

周期的活性化関数を用いたニューラルネットワークによる 位相振幅振動子モデルの応答特性推定

Inferring response characteristics of phase-amplitude oscillator models using neural networks with periodic activation functions

馬場 元 (Gen Bamba)¹, 山下 洋史 (Hiroshi Yamashita)¹,

鈴木 秀幸 (Hideyuki Suzuki)¹, 白坂 将 (Sho Shirasaka)¹,

¹ 大阪大学大学院情報科学研究科 (Graduate School of Information Science and Technology,

The University of Osaka)

e-mail : gen.bamba@ist.osaka-u.ac.jp

1 概要

振動システムは、物理学や生物学、工学などの分野で広く研究されており、これらのシステムの解析や制御には、ダイナミクスの記述に本質的な役割を果たす自由度のみを抽出した縮約モデルが重要な役割を果たす [1]. 特に、位相応答曲線 (Phase Response Curve; PRC) や isostable 応答曲線 (Isostable Response Curve; IRC) は、自励振動子の縮約モデルにおける外部入力応答特性の記述に必要な基本的対象である。既存の応答特性推定手法として、これらの応答曲線をフーリエ級数展開したときの係数を推定するものがある [2]. しかし、フーリエ級数展開は、急峻な変化や非滑らかさを伴う応答関数を扱う場合には非効率であり、緩和振動子 [3] などの精確かつ効率的な縮約モデリングは困難であると考えられる。一方、周期的活性化関数を用いたニューラルネットワーク (Neural Network; NN) は高い表現力を持ち、非滑らかで非線形な応答関数を効率的に学習する能力がある [4, 5]. 本研究では、緩和振動子のような急峻な応答特性を示す系のデータ駆動縮約モデリングを効率的に行うことを目的として、周期的活性化関数を用いた NN による応答特性推定手法を提案する。緩和振動領域における Van der Pol 振動子を用いて、手法の妥当性を検証する。

2 問題設定

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, u(t)), \quad y = F_{\text{out}}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$ はシステムの状態、 $u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力、 $y \in \mathbb{R}$ は観測出力である。制御入力を一定値 p_0 に固定すると、周期 T の指数安定なリミットサイクル $\mathbf{x}_\gamma(p_0, t)$ が存在するとする。

このような自励振動子において、リミットサイクル周辺の挙動を効率的にモデル化するためには、位相座標、isostable 座標を用いた次元縮約が有効である。位相座標 θ はリミットサイクル上の位置を示し、isostable 座標 ψ_j ($j = 1, \dots, N-1$) はリミットサイクルからの横断方向の距離を表す。 \mathbf{x}_γ のフロケ指数 κ_i を $0 = \kappa_0 > \text{Re}(\kappa_1) \geq \text{Re}(\kappa_2) \cdots \geq \text{Re}(\kappa_\beta) \gg \text{Re}(\kappa_{\beta+1}) \geq \cdots \geq \text{Re}(\kappa_{N-1})$ とすると、 $\psi_{\beta+1}, \dots, \psi_{N-1}$ は速やかに指数減衰するためにその寄与を近似的に無視することができる。このとき、入力を $U(t) = u(t) - p_0$ として、以下の縮約モデルを得る：

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega + Z(\theta, \psi_1, \dots, \psi_\beta)U(t), \\ \dot{\psi}_j &= \kappa_j \psi_j + I_j(\theta, \psi_1, \dots, \psi_\beta)U(t), \quad (j = 1, \dots, \beta), \\ y(p_0, \theta, \psi_1, \dots, \psi_\beta) &= y(\mathbf{x}_\gamma(p_0, \theta)) + G(\theta, \psi_1, \dots, \psi_\beta). \end{aligned}$$

ここで Z, I_j はそれぞれ位相応答曲線 (PRC) , 位相応答曲線 (PRC) と呼ばれる, また, G は周期軌道からの偏差に対応する観測出力の補正項である. $\omega (= \frac{2\pi}{T})$ は固有振動数である.

3 提案手法

急峻な時間変化を示す振動子のことを緩和振動子と呼び, ニューロンや発振回路, 化学振動のモデルなどでさまざまな現れる [3]. 緩和振動子の PRC, IRC も急峻な変動を示すため, その波形をフーリエ級数として精度よく表現するためには多数の高調波が必要となる. そこで, sinusoidal neural network [5] というニューラルネットワークを用いることを提案する. フーリエ級数展開では高周波成分を表現するのに多数の項が必要となるが, sinusoidal neural network は周期的な活性化関数を用いることで, 急峻な変化に対してもギブズ現象などを回避したパラメータ効率のよい表現が可能であることが知られている. 本研究では, sinusoidal neural network を用いて, 振動子縮約モデルの応答特性を推定する:

$$X(\theta, \psi_1, \dots, \psi_\beta) \approx \text{NN}_X(\theta, \psi_1, \dots, \psi_\beta), \quad X = Z, I_j, G \quad (2)$$

ここで, NN_X は X を推定する sinusoidal neural network である.

4 実験設定

パラメータの選び方によって緩和振動を示す Van der Pol 振動子を対象に, 提案手法の有効性を検証した. モデルは次の微分方程式で定義される:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 + U(t)$$

リミットサイクル周辺の動的挙動を位相座標 θ と振幅座標 ψ で表現し, 制御入力 $U(t)$ を入力として NN を用いて応答関数 Z, I および補正項 G を推定した. 観測変数は $y = x_1$ とした. 縮約モデルにより得られる出力 $y_{\text{reduced}}(t)$ と, 完全モデル ($y(t)$ の時系列の真値) により得られる出力 $y_{\text{full}}(t)$ を比較し, 平均絶対誤差 (MAE) を算出し評価した. また, 提案手法の有効性を従来のフーリエ級数展開による推定と比較することで検証した.

参考文献

- [1] 蔵本 由紀, 河村 洋史, 同期現象の科学: 位相記述によるアプローチ, 京都大学学術出版会, 2017.
- [2] Talha Ahmed and Dan Wilson. Phase-amplitude coordinate-based neural networks for inferring oscillatory dynamics. *Journal of Nonlinear Science*, 34(1):15, 2024.
- [3] Christian Kuehn. *Multiple time scale dynamics*, Springer, 2015.
- [4] Vincent Sitzmann, Julien Martel, Alexander Bergman, David Lindell, and Gordon Wetzstein. Implicit neural representations with periodic activation functions. *Advances in neural information processing systems*, 33:7462–7473, 2020.
- [5] Tiago Novello. Understanding sinusoidal neural networks. arXiv:2212.01833, 2022.

試行間平均によるリザーバー計算の情報処理能力の拡張

Enhancing information processing of reservoir computing via trial average

川原 佑太 (Yuta Kawahara)¹, 秋田 大 (Dai Akita)¹,
高橋 宏知 (Hirokazu Takahashi)¹

¹ 東京大学大学院情報理工学系研究科知能機械情報学専攻 (The University of Tokyo),
e-mail : kawahara-yuta169@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

1 はじめに

近年、機械学習の分野で注目を集めているリザーバー計算は、隠れ層（リザバ）で重みの更新を行わず、出力層の重みのみを更新するリカレントニューラルネットワークを用いた計算である。重みを更新するために内部のダイナミクスに介入する必要がないため、リザバには様々な物理系を用いた研究も多い。一方で、多くの物理系では同一の入力時系列下でも状態が収束せず、それにより計算資源としての活用が十分できていない。そこで本発表では、シミュレーションおよび神経回路をリザバとして用いた実験において、同一の入力時系列下でばらつきを示すリザバの状態のトライアル間での平均を取る操作が情報処理の性能に与える効果を情報処理容量 [1] により定量的に評価する。

2 ランダム力学系としてのノイズつきリザバ

入力時系列の従う確率空間を (U, \mathcal{U}, η) 、ノイズの従う確率空間を (V, \mathcal{V}, ξ) とする。どちらも各元は \mathbb{N} で添字付けられているものとする。このとき、各時刻 $t \in \mathbb{N}$ でのリザバの状態 $x(t) \in X$ は

$$x(t) = \varphi(t, (u, v)) x(0) \quad (1)$$

と表せる。ただし、 $\varphi(t, (u, v))$ は入力およびノイズの実現値 u, v 下での t ステップ分の時間発展に対応する写像（ランダム力学系）である。

各時刻 t で $(u, v, x(t))$ は確率測度 μ_t に従うとし、ある \mathcal{U} -可測集合 $A \subset U$ で条件づけた $(V \times X)$ 上の確率測度 $\mu_t^{\{u \in A\}}$ を考える。同一入力時系列を繰り返し、その平均を取る操作（トライアル平均）は、 $(V \times X)$ から X への射影を π_X とすると、

$$\bar{x}(t) = \int x(t) d\left(\mu_t^{\{u \in A\}} \circ \pi_X^{-1}\right) \quad (2)$$

を計算することに対応する。ここで、一般に $\mu_t^{\{u \in A\}}$ が t の関数である場合、 $\bar{x}(t)$ も t の関数である。一方、 μ が不変測度であり、 $\mu_t \equiv \mu$ であるならば $\bar{x}(t)$ は t の関数ではなく、入力時系列 u のみの関数となる。

本発表では、シミュレーションおよび実験のそれぞれでデータの分布がある不変測度に従っているという仮定の下、トライアル平均の効果と力学系の特性について議論する。

3 シミュレーション

ダイナミクスが下式で表される Echo State Network を用いてシミュレーションを行った。

$$x_i(n+1) = \tanh \left(\sum_{j=0}^N W_{ij} x_j(n) + w_i^{in} u(n) + v_i(n) \right) \quad (3)$$

ただし、入力 $u(n) \sim \text{Bernoulli}(0.5)$ であり、ノイズ $v_i(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$ とする。また、内部結合行列 W のスペクトル半径を s で表す。

トライアル平均をしない状態 $x(t)$ を元にリザバ計算を行う場合、スペクトル半径 s およびノイズ分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ の標準偏差 σ が大きいほど、情報処理容量が低下する結果となった。一方、トライアル平均した状態 $\bar{x}(t)$ によるリザバ計算では、そのような単調な傾向とは異なり、スペクトル半径によってはある $\sigma > 0$ において情報処理容量が最大になる結果が得られ、また、スペクトル半径の大小よりも状態の自己相関から推定された系の時定数の方が情報処理容量との強い関連が見られた。

なお、本シミュレーションで用いた Echo State Network は非ノイズ下 $\sigma = 0$ ではスペクトル半径が $s = 1.5 \sim 1.7$ 以上で同一の軌道に収束しなくなり、またリアプノフ指数の符号が正になった。このように、トライアルごとのばらつきは確率的にランダムなノイズだけではなく、力学系のダイナミクスが同一の軌道に収束しないこと（カオス）に起因する場合もある。本シミュレーションでは、ばらつきの原因に関わらず、一般的にトライアル平均した状態を用いることで情報処理容量が向上することを確認した。また、ノイズ下のトライアル平均による情報処理性能の上昇には、線形な情報処理の寄与が大きいことが分かった。

4 実験

多点電極アレイ上に培養した神経細胞の時間当たりの発火数を状態とした物理リザバを構築し、同一の培養系に同一の入力時系列を電気刺激として加える実験を 100 トライアル行った。平均を求めるために用いたトライアルの数が多いほど、ほぼ単調に情報処理容量は上昇した。

5 考察

一般に、リザバが高い情報処理容量を持つためには Echo state 性

$$\forall x, x' \in X, \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall \epsilon > 0, \forall N > N_0, \|\varphi(N, u)x - \varphi(N, u)x'\| < \epsilon \quad (4)$$

が要求される。本シミュレーション系の結果から、1 トライアルでは Echo state 性を満たさない場合であっても、複数トライアルで平均をとると高い情報処理容量をもつ、つまり Echo state 性を満たす場合があることが分かった。

神経系を始めとする物理系のトライアル間での変動をノイズとカオスのどちらによるものとしてモデル化すべきかは長く議論されてきた。本結果により、いずれの場合でもトライアル平均により物理系を用いたリザバ計算の性能を向上させることができることが示唆された。

謝辞 本研究は、科研費 (23H03465, 24H01544, 24K20854, 25H02600)、AMED(24wm0625401h0001)、旭硝子財団、セコム科学技術振興財団の助成を受けた。

参考文献

- [1] Dambre, J., Verstraeten, D., Schrauwen, B., and Massar, S. (2012). Information processing capacity of dynamical systems. Scientific reports, 2(1), 514.

量子統計多様体の余接バンドルを相空間とする 3 種の測地線の表現と求積性

Expressions of three types of geodesics on the cotangent bundle of quantum statistical manifold and their quadrature

上野 嘉夫 (Yoshio Uwano)

京都薬科大学 (Kyoto Pharmaceutical University)

e-mail : uwano@mb.kyoto-phu.ac.jp

1 概要

統計多様体とは、有限個のパラメータで指定される特定の確率分布の集合（確率分布族）に多様体構造を持たせたものである。統計多様体特有の構造として、Fisher 計量で与えられる Riemann 構造や、 α -接続と呼ばれる 1-パラメータの affine 接続が典型である。 α -接続は $\alpha \in [-1, 1]$ で指定され、 $\alpha = 1$ のときは指数型 (e-) 接続、 $\alpha = -1$ のときは混合型 (m-) 接続と呼ばれる。また、 $\alpha = 0$ 以外是非計量的接続であり、 $\alpha = 0$ のときに Riemann(R-) 接続となっている。 α -接続に随伴する測地線として、主たる関心の対象は $\alpha = 0, \pm 1$ の場合であり、本演題のいう 3 種類の測地線である。

さて、これらの測地線は統計多様体上の 2 階常微分方程式の解曲線であるから力学系理論の観点からも興味深い対象である。本講演では、 n 次量子密度行列のなす量子統計多様体 Q_n の余接バンドル T^*Q_n 上の 1 階常微分方程式の形で 3 種の測地線の方程式を表現し、その求積性やハミルトン性などについての結果を報告する。なお結果は、有限集合上の離散分布族のなす古典統計多様体の余接バンドル上で記述された 3 種の測地線に関して、講演者が既に得た結果 [?] の量子統計幾何版になっている。

2 幾何的な設定

以下では、 n 次 Hermite 行列の集合を H_n 、 n 次正定値 Hermite 行列の集合を H_n^+ 、トレース 0 の n 次 Hermite 行列の集合を $H_{n,0}$ で表す、量子統計多様体 Q_n とは量子密度行列の集合

$$Q_n = \{r \in H_n^+ \mid \text{tr}(r) = 1\}, \quad (1)$$

である。 n 次行列 A, B の対称化積を $A \circ B = (AB + BA)/2$ とするとき、 r における Q_n の接ベクトル $U \in T_r Q_n \cong H_{n,0}$ の対称化対数微分 (SLD) $L_r(U) \in H_n$ は、

$$U = r \circ L_r(U) \quad (U \in T_r Q_n) \quad (2)$$

で一意的に定まる n 次 Hermite 行列である。 Q_n の SLD-Fisher 計量は、接空間 $T_r Q_n$ の内積

$$\langle U, U' \rangle_r = \text{tr}(U L_r(U')) = \text{tr}(r L_r(U) L_r(U')) = \text{tr}(L_r(U) U') \quad (U, U' \in T_r Q_n \cong H_{n,0}) \quad (3)$$

により定まる。 Q_n の余接バンドル T^*Q_n は、SLD-Fisher 計量を用いた双対対応と SLD を用いて

$$T^*Q_n = \{(r, p) \in Q_n \times H_n \mid \text{tr}(r \circ p) = \text{tr}(rp) = 0\} = L_r(T_r Q_n) = L_r(H_{n,0}) \quad (4)$$

で実現される。微分方程式の Hamilton 性の議論のために、 T^*Q_n に標準的な symplectic 形式

$$\omega_{(r,p)}((U, V), (U', V')) = \text{tr}(V U' - V' U) \quad ((U, V), (U', V') \in T_{(r,p)}(T^*Q_n)) \quad (5)$$

を導入しておく。

3 結果

量子統計多様体 Q_n においては、座標関数が密度行列そのものと考えてよい状況であり、座標による接続係数の表現を計算して Q_n 上の 2 階の測地線方程式を書き下し、それを T^*Q_n 上で 1 階化するという（ある意味で統一的な）戦略は採り難いところである。いささか対症療法的ではあるが、e-測地線には Hebb 型学習方程式への解析力学的アプローチ (Nakamura[?]) と、同学習方程式と e-測地線の関係 (U-[?]) を融合させた視点から、m-測地線には「直線解」への力学的視点から、R-測地線には Riemann 多様体上の自由粒子系の視点から、 T^*Q_n 上の 1 階常微分方程式による記述を導出する。微分方程式は、それぞれ

$$\text{m: } \begin{cases} \dot{r} = r \circ p, \\ \dot{p} = -L_r(p \circ (r \circ p)) \end{cases} \quad \text{R: } \begin{cases} \dot{r} = r \circ p, \\ \dot{p} = -\frac{1}{2}\text{tr}(rp^2)I - \frac{1}{2}p^2 \end{cases} \quad \text{e: } \begin{cases} \dot{r} = 2rpr - 2\text{tr}(rpr)r, \\ \dot{p} = -2prp + 2\text{tr}(rpr)p \end{cases} \quad (6)$$

となり、すべて求積的に解ける。本予稿では行数の関係で $r(t)$ のみを紹介する。

$$\text{m: } r(t) = r(0) \circ (tp(0) + I) \quad (0 \leq t < t_m) \quad (7)$$

$$\text{R: } r(t) = R(t)r(0)R(t)^\dagger, \quad R(t) = I \cos \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}t + p(0) \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \sin \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}t \quad (0 \leq t < t_R) \quad (8)$$

$$\text{e: } r(t) = S(t)^{-1}e^{r(0)p(0)t}r(0)(e^{r(0)p(0)t})^\dagger, \quad S(t) = \text{tr}(e^{r(0)p(0)t}r(0)(e^{r(0)p(0)t})^\dagger) \quad (9)$$

ただし、 $t_m = \min\{t > 0 \mid \det(tp(0) + I) = 0\}$, $t_R = \min\{t > 0 \mid \det R(t) = 0\}$ であり、 $\varepsilon = \text{tr}(r(0)p(0)^2)/2$ である。3 種の測地線系の力学的あるいは幾何学的特徴は以下のとおりである。

- i m-測地線と R-測地線は有限時間内でしか存在しないが、e-測地線は時間無限大まで存在する。
- ii R-測地線系と e-測地線系は Hamilton 系である。それぞれのハミルトニアンは、 $\text{tr}(r(0)p(0)^2)/2$ と $\text{tr}((r(0)p(0))^2)$ である。一方、m-測地線系は Hamilton 系ではない。
- iii R-測地線と e-測地線は、 Q_n への $GL(n)$ -作用 $\Phi_g : r \mapsto (\text{tr}(grg^\dagger))^{-1}grg^\dagger$ ($g \in GL(n)$) を用いて生成される軌道である。また、m-測地線は $GL(n)$ -作用で生成される軌道の微分である。
- iv e-測地線は、 Q_n 上の平均化 Hebb 型方程式の族を実現する [?].
- v 3 種の測地線系は、 $SU(n)$ -作用 $(r, p) \mapsto (hrh^\dagger, hph^\dagger)$ ($h \in SU(n)$) の下で不変である。

偶数次元の古典統計多様体上では、それ自身の双対的な 2 つの座標系を活用した symplectic 構造を用いた Hamilton 力学が展開可能であることが知られているが、本講演や [?] の統計多様体の余接バンドルを用いた枠組みとは本質的に異なることを付記する。

参考文献

- [1] Yoshio Uwano, The Phase Space Description of the Geodesics on the Statistical Model on a Finite Set –Trajectory Confinement and Integrability –, Gometric Science of Information 2023 (LNCS14072, Springer), pp.444-453, 2023.
- [2] Yoshimasa Nakamura, Neurodynamics and Nonlinear Integrable System of Lax type, Japan J. of Indust. Appl. Math., vol.11 (1994), pp.11-20.
- [3] Yoshio Uwano, All the trajectories of an extended-averaged Habbian learning equation on the quantum state space are the e-geodesics, Mathematical Modelling and Geometry, vo.4 (2016), pp.19-33.

大域結合写像に対するアトラクター痕跡の安定性

Stability of attractor-ruins for globally coupled map

和田康司 (Koji Wada)¹, 行木孝夫 (Takao Namiki)²,

¹ 北海道大学大学院理学院数学専攻, ² 北海道大学大学院理学研究院数学部門/MDS センター
e-mail : wada.koji.n4@elms.hokudai.ac.jp

1 概要

本講演では、大域結合写像 (GCM) に対して観測されるカオスの遍歴によって現れるアトラクター痕跡の安定性を評価した結果について紹介する。GCM における不変集合は空間に対する対称性により、対称群によって表現される部分空間である。パラメータに依存して不変集合の安定性が変化することが知られており、あるパラメータ領域において、軌道が不変集合の近傍に間欠的に滞在するカオスの遍歴と呼ばれる現象が観測される [1]。このとき、パラメータの摂動によって現れる横断リアプノフ指数が正と負の両方を持つ不変集合をアトラクター痕跡と呼ぶ。しかし、GCM におけるアトラクター痕跡の大域的な特徴はあまり知られていない。そこで本研究では、アトラクター痕跡の“安定性”を有効次元のエントロピーによって数値的に解析した。結果として、部分秩序相と呼ばれるパラメータ領域において多くのアトラクター痕跡に対する安定性が高いことが分かった。本講演の内容は [2] に基づく。

2 大域結合写像とカオスの遍歴

大域結合写像とは、ロジスティック写像が大域的に結合した離散力学系

$$x_{n+1}(i) = (1 - \varepsilon)f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{d} \sum_{j=1}^d f(x_n(j)), \quad i = 1, \dots, d$$

$$f(x) = \alpha x(1 - x), \quad \mathbf{x}_0 = (x_0(1), \dots, x_0(d)) \in [0, 1]^d, \quad (\alpha, \varepsilon) \in [0, 4] \times [0, 1].$$

である。ある定数 $\lambda \in (0, 1)$ が存在し、任意の n に対して $|x_{n+1}(i) - x_{n+1}(j)| \leq \lambda |x_n(i) - x_n(j)|$ が成立するならば第 i 座標と第 j 座標は同期 ($x(i) = x(j)$) する。同期の組み合わせは、 d 次対称群 S_d によって表現することができ、 $\sigma \in S_d$ に対応する同期状態は

$$H_\sigma = \{\mathbf{x} \in [0, 1]^d : x(i) = x(\sigma(i)), i = 1, \dots, d\}$$

の元として解釈することができる。さらに、任意の $\mathbf{x} \in [0, 1]^d$ と $\delta > 0$ に対して

$$\text{ED}(\mathbf{x}, \delta) = \inf_{\sigma \in S_d} \{\dim H_\sigma : H_\sigma \cup B_\delta(\mathbf{x}) \neq \emptyset\}$$

を有効次元と呼ぶ。また、 H_σ は GCM に対する不変集合でもあり、パラメータ (α, ε) に依存して安定性が変化する。特に、ロジスティック写像の分岐パラメータ α が小さい領域や、結合係数 ε が大きい領域においては $x(1) = \dots = x(d)$ を満たす不変集合 H_σ が安定となる。しかし、部分秩序相 (Partially ordered phase, 図 1) と呼ばれるパラメータ領域においては不変集合の横断リアプノフ指数が正となる点が現れ、軌道が不変集合付近に滞在する安定状態と高次元空間をカオス的に遷移する不安定状態を不規則に繰り返す (図 2) ことが知られており、このような現象をカオスの遍歴と呼ぶ。

しかし、GCM におけるアトラクター痕跡に対する大域的な性質はよく分かっていない。そこで、我々は有効次元のエントロピーによってアトラクター痕跡の安定性を数値的に評価した。

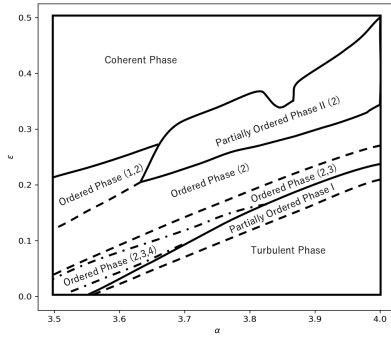


図 1. GCM のダイアグラム

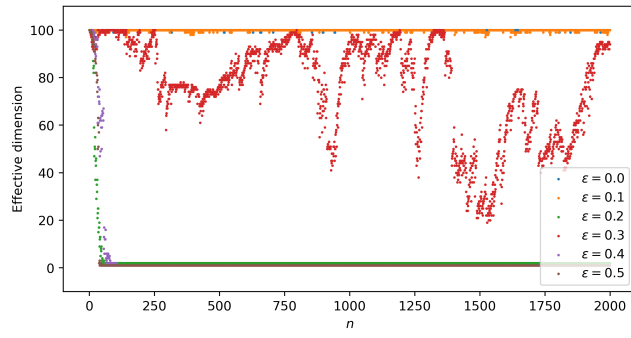


図 2. クラスター数の変動

3 アトラクター痕跡の安定性

まず、同期によって形成されるクラスターについて整理する。自然数 i, j に対して、同期を表す置換 $\sigma \in S^d$ によって同値関係 $i \sim j$ を定義することができる。このときの同値類の数を M 、各同値類の代表元を e_1, \dots, e_M とおく。また、

$$N_k^\sigma := \#\{m = 1, \dots, d : \exists l \in \mathbb{N}, s.t., k = \sigma^l(m)\}$$

とおく。GCM の軌道 $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^N$ に対して、

$$\sigma_n(\delta) := \arg \min_{\sigma} \{\dim H_{\sigma} : H_{\sigma} \cap B_{\delta}(\mathbf{x}_n) \neq \emptyset\}$$

とすると、これは時刻 n 、精度 δ におけるクラスターの

同期情報を表す。そして、 $C_n := (N_{e_1}^{\sigma_n(\delta)}, \dots, N_{e_M}^{\sigma_n(\delta)})$ は M 個の各クラスターが持つ要素数を表す。このとき、離散確率分布 (p_1, \dots, p_d) を

$$p_i := \frac{\#\{n = 0, \dots, N-1 : \text{ED}(\mathbf{x}_n, \delta) = i, C_n = C_{n+1}\}}{\#\{n = 0, \dots, N-1 : C_n = C_{n+1}\}}, \quad i = 1, \dots, d$$

とする。この離散確率分布に対するエントロピー $E = -\sum_{i=1}^d p_i \log p_i$ を計算した (図 3)。結果として、カオスの遍歴が観測される部分秩序相においてエントロピーが高くなっている。特に、部分秩序相 II において最も高くなっており、不変集合に対して負となる横断的リアプノフ指数が増加していることに加えて、多くのアトラクター痕跡において回帰性も高まっていると考えられる。

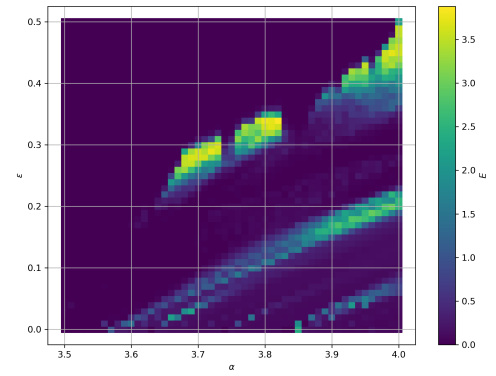


図 3. 各 (α, ϵ) に対するアトラクター痕跡の安定性

謝辞 本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2119, JSPS 科研費 23K2578503 の支援を受けている。

参考文献

- [1] Kaneko Kunihiro, “Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements”, Physica D: Nonlinear Phenomena 41, 137–172 (1990).
- [2] Koji Wada, Namiki Takao, “Evaluation of strength of attractor-ruins for globally coupled map (GCM) using optimal transport distance” (in preparation).