系統樹におけるクラスタリング評価のための定量的尺度の開発

Measuring Clustering Quality in Phylogenetic Trees

河井　雪野 (Yukino Kawai)[1]
[1] 早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
(Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University)
e-mail：yukino_k@akane.waseda.jp

1　概要

階層的クラスタリングにより構築される系統樹は，データ処理方法により異なる構造となるため，それらの品質を定量的に評価する必要がある．古典的なクラスタリングの定量評価手法であるシルエット係数は，各データ点を他のクラスタとの距離に基づいて評価するため，系統樹に特有の木の分岐構造を適切に反映できない．系統樹において，データ点間の関係性を適切に評価するには，split（枝による分割）を考慮した評価が求められる．split を考慮した系統樹比較の代表的な指標として，Robinson-Foulds distance[1] や Matching distance[2] が存在するが，これらの既存手法は，系統樹の葉の構成のみに基づいて比較を行うため，葉に付与されたカテゴリの分布を適切に評価できない．さらに，これらの手法は系統樹の位相構造のみに基づいて評価を行うため，各枝の進化距離や信頼度といった重要な情報を考慮できないという限界がある．

本講演では，葉にカテゴリ情報が付与された系統樹に対し，クラスタリング品質を定量的に評価するための新たな尺度を提案する．最適輸送問題を用いて split 構造および枝長を考慮した指標を導入し，その性質および有用性を検討する．

2　提案手法

定義 1（split ベクトル）　系統樹 T の各葉にはカテゴリ $1, 2, \ldots, k$ のいずれかが付与されているとする（k はカテゴリ数）．このとき系統樹 T の各辺 e による split によって分割された 2 つの部分木におけるカテゴリ i に属する葉の個数をそれぞれ $N_{i,e}$，$\overline{N}_{i,e}$ とする．split e に対応する split ベクトル $\mathbf{v}_e$ および補集合ベクトル $\overline{\mathbf{v}}_e$ を以下のように定義する：

$$\mathbf{v}_e = (N_{i,e})_{i=1}^{k}, \quad \overline{\mathbf{v}}_e = (\overline{N}_{i,e})_{i=1}^{k} \tag{1}$$

定義 2（完全マッチング距離）　2 つの系統樹 T_1, T_2 に対し，内部枝に対応する split ベクトル集合を

$$V_1 = \{\mathbf{v}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}_n^{(1)}\}, \quad V_2 = \{\mathbf{v}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}_n^{(2)}\}$$

とする．ここで，n は内部枝数（split 数）であり，V_1, V_2 は同じ大きさの集合である．

このとき，全単射 $\pi : V_1 \to V_2$ に対して，split ベクトル間の距離を ℓ_1 ノルムにより定義し，完全マッチング距離を以下のように定義する：

$$d(T_1, T_2) := \min_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \min\left\{ \|\mathbf{v}_i^{(1)} - \mathbf{v}_{\pi(i)}^{(2)}\|_1, \|\mathbf{v}_i^{(1)} - \overline{\mathbf{v}}_{\pi(i)}^{(2)}\|_1 \right\} \tag{2}$$

3　最適輸送問題としての定式化

均等な重みを持つ場合，2 つの系統樹における split ベクトル集合の比較は，以下の最適輸送問題 [3] として定式化される：

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot\pi_{ij} \tag{3}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n}\pi_{ij}=\frac{1}{n} \;\; \forall i\in\{1,\dots,n\}, \quad \sum_{i=1}^{n}\pi_{ij}=\frac{1}{n} \;\; \forall j\in\{1,\dots,n\} \tag{4}$$

ここで，π_{ij} は split i から split j への輸送量であり，すべての i,j に対して $\pi_{ij}\geq 0$ が成り立つものとする．輸送コスト c_{ij} は，split の向きの任意性を考慮して以下のように定義される：

$$c_{ij}=\min\left\{\|\mathbf{v}_i^{(1)}-\mathbf{v}_j^{(2)}\|_1, \|\mathbf{v}_i^{(1)}-\overline{\mathbf{v}}_j^{(2)}\|_1\right\} \tag{5}$$

この定式化により，最適輸送問題の解は式 (2) の完全マッチング距離 $d(T_1,T_2)$ と一致する．

系統樹においては，各枝の進化距離や系統推定の信頼度が重要な情報であるため，これらを重みとして導入した重み付き最適輸送問題 [4] に拡張できる：

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot\pi_{ij} \tag{6}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n}\pi_{ij}=\frac{w_i^{(1)}}{W_1} \;\; \forall i\in\{1,\dots,n\}, \quad \sum_{i=1}^{n}\pi_{ij}=\frac{w_j^{(2)}}{W_2} \;\; \forall j\in\{1,\dots,n\} \tag{7}$$

$w_i^{(1)}, w_j^{(2)}$ はそれぞれの系統樹における split に付与された重み，$W_1=\sum_i w_i^{(1)}$, $W_2=\sum_j w_j^{(2)}$ は正規化定数である．この拡張により，各分岐の重要度に応じた構造比較が可能となる．

本講演では，提案した split の重みを考慮した系統樹比較手法の有効性を人工および実際の系統樹データを用いて検証し，シルエット係数などの既存手法との比較結果について論じる．

謝辞　本研究を進めるにあたり，多くの助言とご指導をいただいた早稲田大学の早水桃子准教授に深く感謝申し上げる．また本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2128 の支援を受けたものである．

参考文献

[1] D. F. Robinson and L. R. Foulds, ”Comparison of phylogenetic trees”, *Mathematical Biosciences*, vol. 53, no. 1–2, pp. 131–147, 1981.

[2] Y. Lin, V. Rajan, and B. M. E. Moret, ”A metric for phylogenetic trees based on matching”, *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics*, vol. 9, no. 4, pp. 1014–1022, 2011.

[3] C. Villani,”Topics in Optimal Transportation”, *American Mathematical Society*, 2003.

[4] C. Villani, ”Optimal Transport: Old and New”, *Springer*, 2009.

二部比に対する $O(\log n)$ 近似アルゴリズム

An $O(\log n)$-Approximation Algorithm for Bipartiteness Ratio

相馬 輔 (Tasuku Soma)[1], Mingquan Ye[2], 吉田 悠一 (Yuichi Yoshida)[2]
[1] 統計数理研究所 (Institute of Statistical Mathematics), 理研 AIP (RIKEN AIP), [2] 国立情報学研究所 (National Institute of Informatics)
e-mail : soma@ism.ac.jp

1 Introduction

Let $G = (V, E; w)$ be an undirected graph with n vertices, m edges, and a positive edge weight $w : E \to \mathbb{Z}_{++}$, where $\mathbb{Z}_{++}$ is a set of positive integers. The *(normalized) Laplacian matrix* of G is given by $\mathbf{I}_n - \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{D}^{-1/2}$, where $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is the $n \times n$ identity matrix, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is the weighted adjacency matrix of G, and $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is the diagonal matrix with $\mathbf{D}_{ii}$ being equal to the weighted degree of vertex i. The Laplacian matrix is symmetric and positive semidefinite, and its eigenvalues satisfy $0 = \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq 2$. A classical result in spectral graph theory states that G is bipartite if and only if $\lambda_n = 2$. Trevisan [Tre12] proved a quantitative version of this result. For a nonzero vector $\mathbf{x} \in \{0, \pm 1\}^V$, let

$$\beta(\mathbf{x}) := \frac{\sum_{e=(i,j)\in E} w(e) \cdot |x_i + x_j|}{\sum_{i\in V} \deg(i) \cdot |x_i|},$$

where $\deg(i) = \sum_{e=(i,j)\in E} w(e)$ is the weighted degree of vertex i. The *bipartiteness ratio* of G is then defined by

$$\beta(G) := \min_{\mathbf{x}\in\{0,\pm1\}^V\setminus\{\mathbf{0}\}} \beta(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Since each non-zero $\{0, \pm1\}$-vector $\mathbf{x}$ corresponds to a tripartition (L, R, Z) of V such that $L = \{i \in V \mid x_i = 1\}$, $R = \{j \in V \mid x_j = -1\}$, and $Z = \{k \in V \mid x_k = 0\}$, we can represent

$$\beta(G) = \min_{(L,\,R,\,Z)\colon \text{ tripartition of } V} \frac{2w(E(L)) + 2w(E(R)) + w(E(L \cup R, Z))}{\mathrm{vol}(L \cup R)},$$

where $E(L)$ (resp., $E(R)$) is the set of edges whose endpoints are within L (resp., R), and $E(L \cup R, Z)$ is the set of edges connecting $L \cup R$ and Z, and $\mathrm{vol}(L \cup R) = \sum_{i\in L\cup R} \deg(i)$ is the volume of $L \cup R$. Obviously, $\beta(G) = 0$ if and only if G is bipartite. Trevisan [Tre12] showed that the bipartiteness ratio is closely related to the largest eigenvalue λ_n of the Laplacian matrix, specifically,

$$\frac{2 - \lambda_n}{2} \leq \beta(G) \leq \sqrt{2(2 - \lambda_n)}.$$

Furthermore, he also present a simple algorithm that finds a nonzero vector $\mathbf{x} \in \{0, \pm1\}^V$ such that $\beta(\mathbf{x}) \leq \sqrt{2(2 - \lambda_n)}$ given an eigenvector corresponding to λ_n.

Trevisan's inequality can be regarded as an analogue of the *Cheeger inequality* [AM85; Alo86], which relates the second smallest eigenvalue with the *conductance* of graphs. For a vertex subset

$\emptyset \subsetneq S \subsetneq V$, let

$$\phi(S) := \frac{w(E(S,\overline{S}))}{\min\{\mathrm{vol}(S), \mathrm{vol}(\overline{S})\}},$$

where $E(S,\overline{S})$ is the set of edges connecting S and $\overline{S}$. Then the conductance of G is defined as $\phi(G) := \min_{\emptyset \subsetneq S \subsetneq V} \phi(S)$. The Cheeger inequality states that $\frac{\lambda_2}{2} \le \phi(G) \le \sqrt{2\lambda_2}$. Furthermore, there is a simple algorithm that finds S such that $\phi(S) \le \sqrt{2\lambda_2}$ given an eigenvector corresponding to λ_2.

For graph conductance and closely related *sparsest cut*, there are various approximation algorithms, where the current best approximation ratio is $O(\sqrt{\log n})$ [ARV09; AK16]. In contrast, there is no known approximation algorithm for bipartiteness ratio.

2 Our contribution

We present the first $O(\log n)$-approximation algorithm for the bipartiteness ratio of undirected graphs. More precisely, we study the following *b-bipartitness ratio*. Let $b : V \to \mathbb{Z}_{++}$ be a positive vertex weight. For a vector $\mathbf{x} \in \{0, \pm 1\}^V \setminus \{\mathbf{0}\}$, let

$$\beta_b(\mathbf{x}) := \frac{\sum_{e=(i,j)\in E} w(e) \cdot |x_i + x_j|}{\sum_{i \in V} b(i) \cdot |x_i|}.$$

Then, we define the b-bipartiteness ratio of G by $\beta_b(G) := \inf_{\mathbf{x} \in \{-1,0,1\}^V \setminus \{\mathbf{0}\}} \beta_b(\mathbf{x})$. Note that the original bipartiteness ratio $\beta(G)$ (see (1)) is the special case of $\beta_b(G)$ where $b \equiv \deg$.

Theorem 1 There is a randomized $O(\log n)$-approximation algorithm for the b-bipartiteness ratio of an undirected graph. That is, the algorithm finds a nonzero vector $\mathbf{x} \in \{0, \pm 1\}^V$ such that $\beta_b(\mathbf{x}) \le O(\log n) \cdot \beta_b(G)$ with probability at least $1 - 1/\mathrm{poly}(n)$. The time complexity is $O(\log(w(E) \cdot b(V)) \cdot \log^3 n \cdot \max\{\log^2 n, \log b(V)\} \cdot \min\{b(V), n^2\})$ arithmetic operations and $O(\log(w(E) \cdot b(V)) \cdot \log^2 n)$ single-commodity max-flow computations on an auxiliary undirected graph of size $O(m + n)$.

Using the nearly-linear time algorithms for undirected single-commodity max-flow [Pen16], the running time of our algorithm is $\widetilde{O}(\min\{b(V), n^2\} + m)$ time. In the original bipartiteness ratio, we have $b(V) = O(m)$, so the running time is $\widetilde{O}(m)$.

References

[AM85] N. Alon and V. Milman. "λ_1, Isoperimetric Inequalities for Graphs, and Superconcentrators". *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 38.1 (1985), pp. 73–88.

[Alo86] N. Alon. "Eigenvalues and Expanders". *Combinatorica* 6.2 (1986), pp. 83–96.

[AK16] S. Arora and S. Kale. "A Combinatorial, Primal-Dual Approach to Semidefinite Programs". *Journal of the ACM* 63.2 (2016), pp. 1–35.

[ARV09] S. Arora, S. Rao, and U. Vazirani. "Expander Flows, Geometric Embeddings and Graph Partitioning". *Journal of the ACM* 56.2 (2009), pp. 1–37.

[Pen16] R. Peng. "Approximate undirected maximum flows in $O(m\mathrm{polylog}(n))$ time". In: *Proceedings of the twenty-seventh annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*. SIAM. 2016, pp. 1862–1867.

[Tre12] L. Trevisan. "Max Cut and the Smallest Eigenvalue". *SIAM Journal on Computing* 41.6 (2012), pp. 1769–1786.

(2+1) フリーな半順序集合上の重みつき半順序マトロイド交叉問題に対する多項式時間アルゴリズム

A polynomail time algorithm for the weighted poset matroid intersection problem on a (2 plus 1)-free poset

佐野 良夫 (Yoshio SANO)[1]
[1] 筑波大学 (University of Tsukuba)
e-mail : sano@cs.tsukuba.ac.jp

1　はじめに

マトロイドとは Whitney によって導入された概念である．効率的なアルゴリズムと密接な関係のある数理構造であるため，組合せ最適化の分野において重要な概念の 1 つである．マトロイド交叉問題とは与えられた 2 つのマトロイドの最大共通独立集合を求める問題である．Edmonds はマトロイド交叉問題に対して最大最小定理が成り立つことを示した．またマトロイド交叉問題およびその重みつき版である重みつきマトロイド交叉問題を解く多項式時間アルゴリズムが知られている．

半順序マトロイドはマトロイドの一般化の 1 つであり，マトロイドにおける台集合を半順序集合に拡張したものである．半順序マトロイドは Dunstan, Ingleton, Welsh [1] によって導入された超マトロイドを分配束上に定義したものと一致するため，分配超マトロイドとも呼ばれる．半順序集合上の組合せ最適化問題のいくつかは，半順序マトロイド上の最適化問題として定式化され，効率的なアルゴリズムを適用できることが知られている．

半順序マトロイド交叉問題は 2 つの半順序マトロイドの最大共通独立イデアルを求める問題である．Tardos [2] は，同じ半順序集合上に定義された 2 つの半順序マトロイドについて半順序マトロイド交叉問題に対する最大最小定理が成り立つことを示した．また関連研究として, マトロイド交叉問題の一般化の 1 つである半順序マトロイドの独立マッチング問題が Peled, Srinivasan [3] によって研究されており, 特定の構造をもつ二部グラフ上での問題に対しては多項式時間で解けることが示されている．しかしながら, 半順序マトロイド交叉問題を解く一般的な多項式時間アルゴリズムは知られていない.

本研究では，重みつき半順序マトロイド交叉問題を考え，半順序集合が $(\mathbf{2}+\mathbf{1})$ フリーで，重み関数が順序反転な場合に，重みつき半順序マトロイド交叉問題を解く多項式時間アルゴリズムを与える．

2　準備

$P=(E,\leqslant)$ を半順序集合とする．部分集合 $I \subseteq E$ に対して, 任意の $y \in I$ と $x \in E$ について $x \leqslant y$ であるならば $x \in I$ が成り立つとき, I を P の**イデアル**という．部分集合 $X \subseteq E$ に対して, X が生成するイデアル $[X]$ を $[X] := \{y \in E \mid$ ある $x \in X$ に対して $y \leqslant x\}$ で定義する．また部分集合 $X \subseteq E$ に対して, P における X の極小な要素全てからなる集合を $\mathrm{Min}(X)$ で表す．同様に P における X の極大な要素全てからなる集合を $\mathrm{Max}(X)$ で表す.

$P=(E,\leqslant)$ を半順序集合, $\mathcal{F}$ を P のイデアルの族とする．$(P,\mathcal{F})$ の組が以下の性質を満たすとき**半順序マトロイド**という.

(a) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(b) $X \subseteq Y \in \mathcal{F}$ かつ X が P のイデアルならば, $X \in \mathcal{F}$.
(c) $X, Y \in \mathcal{F}$ かつ $|X| < |Y|$ ならば, $X \cup \{e\} \in \mathcal{F}$ を満たす $e \in \mathrm{Min}(Y \setminus X)$ が存在する.

半順序マトロイド $M = (P, \mathcal{F})$ に対して $\mathcal{F}$ の各要素を M の**独立イデアル**といい, 極大な独立イデアルを M の**基**という.

2 つの半順序マトロイド $M_1 = (P, \mathcal{F}_1)$ と $M_2 = (P, \mathcal{F}_2)$ に対して，$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ の要素を M_1 と M_2 の**共通独立イデアル**という．2 つの半順序マトロイドに対して, 最大サイズの共通独立イデアルを見つける問題

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\}$$

を**半順序マトロイド交叉問題**という．半順序マトロイド交叉問題を解く一般的な多項式時間アルゴリズムは知られていない.

$w : E \to \mathbb{R}$ を E 上の重み関数とする．$P = (E, \leqslant)$ 上の 2 つの半順序マトロイドに対して, 最大重みの共通独立イデアルを見つける問題

$$\max\{w(X) \mid X \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\}$$

を**重みつき半順序マトロイド交叉問題**という．ここで，$w(X) := \sum_{e \in X} w(e)$ である.

3 主結果

半順序集合が $(\mathbf{2}+\mathbf{1})$ **フリー**であるとは，2 要素のチェインと 1 要素のチェインの直和を誘導部分半順序集合として含まないときをいう．半順序集合 $P = (E, \leqslant)$ 上の重み関数 $w : E \to \mathbb{R}$ が，**順序反転**であるとは，$x, y \in E$ について $x \leqslant y$ ならば $w(x) \geq w(y)$ となっているときをいう．本研究の主結果は以下の通りである.

定理 1 $(\mathbf{2}+\mathbf{1})$ フリーな半順序集合 $P = (E, \leqslant)$，P 上の順序反転な重み関数 $w : E \to \mathbb{R}$，P 上の半順序マトロイド $M_1 = (P, \mathcal{F}_1)$, $M_2 = (P, \mathcal{F}_2)$ に対して，重みつき半順序マトロイド交叉問題 $\max\{w(X) \mid X \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\}$ は多項式時間で解ける.

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP23K03194 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] F. D. J. Dunstan, A. W. Ingleton, and D. J. A Welsh: Supermatroids. In *Combinatorics (Proc. Conf. Combinatorial Math., Math. Inst., Oxford, 1972)*, pp. 72–122 (1972).
[2] É. Tardos: An intersection theorem for supermatroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **50** (1990) 150–159.
[3] U. N. Peled and M. K. Srinivasan: Poset matching – a distributive analog of independent matching. *Discrete Mathematics* **114** (1993) 403–424.

Faster algorithms on linear delta-matroids

小穴 智大 (Tomohiro Koana)[1], Magnus Wahlström[2],
[1] 慶應大学 (Keio University), [2] University of London, Royal Holloway
e-mail : tomohiro.koana@gmail.com

1　概要

マトロイドは, 線形独立性やグラフの非巡回性といった概念を一つの枠組みに統合する, 離散数学の基本的対象である. マトロイドは有限集合 V とその部分集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ (基と呼ぶ) で構成され, 次の交換公理を満たす.

$$\forall X, Y \in \mathcal{F},\ \forall x \in X \setminus Y,\ \exists y \in Y \setminus X :\ (X \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{F}.$$

この公理から, すべての基 $F \in \mathcal{F}$ の要素数は等しいことが従う.

Bouchet が 1980 年代に導入した **デルタマトロイド**は, 上記の交換公理を対称差に置き換えることでマトロイドを一般化したものである [1]. 有限集合 V と部分集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ (feasible sets と呼ぶ) について,

$$\forall X, Y \in \mathcal{F},\ \forall e \in X\Delta Y,\ \exists e' \in X\Delta Y :\ X\Delta\{e, e'\} \in \mathcal{F}$$

が成り立つとき $(V, \mathcal{F})$ をデルタマトロイドと呼ぶ. ここで $X\Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ は対称差を表す. マトロイドと異なり, デルタマトロイドでは feasible sets の要素数が一様である必要はない.

アルゴリズム面では**線形マトロイド**が重要である. これは, 列が V に対応する行列 A に対し, 任意の $F \subseteq V$ で $A[\cdot, F]$ が正則ならば $F \in \mathcal{F}$ となるようなマトロイドを指す. 行・列それぞれが V に対応する歪対称行列 A $(A = -A^\top)$ に対して

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq V \mid A[X, X] \text{ が正則 }\}$$

と定めると, $(V, \mathcal{F})$ はデルタマトロイドになることが知られている. 以下, このデルタマトロイドを $\mathbf{D}(A)$ と記す.

ただし, $\mathbf{D}(A)$ では常に $\emptyset \in \mathcal{F}$ となるため, 線形マトロイドそのものは表現できない. そこで固定集合 $T \subseteq V$ を取り, *twist*

$$\mathbf{D}(A)\,\Delta\,T = (V, \{\, F\Delta T \mid F \in \mathcal{F}\})$$

を用いて**線形デルタマトロイド**を定義する.

2　提案手法

■ **Contraction に基づく表現の導入**　twist は対称差を取るため, アルゴリズムへの応用が難しいという欠点がある. 本研究 [2] では, この問題を解決するために *contraction* に基づく線形表現を導入する. 部分集合 $T \subseteq V$ に対し, デルタマトロイド $D = (V, \mathcal{F})$ の T における contraction を

$$D/T = (V \setminus T, \{F \setminus T \mid F \in \mathcal{F}, T \subseteq F\})$$

と定義する. 行・列それぞれが $V \cup T$ に対応する歪対称行列について, $\mathbf{D}(A)/T$ を新たな線形表現と定義する.

本研究では, twist による表現が与えられた場合に contraction 表現を $O(n^{\omega})$ 時間 (ここで $\omega < 2.372$ は行列積の指数) で計算できること, さらにその逆変換も同一計算量で可能であることを示した.

■ 最大重み feasible set の高速化 デルタマトロイドでは, 最大重み feasible set を一種の貪欲アルゴリズムで求められることが知られている. この手法を線形デルタマトロイドに適用すれば, 最大重み feasible set を $O(n^{\omega+1})$ 時間で計算できる. 本研究では, contraction に基づく線形表現を用いること (twist 表現が与えられた場合, 前述の通り contraction 表現に変換可能) で, $O(n^{\omega})$ 時間での解法が得られることを示した.

■ デルタマトロイドパリティ問題の高速化 **デルタマトロイドパリティ問題**では, デルタマトロイド $D = (V, \mathcal{F})$ と V のペア分割 $\mathcal{P} = \{\{a_1, b_1\}, \ldots, \{a_m, b_m\}\}$ が与えられ, $\mathcal{P}$ の各ペアのうち片方だけを含むペアの数を最小化する feasible set を探索する. Geelen–岩田–室田 [3] による増加路アルゴリズムは $O(n^4)$ 時間であった. 本研究では, contraction 表現と Harvey の手法 [4] を基に, 乱択 $O(n^{\omega})$ 時間を達成できることを示した.

■ 最大重みデルタマトロイド交叉 2 つのデルタマトロイド $D_1 = (V, \mathcal{F}_1)$, $D_2 = (V, \mathcal{F}_2)$ と重み関数 $w : V \to \{1, \ldots, W\}$ が与えられたとき, $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ に属する集合 X で重み $w(X) = \sum_{e \in X} w(e)$ を最大化する問題を**最大重みデルタマトロイド交差**と呼ぶ. この問題は, 重みがない場合 (すなわち $W = 1$) でさえ多項式時間アルゴリズムが知られておらず, 垣村と高松により未解決問題とされていた [5]. Contraction に基づく表現を利用することで, 本問題を一変数多項式行列の行列式計算に帰着できることを示した. これにより, 本問題の決定問題が乱択 $O(Wn^{\omega})$ 時間で解けることを示した. 解の構築は $O(Wn^{\omega+1})$ 時間で実現できる.

謝辞 本研究は JST ERATO Grant Number JPMJER2301 の支援を受けております.

参考文献

[1] André Bouchet. Greedy algorithm and symmetric matroids. *Math. Program.*, 38(2):147–159, 1987.

[2] Tomohiro Koana and Magnus Wahlström. Faster algorithms on linear delta-matroids. In *Proceedings of the 42nd International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2025)*, volume 327 of *LIPIcs*, pages 62:1–62:19. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2025.

[3] James F. Geelen, Satoru Iwata, and Kazuo Murota. The linear delta-matroid parity problem. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 88(2):377–398, 2003.

[4] Nicholas J. A. Harvey. Algebraic algorithms for matching and matroid problems. *SIAM J. Comput.*, 39(2):679–702, 2009.

[5] Naonori Kakimura and Mizuyo Takamatsu. Matching problems with delta-matroid constraints. *SIAM J. Discret. Math.*, 28(2):942–961, 2014.