非自励系の遅れ微分方程式に関するいくつかの考察

Some Considerations on Non-Autonomous Delay Differential Equations

大平 健太 (Kenta Ohira)[1]
[1] 名古屋大学, 情報学研究科 (Graduate School of Informatics, Nagoya University)
e-mail : ohira.kenta.n7@f.mail.nagoya-u.ac.jp

1　概要

最近, 我々はある特殊な遅延微分方程式を研究している．それは特に時間によって変化する係数を持つ, 非自励系遅延微分方程式と呼ばれるカテゴリに属する．その微分方程式の一般解を求めることができた [?]．そして少し拡張した方程式についても同様の方法で一般解を導出できることが分かった．拡張前と拡張後の解の関係について考えていく．

2　微分方程式

具体的には以下の形をした方程式である．ここで t は時間, τ は遅れで, a 及び b は実数パラメータである．

$$\frac{dX(t)}{dt} + atX(t) = bX(t-\tau) \tag{1}$$

の $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\tau \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$ における一般解は以下であり, それはガウシアンの重ね合わせとなっている．

$$X(t) = \mathcal{C}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{b}{a\tau})^n e^{-\frac{1}{2}a(t-n\tau)^2} \tag{2}$$

これの導出と同様の手法を用いれば, 拡張した微分方程式

$$\frac{dY(t)}{dt} + (at+c)Y(t) = bY(t-\tau) \tag{3}$$

の $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $\tau \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$ における一般解が以下で得られることがわかる．

$$Y(t) = \mathcal{C}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{b}{a\tau})^n e^{-\frac{1}{2}a(t-(n\tau-\frac{c}{a}))^2} \tag{4}$$

3　拡張前後の解の関係

したがって両解 (??), (??) の a 及び b がそれぞれ等しい時, 以下を満たすことがわかる．

$$Y(t) = X(t+\frac{c}{a}) \tag{5}$$

すなわち $Y(t)$ は $X(t)$ を $\frac{c}{a}$ だけタイムシフトしたものとなっている．($c > 0$ だと「進み」, $c < 0$ だと「遅れ」)

4　解の挙動

図 1.

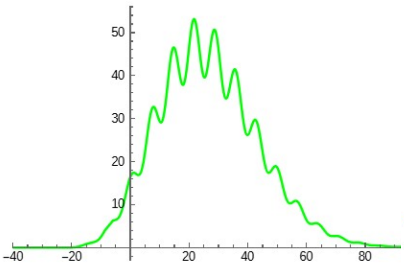


図 2.

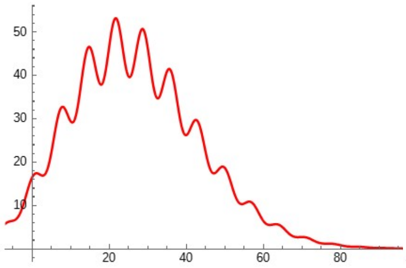


図 3.

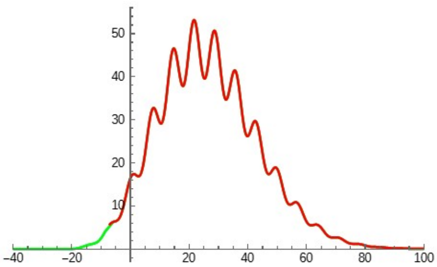


図 4.

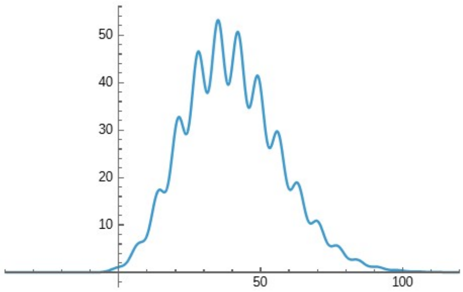
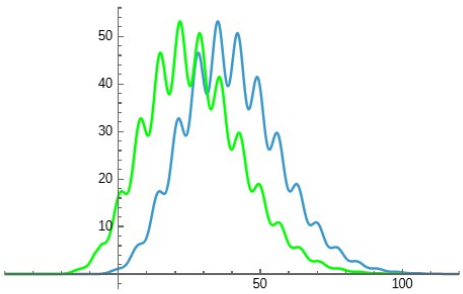


図 5.



先ほど得られた解の数値計算例．図 1〜3 は微分方程式 (**??**) の解 (**??**) についてであり, 図 1 は解をプロットしたもの．図 2 は解の $[-\tau, 0]$ の部分を初期関数として微分方程式 (**??**) を解いている．図 3 は図 1, 2 の両者が一致していることを表している．図 4 は微分方程式 (**??**) の解 (**??**) をプロットしたもの．図 5 は解 (**??**),(**??**) の比較であり, 解 (**??**) が解 (**??**) より時間先行している様子がわかる．すべての図について, パラメータ $a = 0.15$, $b = 6$, $c = 2$, 遅れ $\tau = 7$, 任意定数 $\mathcal{C} = 1$ としている．

謝辞　名古屋大学情報学研究科の大平英樹教授の有益なコメントに感謝します．この研究はトヨタ自動車の予兆学プロジェクト, 科研費 JSPS 19H01201, および JSPS 課題設定による先導的人．文学・社会科学研究推進事業 JPJS00122674991 より支援を受けました．..............................
....

参考文献

[1] K. Ohira, An exact solution for a non-autonomous delay differential equation, arXiv:2411.11402v4

遅延可積分系の数理

Mathematics of delay integrable systems

丸野 健一 (Ken-ichi Maruno)
早稲田大学理工学術院 (Waseda University)
e-mail : kmaruno@waseda.jp

1 概要

遅延微分方程式は，同一の独立変数に関して微分とシフトの両方を含む方程式として定義され，交通流や感染症などの数理モデルとして用いられている．可積分系では Painlevé 方程式の可積分な遅延類似である遅延 Painlevé 方程式が提案され，特異点閉じ込め，双線形形式，代数的エントロピーなど様々なアプローチで研究されてきた．

一方，これまでいくつかの可積分な遅延微分ソリトン方程式が提案され，その数学的性質が研究されてきた．最近，我々は既知のソリトン方程式の遅延類似を構築するための体系的な方法を提案した [1, 2]．このような遅延ソリトン方程式は N ソリトン解を持ち，遅延パラメータ 0 の極限を取ると既知のソリトン方程式に帰着する．また，遅延ソリトン方程式の研究で得られた離散時間遅延 Lotka-Volterra 方程式に対して超離散化を適用することによって，遅延箱玉系が得られ，興味深い性質を持つソリトン解を持つことがわかった [3]．さらに，最近，遅延ソリトン方程式の Lax ペアと保存量の構成法を示し，これによって遅延ソリトン方程式の可積分性が示され，遅延 Painlevé 方程式と遅延ソリトン方程式の関係を明らかにした [4]．講演では，これらの結果についての解説を行う．講演の内容は，中田健太，根岸幹太，松岡宏との共同研究の結果に基づく．

2 遅延ソリトン方程式の構成法

この節では，ソリトン方程式の可積分な遅延ソリトン方程式と，その N ソリトン解の構成方法を解説する．最初のステップは離散 KP 方程式

$$a(b-c)f_{n+1,m,k}f_{n,m+1,k+1}+b(c-a)f_{n,m+1,k}f_{n+1,m,k+1}+c(a-b)f_{n,m,k+1}f_{n+1,m+1,k}=0\,, \tag{1}$$

または，離散 2 次元戸田格子方程式

$$abf_{k+1,n+1,m}f_{k-1,n,m+1}+f_{k,n+1,m}f_{k,n,m+1}-(1+ab)f_{k,n+1,m+1}f_{k,n,m}=0\,, \tag{2}$$

に簡約を適用する．ここで，a,b,c は実定数である．この時，簡約条件に自由パラメータ α を導入する．この簡約を適用することにより，自由パラメータ α，離散変数 n,m，および時間格子パラメータ δ（これは a,b,c により定義される）に依存する離散方程式が得られる．この簡約により k に対する依存は取り除かれ，パラメータ α は m に対するシフト（例えば $f_{m+\alpha}$）として現れる．この離散方程式は，遅延離散ソリトン方程式とみなすことができる．

次に，遅延離散ソリトン方程式に対して以下の遅延微分極限を適用する：

$$\delta\to 0,\qquad m\delta=t,\qquad \alpha\delta=\tau=\mathrm{const.} \tag{3}$$

ここで，t は連続時間変数，τ は遅延パラメータである．この極限をとることで，t に対するシフトとして遅延パラメータ τ を含む遅延微分方程式が得られる．この遅延微分方程式は，遅延ソリトン方程

式と解釈される．例えば，離散 KP 方程式に簡約

$$f_{n,m,k+1} = f_{n+2,m+\alpha,k}\,, \tag{4}$$

を適用し遅延微分極限をとると，Lotka-Volterra (LV) 方程式

$$\frac{d}{dt}\log u_n(t) = u_{n+1}(t) - u_{n-1}(t)\,, \tag{5}$$

の遅延類似として，遅延 LV 方程式

$$\frac{d}{dt}\log\frac{u_n(t+\tau)}{u_{n-1}(t-\tau)} = u_{n+1}(t+\tau) - u_n(t+\tau) - u_{n-1}(t-\tau) + u_{n-2}(t-\tau)\,, \tag{6}$$

が得られる．

この構成における重要な点は，遅延ソリトン方程式の明示的な N ソリトン解が簡単に得られることである．これは，離散 KP 方程式または離散 2 次元戸田格子方程式の N ソリトン解に対して簡約と遅延微分極限を適用することで実現される．さらに，最初のステップにおける簡約の設定を適切に選べば，$\tau \to 0$ の極限として既知のソリトン方程式とその N ソリトン解が得られる．このとき，$\tau \to 0$ の極限で得られるソリトン方程式は，簡約の選び方に依存する．

したがって，本手法の最初のステップにおいていろいろな簡約を考慮することで，いろいろな遅延ソリトン方程式を構成することが可能となる．

3 遅延ソリトン方程式の可積分性と遅延 Painlevé 方程式

講演では，遅延ソリトン方程式の Lax ペアについても解説する予定である．得られた Lax ペアを用いることで，それらの保存量も導出され，可積分性が証明できる．

次に，遅延ソリトン方程式と遅延 Painlevé 方程式の関係について議論する．Painlevé 方程式は，ソリトン方程式の相似簡約によって導出できることがよく知られている．遅延 LV 方程式と遅延戸田格子方程式に空間 2 周期簡約を適用し，遅延 Painlevé II および III 方程式が導出される．これらの簡約を遅延 LV 方程式と遅延戸田格子方程式の行列式解に課すことにより，遅延 Painlevé 方程式の自励版の N ソリトン型行列式解を構築できる．これらは，任意のサイズの行列式構造を持つ自励的な遅延微分方程式の解である．これらの例は，方程式に含まれる遅延パラメータによって可能となる．

参考文献

[1] K. Nakata and K. Maruno, A systematic construction of integrable delay-difference and delay-differential analogues of soliton equations, J. Phys. A: Theor. Math., **55**. (2022), 335201.

[2] K. Nakata, Integrable delay-difference and delay-differential analogs of the KdV, Boussinesq, and KP equations, J. Math. Phys. **63** (2022) 113505.

[3] K. Nakata, K. Negishi, H. Matsuoka and K. Maruno, A delay analogue of the box and ball system arising from the ultra-discretization of the delay discrete Lotka–Volterra equation, J. Phys. A: Theor. Math., **57**. (2024), 145701.

[4] H. Matsuoka, K. Nakata and K. Maruno, Construction of the Lax pairs for the delay Lotka-Volterra and delay Toda lattice equations and their reductions to delay Painleve equations, Nonlinearity, (2025) 掲載決定, arXiv:2402.02204.

中心多様体理論を用いた時間遅れ付き離散ロトカ・ヴォルテラ方程式の局所安定性解析

Local Stability Analysis of Delayed Discrete Lotka-Volterra Systems Using Center Manifold Theory

山本 大成 (Taisei Yamamoto)[1], 山本 有作 (Yusaku Yamamoto)[2], 黒岩 巧 (Takumi Kuroiwa)[1], 岡 来美 (Kurumi Oka)[3], 石渡 恵美子 (Emiko Ishiwata)[4], 岩崎 雅史 (Masashi Iwasaki)[5]
[1] 東京理科大学大学院 理学研究科 (Graduate School of Science, Tokyo University of Science), [2] 電気通信大学 情報理工学研究科 (Department of Communication Engineering and Informatics, The University of Electro-Communiactions), [3] 京都大学大学院 情報学研究科 (Graduate School of Informatics, Kyoto University), [4] 東京理科大学 理学部第一部 (Department of Applied Mathematics, Tokyo University of Science), [5] 京都府立大学 生命理工情報学部 (Faculty of Life and Environmental Sciences, Kyoto Prefectural University)
e-mail：1424530@ed.tus.ac.jp

1　概要

離散ロトカ・ヴォルテラ方程式 (dLV) は生物の捕食・被捕食関係を記述する差分方程式であり，連続版のロトカ・ヴォルテラ方程式を離散化することで得られる．dLV は，ある条件の下で奇数番目の変数が定数に，偶数番目の変数が 0 に収束する漸近挙動を示すことが知られている．[1] では中心多様体理論によって dLV の局所安定性が示されている．本研究は，[2] で提案されている時間遅れ付き dLV(ddLV)

$$\begin{cases} u_k^{(n+1)}\left(1+u_{k-1}^{(n-\tau+1)}\right)=u_k^{(n)}\left(1+u_{k+1}^{(n-\tau)}\right), \quad k=1,2,\dots,2m-1, \\ u_0^{(n)}:=0, \quad u_{2m}^{(n)}:=0, \quad n=0,1,\dots \end{cases} \tag{1}$$

の平衡点の局所安定性を考える．[2] では，時間遅れが $\tau=1$ の場合について，中心多様体理論を用いて元の dLV の漸近状態に対応する平衡点の局所安定性を示した．本研究では，時間遅れ τ が任意の自然数にまで拡張した場合について紹介する．

2　時間遅れ付き離散ロトカ・ヴォルテラ方程式の安定性解析

時間遅れ τ を任意の自然数 ℓ とする．このとき, (1) は $\{u_k^{(n+1)}\}, \{u_k^{(n)}\}, \{u_k^{(n-\ell+1)}\}, \{u_k^{(n-\ell)}\}$ の 4 組の変数に関する漸化式となる．これを遅れのない系に変換する．$v_{1,k}^{(n)}\equiv u_k^{(n-1)}$, $v_{2,k}^{(n)}\equiv u_k^{(n-2)},\dots$, $v_{\ell,k}^{(n)}\equiv u_k^{(n-\ell)}$ とおき，[2] と同様に，時刻 $n+1$ での変数をハット付き，時刻 n での変数をハット無しで表すと，(1) は次のように書き直せる．

$$\hat{u}_k=\frac{1+v_{\ell,k+1}}{1+v_{\ell-1,k-1}}u_k \quad (k=1,2,\dots,2m-1), \tag{2}$$

$$\hat{v}_{1,k}=u_k \quad (k=1,2,\dots,2m-1), \tag{3}$$

$$\hat{v}_{j,k}=v_{j-1,k} \quad (j=2,3,\dots,\ell,k=1,2,\dots,2m-1). \tag{4}$$

$u_2=u_4=\cdots=u_{2m-2}=0$, $v_{j,2}=v_{j,4}=\cdots=v_{j,2m-2}=0 \quad (j=1,2,\dots,\ell)$ という点は (2)-(4) の平衡点になる．このような点の一つを $\mathbf{u}^*$ とし，その周りでの安定性を調べる．そのために，平衡点 $\mathbf{u}^*$ からの変位を表す変数を $\epsilon_i, \delta_{j,i} (j=1,2,\dots,\ell, i=1,2,\dots,2m-1)$ とし，ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}$ で表す．

$$\boldsymbol{\epsilon}=(\boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{e}}^\top\ \boldsymbol{\delta}_{1,\mathrm{e}}^\top\ \boldsymbol{\delta}_{2,\mathrm{e}}^\top\ \cdots\ \boldsymbol{\delta}_{\ell,\mathrm{e}}^\top\ \boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{o}}^\top\ \boldsymbol{\delta}_{1,\mathrm{o}}^\top\ \boldsymbol{\delta}_{2,\mathrm{o}}^\top\ \cdots\ \boldsymbol{\delta}_{\ell,\mathrm{o}}^\top\ )^\top. \tag{5}$$

$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{e}}$, $\boldsymbol{\delta}_{j,\mathrm{e}}$ は ϵ_i と $\delta_{j,i}$ の i が偶数の成分のみ，$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{o}}$, $\boldsymbol{\delta}_{j,\mathrm{o}}$ は奇数の成分のみを並べたベクトルである．(2)-(4) の線形化方程式は次のようになる．

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = D\boldsymbol{\epsilon} + \bar{\mathbf{p}}. \tag{6}$$

以後，ベクトルについてもハット付きは時刻 $n+1$ の場合を表す．D はヤコビアンであり，$\bar{\mathbf{p}}$ は ϵ の成分に関する 2 次以上の項を表している．(6) に適切な変数変換を施すと $\tilde{D}$ はブロック対角行列になり，各対角ブロック行列は 1 もしくは 1 未満の固有値を持ち，$\boldsymbol{\xi} = (\ \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{e}}^\top\ \boldsymbol{\eta}_{1,\mathrm{e}}^\top\ \boldsymbol{\eta}_{2,\mathrm{e}}^\top\ \cdots\ \boldsymbol{\eta}_{\ell,\mathrm{e}}^\top\ \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{o}}^\top\ \boldsymbol{\eta}_{1,\mathrm{o}}^\top\ \boldsymbol{\eta}_{2,\mathrm{o}}^\top\ \cdots\ \boldsymbol{\eta}_{\ell,\mathrm{o}}^\top\ )^\top$，$\bar{\mathbf{r}}$ を $\boldsymbol{\xi}$ の成分に関する 2 次以上の項とすると

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \tilde{D}\boldsymbol{\xi} + \bar{\mathbf{r}}. \tag{7}$$

離散力学系 (7) の平衡点の安定性について，[1] にならって解析を行うと，(7) は $\mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}_{\ell,\mathrm{o}}) = \mathbf{0}$ という中心多様体を持つことが示される．ただし，$\mathbf{h}(\boldsymbol{\eta}_{\ell,\mathrm{o}}) = (\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{e}}^\top\ \boldsymbol{\eta}_{1,\mathrm{e}}^\top\ \cdots\ \boldsymbol{\eta}_{\ell,\mathrm{e}}^\top\ \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{o}}^\top\ \boldsymbol{\eta}_{1,\mathrm{o}}^\top\ \cdots\ \boldsymbol{\eta}_{\ell-1,\mathrm{o}}^\top)^\top$ である．この中心多様体上に制限した力学系を考えると，(7) は $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\ell,\mathrm{o}} = \boldsymbol{\eta}_{\ell,\mathrm{o}}$ と書ける．この系は明らかに安定であるから，中心多様体理論より，(7) も安定となる．したがって，元の ddLV 系 (1) について，次のことが言える．

定理 1 $\tau = \ell$ とした ddLV 系 (1) について，u_{2k-1}^*（$k = 1, 2, \ldots, m$）を正の定数とするとき，$u_{2k-1}^{(n)} = u_{2k-1}^{(n-1)} = u_{2k-1}^{(n-2)} = \cdots = u_{2k-1}^{(n-\ell)} = u_{2k-1}^*$（$k = 1, 2, \ldots, m$），$u_{2k}^{(n)} = u_{2k}^{(n-1)} = u_{2k}^{(n-2)} = \cdots = u_{2k}^{(n-\ell)} = 0$（$k = 1, 2, \ldots, m-1$）という点は，この系の平衡点である．さらに $u_{2k-1}^* > u_{2k+1}^*$（$k = 1, 2, \ldots, m-1$）が成り立つならば，この平衡点は安定である．

数値実験では，概ね漸近安定であることが確認され，時間遅れ τ が大きくなると状態の変化が急激になる傾向も観察されている．図 1 は $\tau = 3$ のときの ddLV(1) の時間発展の例である．

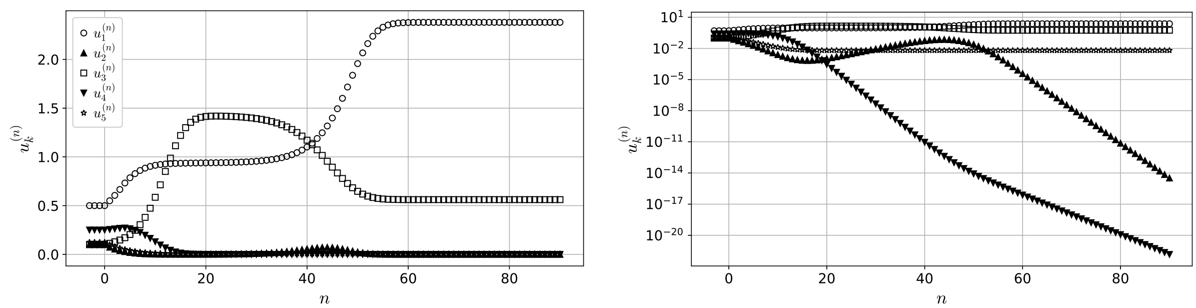


図 1. $\tau = 3, m = 3$ とした ddLV の各変数 $u_k^{(n)}(k = 1, 2, \ldots, 5)$ の時間発展．初期値は $u_1^{(n)} = 0.5, u_2^{(n)} = 0.1, u_3^{(n)} = 0.1, u_4^{(n)} = 0.25, u_5^{(n)} = 0.125$ $(n = -3, -2, -1, 0)$．左図は線形スケール，右図は対数スケールである．

参考文献

[1] M. Iwasaki, Y. Nakamura, Center manifold approach to discrete integrable systems related to eigenvalues and singular values, Hokkaido Math. J., 36 (2007), 759-775.

[2] Y. Yamamoto, T. Yamamoto, T. Kuroiwa, K. Oka, E. Ishiwata, M. Iwasaki, Discrete Lotka-Volterra systems with time delay and its stability analysis, Physica D, 474. (2025), 134562.

分布型時間遅れをもつ微分方程式の対称周期解

Symmetric periodic solutions for distributed delay differential equations

中田 行彦 (Yukihiko Nakata)
青山学院大学 理工学部 (Aoyama Gakuin University, College of Science and Engineering)
e-mail : ynakata@math.aoyama.ac.jp

1　時間遅れをもつ微分方程式

時間についての未知関数の導関数が，未知関数の過去の状態や履歴から定められる微分方程式は，時間遅れをもつ微分方程式（遅延微分方程式）と呼ばれている．様々な生命現象や生物現象において時間遅れのフィードバックや相互作用が無視できないことは多く，時間遅れをもつ微分方程式によって定式化された数理モデルは精力的に考えられてきた [1].

時間遅れをもつ微分方程式において，周期解の存在や安定性は，興味深い課題の一つである．Nussbaum は，定数時間遅れをもつ遅延微分方程式に対して，不動点定理を用いて，周期解の存在を一般的に示した [2]．Kaplan&Yorke は，微分方程式の非線形関数が，原点について対称的な奇関数である場合，定数時間遅れをもつ微分方程式の周期解は，あるハミルトン系常微分方程式の周期軌道から得られることを明らかにした [3].

分布型の時間遅れをもつ微分方程式では，未知関数の導関数は，過去の履歴から定められる．発表者は，分布型時間遅れを持つロジスティック型の微分方程式に対して，Duffing 方程式の解から，周期 2 の解を構成した．この周期 2 の解は，ヤコビの楕円関数を用いて表される [4]．さらに，一般の非線形性をもつ分布型遅延微分方程式に対して，ハミルトン系常微分方程式から周期 2 の解を得た [5]．ここでは，原点対称な奇関数の場合に注意を払って解析を行なっている．本発表では，非線形関数に対して対称性を課さない場合に，周期 2 の解の存在について得られた結果の発表を行う．

2　分布型の時間遅れをもつ微分方程式と周期 2 の解

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(0)=0,\ xf(x)>0\ \ (x\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$ を満たす連続関数とする．以下の分布型の時間遅れをもつ微分方程式の周期解について考える．

$$x'(t)=-\int_0^1 f(x(t-s))ds. \tag{1}$$

f の性質より，$x(t)\equiv 0$ は (1) の平衡点 (時間定常解) である．さらに，時間遅れのネガティブフィードバックが備わる．[4] で考察した微分方程式は，$f(x)=r(e^x-1), r>0$ とした (1) と同等である．

式 (1) に対して，周期 2 の解が存在すると仮定する．この周期 2 の解を $x(t)$ と表す．周期 2 の解は

$$x'(t)+x'(t-1)=-\int_0^2 f(x(t-s))ds=0 \tag{2}$$

を満たす．従って，定数 $c\in\mathbb{R}$ が存在し，

$$x(t)+x(t-1)=2c \tag{3}$$

が成り立つ．このことから，$(x(t),y(t))=(x(t),\int_0^1 f(x(t-s))ds)$ が満たす以下のハミルトン系常

微分方程式を得る．

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = f(x(t)) - f(2c - x(t)). \tag{4}$$

ここで c は (3) に現れる周期解から定められる定数である．ただし，(1) の周期 2 の解を，(4) から構成する際に，その値は先天的に与えられていない．(4) は，$(x, y) = (c, 0)$ を平衡点としてもつ．変数変換 $w(t) = x(t) - c$ から，$(w(t), y(t))$ が満たす以下の微分方程式を得る：

$$w'(t) = -y(t), \quad y'(t) = 2F(w(t); c). \tag{5}$$

ここで，$F(w; c) := \frac{1}{2}(f(w+c) - f(-w+c))$ と定める．$F(w; c)$ は次の性質をもつ：$(w, c) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$F(w; c) = -F(-w; c)$ が成り立つ．さらに，f は狭義単調増加関数であるとき，$w > 0$, $c \in \mathbb{R}$ に対して，$F(w; c) > 0$ が成り立つ．

初期条件 $(w(0), y(0)) = (w_0, 0)$, $w_0 > 0$ を満たす (5) の解を

$$(w(t), y(t)) = (w(t; w_0, c), y(t; w_0, c)) \tag{6}$$

と表す．この解は以下の等式を満たす：

$$\frac{1}{2}y^2(t) + 2L(w(t); c) = 2L(w_0; c), \quad L(w; c) := \int_0^w F(\xi; c) d\xi. \tag{7}$$

$w_0 > 0$, $c \in \mathbb{R}$ が，以下の等式

$$\int_0^{w_0} \frac{dw}{\sqrt{L(w_0; c) - L(w; c)}} = 1 \tag{8}$$

を満たすとき，(5) の解 (6) は，周期 2 の周期解である．以下，$w_0 > 0$, $c \in \mathbb{R}$ は，(8) を満たすとする．さらに $\int_0^1 f(w(t; w_0, c) + c) dt = 0$ であるとき，$x(t) = w(t; w_0, c) + c$ は (2) を満たす．ここで，(5) の解 (6) は，$y = 0$ 上の初期値 $(w_0, 0)$ を通る周期 2 の解であり，wy 平面において，$y = 0$ に対称な周期軌道であることを用いている．この積分条件は，変数変換によって，

$$\int_{-w_0}^{w_0} \frac{f(w+c)}{\sqrt{L(w_0, c) - L(w, c)}} dw = \int_0^{w_0} \frac{f(w+c) + f(-w+c)}{\sqrt{L(w_0, c) - L(w, c)}} dw = 0 \tag{9}$$

と表すことが出来る．従って，(8), (9) を満たす $w_0 > 0$, $c \in \mathbb{R}$ に対して，$x(t) = w(t; w_0, c) + c$ は (1) を満たす周期 2 の解である．発表では，具体例についても紹介したい．

参考文献

[1] Smith, H., *An Introduction to Delay Differential Equations in Life Sciences*, Texts in Applied Mathematics, 2011, Springer New York, NY

[2] Nussbaum, R.D. Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations. Annali di Matematica 101 (1974) pp. 263–306.

[3] Kaplan, J.L., Yorke, J.A., Ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equations. J. Math. Anal. Appl. 48(1974) pp. 317–324.

[4] Nakata, Y., An explicit periodic solution of a delay differential equation. J. Dyna. Diff. Equ., 32, (2020) pp. 163–179

[5] Nakata, Y., Period-two solution for a class of distributed delay equations. Funkc. Ekvacioj (in press)