に対する DRCR は n 個の変数 $\{\delta_i\}_{i=1}^{n}$ に関してアフィンである．最適 DRCR はこれらのアフィン関数の点ごとの最小値であり，これは凹関数である．

定理 3　最適 DRCR は $\boldsymbol{\delta}$ について凹関数である．

3　スキーレンタル問題への応用

これまでに得られた DRCR の構造を, オンラインアルゴリズムの基本的な問題であるスキーレンタル問題へ応用する．スキーレンタル問題では，スキーヤーが未知の日数 N まで毎日スキーを続ける．スキーヤーはスキー板を持っておらず，1 日あたり \$1 でレンタルするか，\$$B$ (> 1) で購入するかを毎日選択しなければならない．予測 $\theta_i = \{\ell_i, u_i\}$ は，スキー終了日 N が区間 $[\ell_i, u_i]$ の間にある確率が $1 - \delta_i$ 以上であることを通知する．各予測について，$\ell_n \le \ell_{n-1} \le \cdots \le \ell_1 \le u_1 \le u_2 \le \cdots \le u_n$ であることを仮定すれば，DRCR は定理 2 で示したように記述できる．

スキーレンタル問題の任意の乱択アルゴリズムはスキー板の購入日を確率分布からランダムサンプルするという形で表現できる．我々は n 個の予測区間が与えられたスキーレンタル問題の最適な DRCR は，多項式個の変数と制約をもつ等価な線形計画問題に帰着させて求まることを示した．

定理 4　予測区間つきスキーレンタル問題に対する最適アルゴリズムの DRCR は，$O(n + B)$ 個の変数と制約をもつ等価な線形計画問題を解くことで計算できる．

さらに我々は帰着した線形計画問題の双対を考察し，最適 DRCR が所望の値以上となるための $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ の実行可能領域が多面体となることを示した．

4　まとめと今後の展望

本研究では，複数の予測が与えられた場合の DRCR の構造を解析した．また，具体的な応用としてスキーレンタル問題における最適 DRCR を求めるためのアルゴリズムや，DRCR がある所望の閾値以上の値を取るために必要な予測精度の下限を与えた．DRCR の構造的特徴は他のオンライン最適化問題に対し普遍的に適用可能であり，今後さらなる応用展開が期待される．

参考文献

[1] Mitzenmacher, Michael, and Sergei Vassilvitski, Algorithms with Predictions, In Beyond the Worst-Case Analysis of Algorithms, ed. Tim Roughgarden, Cambridge University Press, Chapter 30, 2020.

[2] Sun, Bo and Huang, Jerry and Christianson, Nicolas and Hajiesmaili, Mohammad and Wierman, Adam and Boutaba, Raouf, Online Algorithms with Uncertainty-Quantified Predictions, in: Proc. of International Conference on Machine Learning, Vol. 235, pp. 47056–47077, 2024.

Chvátal-Erdős 型の条件の緩和とグラフの 2-因子の存在

A relaxation of Chvátal-Erdős type conditions for a graph to have a 2-factor

鹿島 柾 (Kashima Masaki)[1]
[1] 慶應義塾大学, 日本学術振興会特別研究員 PD (Keio University, JSPS fellow)
e-mail : masaki.kashima10@gmail.com

1 概要

本講演の内容は [2] 及び [4] に基づく．グラフのすべての頂点を通る閉路をハミルトン閉路といい, グラフの 2-正則な全域部分グラフを 2-因子という．ハミルトン閉路は連結成分が一つのの 2-因子であるため, 2-因子はハミルトン閉路を緩和した構造である．グラフのハミルトン閉路は最短経路問題等とも密接に関連し, グラフ理論やその周辺分野における主要な研究トピックの一つである．

グラフがハミルトン閉路を持つための十分条件として, Chvátal and Erdős [1] による「独立数が連結度以下のグラフはハミルトン閉路を持つ」という定理が知られている．一般に, グラフの連結度と独立数の間の関係式による仮定を「Chvátal-Erdős 型の仮定」と呼び, グラフの閉路やパス等に関する様々な問題に対して Chvátal-Erdős 型の仮定による結果が得られてきた．

本研究では, Chvátal-Erdős 型の仮定の緩和として最小次数と独立数の間の関係式による仮定を考察し, その仮定がグラフの 2-因子の存在を保証する良い十分条件になっていることを示した．さらに, 連結成分数を制限した 2-因子の存在に関するいくつかの結果を得ることにより, グラフの閉路に関する問題における Chvátal-Erdős 型の仮定の立ち位置に関する示唆を得た．

2 Chvátal and Erdős の定理とその緩和

本講演では有限, 無向, 単純グラフのみを扱う．グラフ G に対して, $\delta(G)$, $\kappa(G)$, $\alpha(G)$ でそれぞれ**最小次数**, **連結度**, **独立数**を表す．Chvátal and Erdős [1] は次の定理を示した．

定理 1（[1]） グラフ G が $\alpha(G) \le \kappa(G)$ を満たすならば, G はハミルトン閉路を持つ．

定理 1 に端を発して, グラフが特定の構造を部分グラフとして持つための独立数と連結度の間の関係式による仮定が研究されてきた背景があり, そのような仮定を **Chvátal-Erdős 型の仮定**という．

任意のグラフ G に対して $\kappa(G) \le \delta(G)$ という関係が成り立つことは定義から即座に従う．したがって, $\alpha(G) \le \delta(G)$ という仮定は定理 1 の仮定の緩和になっている．このような「独立数と最小次数の間の関係式」による仮定を本講演では**緩和版 Chvátal-Erdős 型の仮定**と呼ぶことにする．

ここで自然に考える問は, 緩和版 Chvátal-Erdős 型の仮定はハミルトン閉路の存在を保証する十分条件になっているかということである．しかし, この問の答えは No であり, 緩和版 Chvátal-Erdős 型の仮定ではグラフの連結性すら保証できないことが簡単な例からわかる．一方で, 仮にグラフの連結性を保証できないことのみが障害であるならば, 非連結な構造を見つける場合は緩和版 Chvátal-Erdős 型の仮定が有効に働く可能性がある．

本研究では, 緩和版 Chvátal-Erdős 型の仮定がグラフの 2-因子の存在を保証する十分条件になることを示す以下の定理を得た．([2] においては各独立頂点集合に着目した弱い仮定のもとで同様の結論を示している.)

定理 2（[2]） グラフ G が $\alpha(G) \leq \delta(G) - 1$ を満たすならば, G は 2-因子を持つ.

定理 2 の独立数に関する条件は最善である．すなわち, 仮定を $\alpha(G) \leq \delta(G)$ に弱めると 2-因子を持たない例が無数に存在する．（ただし, [2] においてはそのような例を完全に特徴づけられることも示している．）定理 2 の証明においては, 定理 1 の証明と同様の手法で 2-因子を構成的に得られる.

3 連結成分数を制限した 2-因子の存在

定理 2 は, 緩和版 Chvátal-Erdős 型の仮定が, 連結な構造を見つけるのには不十分であるが, 閉路を見つけるには十分であることを示している．では, 緩和版 Chvátal-Erdős の仮定にどのような仮定を加えれば連結成分数の小さい構造を保証できるだろうか．グラフ G と正整数 k に対して,

$$\sigma_k(G) := \min \left\{ \sum_{v \in I} d_G(v) \;\middle|\; I \text{ は頂点数 } k \text{ の独立頂点集合} \right\}$$

と定義する．特に, グラフ G の独立数が $k-1$ 以下の場合は $\sigma_k(G) = \infty$ と定義する．本節冒頭の問に対して, 本研究では次の予想を提示する.

予想 3（[2]） グラフ G, 正整数 k に対して, G が $\alpha(G) \leq \delta(G) - 1$, $\sigma_{k+1}(G) \geq |V(G)|$ を満たすならば, G は連結成分数 k 以下の 2-因子を持つ.

予想 3 の独立数に関する条件, 次数和に関する条件は正しければいずれも最善である．また, 予想 3 の $k = 1$ の場合はハミルトン閉路に関する Ore の定理 [3] から従う．本研究では, 予想 3 の $k = 2$ の場合に対応する次の定理を示した.

定理 4（[2]） グラフ G が $\alpha(G) \leq \delta(G) - 1$, $\sigma_3(G) \geq |V(G)|$ を満たすならば, G は連結成分数 2 以下の 2-因子を持つ.

また, G が claw-free グラフと呼ばれるクラスに属する場合は予想 3 が成り立つことを [4] で示しており, それについては講演の中で述べる.

4 今後の展望

本研究では, 緩和版 Chvátal-Erdős 型の条件が 2-因子の存在を保証する良い十分条件になっていることを示した．定理 2, 4 は, Chvátal-Erdős 型の仮定が「2-因子の存在を保証する緩和版 Chvátal-Erdős 型の仮定」+「連結成分数を制限する次数和条件」として表現できることを示唆している．したがって, ハミルトン閉路以外の構造を保証する Chvátal-Erdős 型の仮定による先行研究に対して, 緩和版 Chvátal-Erdős 型の仮定を用いた研究を展開できることが予想される.

謝辞 本研究は JSPS KAKENHI Grant number 25KJ2077 の支援を受けている.

参考文献

[1] V. Chvátal and P. Erdős, A note on hamilton circuits, Discrete Math. 2 (1972), 111–113.
[2] M. Kashima, New type degree conditions for a graph to have a 2-factor, arXiv:2503.18409.
[3] O. Ore, Note on hamilton circuits, Amer. Math. Monthly 67 (1960), 55.
[4] M. Kashima, Degree sum conditions and a 2-factor with a bounded number of cycles in claw-free graphs, arXiv:2503.08268.

グラフの path-chromatic number が高々 2 となるための十分条件

Sufficient conditions for graphs with path-chromatic number at most 2

横井 暉 (Hikaru Yokoi)[1], 太田 克弘 (Katsuhiro Ota)[1]
[1] 慶應義塾大学 (Keio University)
e-mail : pandorabox0720@keio.jp

1 概要

グラフの tree-decomposition は, それを用いて定義される不変量の観点からも広く研究が行われている. 代表的な例として tree-width が知られているが, 近年では他にも様々な不変量が提案され, それらに関する研究が進められている. 本発表では, Seymour[1] によって導入された tree-chromatic number（これは tree-width の染色数版である）に着目し, 特にその変種である path-chromatic number が高々 2 となるグラフクラスについて述べる.

2 Path-chromatic number の定義と性質

まず, グラフの tree-decomposition と, その特殊形である path-decomposition を定義する.

定義 1 G をグラフ, T を tree, $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in V(T)}$ を G の頂点部分集合族とする. ペア $(T, \mathcal{B})$ が G の tree-decomposition であるとは, 以下の条件を満たすときをいう.

- 任意の $uv \in E(G)$ に対し, $\{u, v\} \subseteq B_t$ となる $t \in V(T)$ が存在する.
- 任意の $v \in V(G)$ に対し, $\{t \in V(T) \mid v \in B_t\}$ は非空な T の subtree を誘導する.

特に T が path のとき, tree-decomposition$(T, \mathcal{B})$ を path-decomposition という. また, 各 B_t を bag とよぶ.

次に, グラフの tree-chromatic number を定義する. グラフ G と $U \subseteq V(G)$ に対し, $G[U]$ で U が誘導する G の部分グラフを表す.

定義 2 グラフ G の path-chromatic number を

$$\min \max_{t \in V(T)} \chi(G[B_t])$$

で定義し, path-$\chi(G)$ で表す. ただし, min は G の path-decomposition$(T, (B_t)_{t \in V(T)})$ 全体でとる.

定義と path-decomposition の基本的な性質により, 次が従う.

事実 3 任意のグラフ G に対し, $\omega(G) \leq$ path-$\chi(G) \leq \chi(G)$ が成立する. ただし, $\omega(G)$ は G のクリーク数（最大クリークの大きさ）を表す.

3 先行研究

グラフの path-chromatic number を求めるには, どのような path-decomposition を考えればよいだろうか. そこで, Huynh, Kim[2] により導入された path-decomposition を紹介する. グラフ G と $U \subseteq V(G)$ に対し, $N_G[U]$ で G における U の閉近傍を表す.

命題 4 G を n 頂点のグラフとし, $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ を $V(G)$ の順序付けとする. 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し, $X_i = N_G[\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}] \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$ とおく. このとき, $P_\sigma^G = (P_n, (X_i)_{1 \leq i \leq n})$ は

G の path-decomposition である.

命題 4 の path-decomposition に対し, 以下が示されている. これにより, グラフの path-chromatic number を評価するには, 「良い」頂点の順序付け σ を与えればよいことが分かる.

命題 5（[2]） 任意のグラフ G に対し, P_{σ}^{G} が path-$\chi(G)$ を達成する σ が存在する.

Huynh, Reed, Wood, Yepremyan[3] は, 染色数の大きさに関する判定問題に帰着させることで, 以下の定理を示した.

定理 6（[3]） グラフの path-chromatic number が高々 6 であるかどうかを判定する問題は NP 完全である.

そして, 彼らは次のように予想した.

予想 7（[3]） グラフの path-chromatic number が高々 2 であるかどうかを判定する問題は NP 完全である.

本研究では, グラフの path-chromatic number が高々 2 であるための十分条件に焦点を当てる. この十分条件を満たすグラフに対しては, 各 bag が二部的であるシンプルな path-decomposition をもつことが保証される. また, 事実 3 により, グラフの path-chromatic number が高々 2 であるためには, 三角形（長さ 3 の閉路のこと）を含まないことが必要である.

4 主結果

本研究では以下の 2 つの結果を得た.

定理 8 G を最大次数 3 以下の三角形を含まないグラフとする. このとき, path-$\chi(G) \leq 2$ が成り立つ.

定理 9 G を最大次数 4 以下で長さ 3 と 5 の閉路を含まないグラフとする. このとき, path-$\chi(G) \leq 2$ が成り立つ.

定理 8, 定理 9 の証明では, 「良い」頂点の順序付け σ を構成するアルゴリズムを与えた. このアルゴリズムにより, 所望の σ を入力グラフのサイズに関する多項式時間で構成できる. なお, 定理 9 で「長さ 5 の閉路を含まない」という条件を外せるかどうかについては, 未解決である.

参考文献

[1] P. Seymour, Tree-chromatic number, *J. Combin. Theory Ser. B* **116** (2016) 229–237.

[2] T. Huynh, R. Kim, Tree-chromatic number is not equal to path-chromatic number, *J. Graph Theory* **86** (2017) 213–222.

[3] T. Huynh, B. Reed, D. R. Wood, L. Yepremyan, Notes on tree- and path-chromatic number, 2019–20 MATRIX annals, MATRIX Book Ser., 4, 489–498, Springer, Cham, 2021.