時間遅れを伴う可逆な有向道反応ネットワークの大域的漸近安定性

Global Asymptotic Stability for Reversible Directed Path Reaction Networks with Time Delays

小松 弘和 (Hirokazu Komatsu)
近畿大学 工学部 (Faculty of Engineering, Kindai University)
e-mail : komatsu@hiro.kindai.ac.jp

1 時間遅れを伴う化学反応ネットワーク

化学反応ネットワーク（CRN）は，以下の 3 つの集合の組 $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$ によって記述される [1]：

1. $\mathcal{S}$ は，n 個の物質からなる集合であり，$\mathcal{S} := \{X_1, \ldots, X_n\}$ と表す．

2. $\mathcal{C}$ は，m 個の complexes y からなる集合であり，$\mathcal{C} := \{y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}\}$ と表す．

3. $\mathcal{R}$ は，r 個の反応 $y \to y'$ からなる集合である．

ここで，反応 $y \to y' \in \mathcal{R}$ は，complex y が反応し，complex y' が生成されることを表す．また，complex $y \in \mathcal{C}$ は非負の整数値 y_j, $j = 1, \ldots, n$ を用いて，$y_1 X_1 + \cdots + y_n X_n$ と表される．さらに，物質 $X_1, \ldots, X_n$ の順序は固定されているので，以下，y はその係数のみを用いて $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ と表す．

物質 $X_1, \ldots, X_n$ の各濃度 $x_1, \ldots, x_n$ を並べた濃度ベクトルを $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ とする．このとき，時間遅れを伴う CRN の各物質の濃度の時間変化 $x(t), \forall t \geq 0$ を記述する遅れ型関数微分方程式（DDE）は，次式で記述される [2]：

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sum_{y \to y' \in \mathcal{R}} K_{y \to y'}(x(t - \tau_{y \to y'}))y' - \sum_{y \to y' \in \mathcal{R}} K_{y \to y'}(x(t))\, y, \quad \forall t \geq 0. \tag{1}$$

ただし，$\tau_{y \to y'} \geq 0$ は反応 $y \to y' \in \mathcal{R}$ の時間遅れであり，$K_{y \to y'} : \Omega \to \mathbb{R}$ は反応 $y \to y'$ の速度関数と呼ばれ，Ω 上で C^1- 級の関数である．ここで, Ω は $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ を含む $\mathbb{R}^n$ 内の開集合である．

さらに，反応 $y \to y'$ の速度関数 $K_{y \to y'}(x)$ へ以下の二条件を仮定する [2, 3]:

1. 任意の $x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ に対して，$K_{y \to y'}(x) > 0$ ならば，かつ，そのときに限り，$\mathrm{supp}(y) \subset \mathrm{supp}(x)$. ここで，$x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathcal{S}$ の部分集合 $\mathrm{supp}(x)$ は，$\mathrm{supp}(x) := \{X_i \in \mathcal{S} | x_i \neq 0\}$ で定義される．

2. 任意の $x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ に対して，$\partial K_{y \to y'}/\partial x_i(x) > 0, \quad \forall X_i \in \mathrm{supp}(y)$ ならば，かつ，そのときに限り，$\mathrm{supp}(y) \subset \mathrm{supp}(x)$.

DDE (1) の初期関数 $x(s) = \phi(s), \forall s \in [-\tau, 0]$ の解を $x^\phi(t) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ とする．ただし，$\tau := \max_{y \to y' \in R} \tau_{y \to y'}$ は最大の時間遅れを表し，$\phi \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n_{\geq 0})$ は非負の連続関数である．また，DDE (1) の解は $C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n_{\geq 0})$ 上で議論されるため，任意の $t \geq 0$ に対して $x^\phi(t)$ の $t-$ 切片 $x^\phi_t \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ を，$x^\phi_t(s) := x^\phi(t + s), \forall s \in [-\tau, 0]$ によって定義する．

DDE (1) に関する正不変集合を述べるため，任意の $a \in \mathbb{R}^n$ に対して，汎関数

$T_a : C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n_{\geq 0}) \to \mathbb{R}$ を次式によって定義する：

$$T_a(\psi) := a^T \left[\psi(0) + \sum_{y \to y' \in \mathcal{R}} \int_{-\tau}^{0} K_{y \to y'}(\psi(s)) \mathrm{d}sy \right]. \tag{2}$$

この汎関数 (2) を用いて，CRN $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$ の $\varphi \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n_{>0})$ に対応する *positive stoichiometric compatibility class* (PSCC) $P(\varphi) \subset C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n_{>0})$ を次式のように定義する：

$$P(\varphi) := \left\{ \psi \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n_{>0}) \,\middle|\, T_a(\psi) = T_a(\varphi), \quad \forall a \in \mathcal{H}^{\perp} \right\},$$

ただし，$\mathcal{H}^{\perp}$ は，次式で与えられる部分空間 $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ の直交補空間である：

$$\mathcal{H} := \mathrm{span} \{ y' - y \in \mathbb{R}^n \,|\, y \to y' \in \mathcal{R} \}$$

このとき，PSCC $P(\varphi)$ は DDE (1) に関して正不変集合であることが示される [2]．つまり，任意の初期関数 $\phi \in P(\varphi)$ に対して，DDE (1) の全ての解 $x^{\phi}(t)$ は $x_t^{\phi} \in P(\varphi), \forall t \geq 0$ である．

2 主結果

本研究では，次式で与えられる可逆な有向道反応ネットワーク $(\mathcal{S}', \mathcal{C}', \mathcal{R}')$ を対象とする [3]：

$$y^{(1)} \rightleftharpoons y^{(2)} \rightleftharpoons \cdots \rightleftharpoons y^{(i)} \rightleftharpoons \cdots \rightleftharpoons y^{(n-1)} \rightleftharpoons y^{(m)}. \tag{3}$$

ここで，complexes の集合 $\mathcal{C}'$ について次の条件を仮定する：

$$\mathrm{supp}(y^{(i)}) \cap \mathrm{supp}(y^{(j)}) = \emptyset, \quad \forall i, j = 1, \ldots, m, \quad i \neq j. \tag{4}$$

単調力学系の理論 [4] を用いることにより，CRN $(\mathcal{S}', \mathcal{C}', \mathcal{R}')$ の時間発展を記述する DDE (1) に関して次の定理が示される．

定理 1 CRN $(\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R})$ の時間発展を記述する DDE (1) は，速度関数 $K_{y \to y'}$ の形式や時間遅れ $\tau_{y \to y'}$ の値に関わらず，各 PSCC の相対位相に関して唯一つの大域的漸近安定平衡点 $\overline{\chi} \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n_{>0})$ をもつ．

紙面の都合上，定理 1 の証明は省略したが，発表当日はその概略を紹介するともに，時間が許せばその応用例を紹介したい．

謝辞 本研究は，JSPS 科研費 24K16972 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] M. Feinberg, Foundation of chemical reaction network theory, Springer, New York, 2019.

[2] H. Komatsu and H. Nakajima, Persistence in chemical reaction networks with arbitrary time delays, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 79, No. 1, pp. 305–320 (2019).

[3] P. De Leenheer, D. Angeli and E. Sontag, Monotone Chemical Reaction Networks, Journal of Mathematical Chemistry, Vol. 41, No. 3, pp. 295–314 (2007).

[4] H. L. Smith, Monotone Dynamical Systems, American Mathematical Society (1995).

定数遅れ非線形微分方程式における遅延誘導ホモクリニック分岐

Delay-induced homoclinic bifurcations in nonlinear differential equations with constant delay

山岡 直人 (Naoto Yamaoka)[1], 西口 純矢 (Junya Nishiguchi)[2],
[1] 大阪公立大学 (Osaka Metropolitan University), [2] 摂南大学 / 東北大学材料科学高等研究所 (Setsunan University / Tohoku University)
e-mail：yamaoka.naoto@omu.ac.jp

1 序文

非線形遅延微分方程式は, 遅延項や非線形項の構造により, 系のダイナミクスが大きく変化することが知られている．例えば, Sprott [1] によると, 非線形項が比較的単純な場合であっても, 遅延パラメータを変化させるだけで, 安定な平衡点から周期軌道, さらにカオスへ遷移することが報告されている．本講演では, Sprott [1] で扱われたものとは異なる構造をもち, かつ, 最も単純な非線形項を導入し, 遅延パラメータ τ に誘導される系のダイナミクスの変化を数値シミュレーションおよび理論解析の双方から調査する．

具体的には, 定数遅れをもつ 1 階非線形微分方程式

$$x'(t) = x(t) - x^2(t-\tau), \qquad ' = \frac{d}{dt}, \qquad \tau > 0 \tag{1}$$

を考える．このとき, 遅延パラメータ τ を増加させると, 安定であった平衡点の安定性が失われ, 周期軌道が出現する．さらに τ を増加させると, 特定の臨界値においてホモクリニック軌道が現れ, さらにそれより大きな値では消滅する．すなわち, この遅延系では, 遅延パラメータ τ によって超臨界ホップ分岐とホモクリニック分岐が誘導される．これらの事実は, 数値シミュレーションによって容易に確認できるが, 本講演では, この現象を数学的に検証するため, まず, 方程式 (1) を線形化し, 特性根解析することで, 平衡点の安定性の変化を確認する．次に, linear chain trick と類似の方法により, 方程式 (1) を 2 次元微分方程式系に近似する．2 次元系におけるホモクリニック軌道に対応する厳密解が双曲線関数で表されることに着目することで, 方程式 (1) におけるホモクリニック軌道に対応する厳密解を導出する．得られた厳密解は, 方程式 (1) におけるホモクリニック軌道の存在性を示すだけでなく, ホモクリニック分岐の数学的証明において, 基準となる解として機能するものと考えられる．なお, ホモクリニック分岐の厳密な数学的証明については, 今後の課題として残っている．

2 超臨界ホップ分岐

方程式 (1) の平衡解は, $x(t) \equiv 0$ と $x(t) \equiv 1$ である．$x(t) \equiv 0$ の周りにおける線形化方程式は, $x'(t) = x(t)$ となるので, 不安定である．一方で, $x(t) \equiv 1$ は, τ の値によって, 安定性が変化する．そこで, $x(t) \equiv 1$ の周りにおける線形化方程式を考えるために, $y(t) = x(t) - 1$ とおく．このとき, $x(t) \equiv 1$, すなわち, $y(t) \equiv 0$ の周りにおける線形化方程式は

$$y'(t) = y(t) - 2y(t-\tau) \tag{2}$$

となる．この方程式の特性方程式は $\lambda = 1 - 2e^{-\lambda\tau}$ であり, 特性根解析により, 次の命題が得られる．

命題 1　$\tau < \pi/\left(3\sqrt{3}\right) \approx 0.6046$ のとき, 方程式 (2) の原点は漸近安定である．一方, $\tau > \pi/\left(3\sqrt{3}\right)$ のとき, 方程式 (2) の原点は不安定である．

なお, Sternberg [2] によると, 遅延系においては, 一般に, Hartman-Grobman の定理に対応するものは成立しない．ただし, [3, Theorem 8.2] によって, 方程式 (2) の定常解 $y(t) \equiv 0$ が安定ならば, 方程式 (1) の定常解 $x(t) \equiv 1$ の安定性は保証される．

3　ホモクリニック分岐

ホモクリニック解を特定するために, まず, 方程式 (1) に対して, 変数変換

$$u(s) = x(\tau s) = x(t), \qquad s = \frac{t}{\tau}$$

を行う．このとき, 方程式 (1) は $\frac{d}{ds}u(s) = \tau\{u(s) - u^2(s-1)\}$ になるため, 方程式 (1) の代わりに

$$x'(t) = \tau\left\{x(t) - x^2(t-1)\right\} \tag{3}$$

を考えてもよい．関数 $x(t)$ を方程式 (3) の解とし, $y(t) = x(t-1)$ とおくと, $y'(t) \approx y(t+1) - y(t) = x(t) - y(t)$ となるため, 方程式 (3) は

$$x' = \tau(x - y^2), \quad y' = x - y \tag{4}$$

と近似できる．ここで, τ を増加させると, 遅延方程式 (3) と同じように, τ が小さいときは, 漸近安定だが, $\tau = 1$ のとき, ホモクリニック軌道が出現する．そのホモクリニック軌道に対応する方程式 (4) の厳密解は,

$$x(t) = -\frac{3}{2}\left(\tanh\frac{t}{2} - 1\right)\operatorname{sech}^2\frac{t}{2}, \quad y(t) = \frac{3}{2}\operatorname{sech}^2\frac{t}{2}$$

で与えられる．本研究では, 近似方程式 (3) の解構造が遅延系にも保持されると予想することにより, 方程式 (1) のホモクリニック軌道に対応する厳密解を与えることができる．

定理 2　$\tau = \log 2 \approx 0.6931$ における方程式 (1) の厳密解は, 次で与えられる．

$$x(t) = 4\exp(t - e^t)$$

この厳密解は, ホモクリニック軌道に対応するものである．したがって, この厳密解とシミュレーションと合わせて考えると, ホモクリニック分岐は $\tau = \log 2$ のときに起こっていると予想される．

謝辞　本研究は JSPS 科研費（課題番号：21K03331, 23K12994）の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Sprott, J. C. A simple chaotic delay differential equation, Phys. Lett. A, **366** (2007), 397-402.

[2] Sternberg, N., A Hartman-Grobman theorem for a class of retarded functional-differential equations, J. Math. Anal. Appl., **176** (1993), 156–165.

[3] Nishiguchi, J., Mild solutions, variation of constants formula, and linearized stability for delay differential equations, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., (2023), No. 32, 77.

半群理論を用いた分布型時間遅れをもつバーガーズ方程式の時間大域解について

Existence theorem for global in time solutions to Burgers equation with distribution type time delay

小川 実里 (Misato Ogawa)[1]
[1]Ochanomizu Univesity/RIKEN AIP
e-mail：g2570604@edu.cc.ocha.ac.jp

1 概要

バーガーズ方程式は, 交通流の数理モデルとして知られる. また, バーガーズ方程式に遅延項を導入することで, 運転手が周囲の混雑状況から判断し行動するまでの時間遅延を考慮した数理モデルとできる. 本講演では, そうしたバーガーズ方程式と交通流の数理モデルとの対応と, 分布型の遅延項をもつバーガーズ方程式の時間大域解の存在と一意性, 減衰評価について, 半群理論を用いて得られた結果を紹介する.

2 導入

本講演は, 久保隆徹先生 (お茶の水女子大学) との共同研究に基づく.

交通流の数理モデルとして，以下のバーガーズ方程式がよく知られている：

$$\partial_t\rho - \nu\partial_x^2\rho + V_m\partial_x\left\{\rho\left(1-\frac{\rho}{\rho_m}\right)\right\} = 0. \tag{B}$$

ここで，$x\in\mathbb{R}, t>0$ とし，$\rho=\rho(t,x)$ は車の密度（未知関数）, ν は拡散係数, V_m は $\rho\to 0$ のときの最大速度，ρ_m は最大密度を表し，ν, V_m, ρ_m はすべて正定数である.

現実においては, 運転手が混雑状況を把握してから車の速度を調整するまでに時間遅れが伴う. そのことを考慮し, 固定された遅れパラメータ $\tau>0$ に対し, τ だけ過去の密度 $\rho_\tau=\rho(t-\tau)$ から決まる速度 $v(t,x)=V_m\left(1-\dfrac{\rho_\tau}{\rho_m}\right)-\dfrac{\nu}{\rho}\partial_x\rho$ を導入すれば, 以下のバーガーズ方程式を得る：

$$\partial_t\rho - \nu\partial_x^2\rho + V_m\partial_x\left\{\rho\left(1-\frac{\rho_\tau}{\rho_m}\right)\right\} = 0.$$

この速度の項をさらに一般化して，Kubo-Ueda[1] では

$$\begin{cases} \partial_t\rho-\nu\partial_x^2\rho+\partial_x(\rho V(\rho_\tau))=0, & (t>0,\ x\in\mathbb{R}),\\ \rho(\theta,x)=\rho_0(\theta,x) & (-\tau\le\theta\le 0,\ x\in\mathbb{R}). \end{cases}$$

の初期履歴問題が考察されている．ただし, $V(\rho)$ は ρ に関して C^1 級関数, $\rho_0(\theta,x)$ は既知関数である．[1] では，時間局所解の一意存在性定理とアプリオリ評価を組み合わせることで，ρ_0 と τ がある関係を満たす場合において，時間大域解の一意存在性定理が証明されている.

本講演では, τ だけ過去から現在までの密度分布に依存する速度を導入して得られるバーガーズ方程式を考える：

$$\begin{cases} \partial_t\rho-\nu\partial_x^2\rho+\partial_x\left(\rho\displaystyle\int_{t-\tau}^{t} f(t-s)\rho(s)\,ds\right)=0, & (t>0, x\in\mathbb{R}),\\ \rho(\theta,x)=\rho_0(\theta,x), & (-\tau\le\theta\le 0, x\in\mathbb{R}). \end{cases}$$

ただし, f は $\sup_{0\le t\le\tau}|f(t)| =: M_f < \infty$ を満たす重み関数であり M_f は τ によらない正定数である. また, $\rho_0(\theta,x)$ は $-\tau\le\theta\le 0$ を満たす θ に対して与えられた関数である.

考える問題の第１式は τ だけ過去から現在までの密度にも依存しているため，半群理論は適用しづらい．そこで，補助関数 $z(t,\theta,x) := \rho(t+\theta,x)$ を用意し, 以下のバーガーズ方程式を得る：

$$\begin{cases} \partial_t\rho-\nu\partial_x^2\rho+\partial_x\left(\rho\int_{-\tau}^0 f(-\theta)z(t,\theta)\,d\theta\right)=0 & (t>0,\ x\in\mathbb{R}) \\ \partial_t z=\partial_\theta z & (t>0,\ -\tau\le\theta\le 0,\ x\in\mathbb{R}), \\ \rho(\theta,x)=\rho_0(\theta,x) & (-\tau\le\theta\le 0,\ x\in\mathbb{R}). \end{cases} \tag{P}$$

[2] から 微分作用素に対する半群 $\mathscr{T}_0(t)$ が生成されることが知られており, 微分方程式 (P) に対応する積分方程式は以下の (IE) のように与えられる：$t\ge\tau$ に対して,

$$\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}=\mathscr{T}_0(t)\begin{pmatrix}\rho_0(0)\\ z(0,\theta)\end{pmatrix}-\int_0^\tau\mathscr{T}_0(t-s)\begin{pmatrix}\partial_x g(s)\\ 0\end{pmatrix}\,ds-\int_\tau^t\mathscr{T}_0(t-s)\begin{pmatrix}\partial_x g(s)\\ 0\end{pmatrix}\,ds. \tag{IE}$$

ただし, $g(s)=\rho\displaystyle\int_{-\tau}^0 f(-\theta)z(t,\theta)\,d\theta$ とおき，半群 $\mathscr{T}_0(t)=\begin{pmatrix}S(t) & 0\\ S_t & T_0(t)\end{pmatrix}$ は以下で与えられる：

$\{S(t)\}_{t\ge0}$ は, $-\nu\partial_x^2$ によって生成される半群であり, $X=C([-\tau,0]:H^1)$ としたとき,

S_t は, H^1 から X への作用素；$(S_tx)(\theta)=\begin{cases} S(t+\theta)x & (t+\theta>0)\\ 0 & (t+\theta\le 0)\end{cases}$,

$\{T_0(t)\}_{t\ge0}$ は, X 上のべき零左シフト半群；$T_0(t)z(0,\theta)=\begin{cases} z(0,t+\theta) & (t+\theta\le 0)\\ 0 & (t+\theta>0)\end{cases}$.

3　主定理

本講演では, 主定理として，半群理論を用いて (IE) に対して, 次の時間大域解の存在定理を証明することができたことを紹介する.

定理 3.1. $\tau>0$ とする. このとき, 次を満たす τ と ν に依存するある正定数 K_0 が存在する：
初期履歴 $\rho_0\in C([-\tau,0]:H^1)$ が,

$$\rho_0(0)\in L^1,$$
$$\sqrt{\tau}\left(1+\sqrt{\tau}\right)\left(\|\rho_0(0)\|_{L^1}+\sup_{-\tau\le\theta\le0}\|\rho_0(\theta)\|_{H^1}\right)\le K_0$$

を満たせば, (IE) は一意解 $\rho(t)\in C([-\tau,\infty):H^1)$ をもち, $t>0$ に対して以下を満たす：

$$\|\rho(t)\|_{L^2}\le C(1+2\nu t)^{-\frac14},\quad \|\partial_x\rho(t)\|_{L^2}\le C(1+2\nu t)^{-\frac14}t^{-\frac12}$$

ただし, C は τ と ν に依存するある正定数.

注意 3.1. 定理 3.1 に現れる K_0 は, $K_0=\mathcal{O}(1)$ $(\tau\to 0)$ を満たす.

参考文献

[1] T. Kubo and Y. Ueda, Journal of Differential Equations, 184-230, (2022).

[2] A. Bátkai and S. Piazzera, Semigroups for delay equations, AK Peters/CRC Press, (2005).

分布型遅延の解の爆発に与える影響についての考察

On the effects of distributed delays on blow-up of solutions

石渡 哲哉 (Tetsuya Ishiwata)[1], 市田 優 (Yu Ichida)[2],
中田 行彦 (Yukihiko Nakata)[3]
[1] 芝浦工業大学 (Shibaura Institute of Technology), [2] 関西学院大学 (Kwansei Gakuin University), [3] 青山学院大学 (Aoyama Gakuin University)
e-mail : tisiwata@shibaura-it.ac.jp

解の時間発展を記述する際, 解の過去の情報を参照する微分方程式を遅延微分方程式 (DDE) という．過去の情報の参照の仕方は, 現在時刻より一定時間前の解の情報を参照する定数遅延やそのタイムラグが時間変化する時間依存遅延, 解そのものに依存する状態依存遅延, 過去のある時間区間全体の情報に依存する分布型遅延など様々なタイプがある．本講演では, 時間遅れと解の爆発という観点から調べた結果について述べる．なお, 以下解の爆発とは有限時間での爆発を意味することとする．特に今回は分布型遅延が解の爆発に与える影響について考える．

時間遅れと解の爆発の関係についての研究はそれほど多くなく ([1, 2, 3] やその参考文献を参照), 遅延の効果が解の爆発に与える影響について, ある程度一般的な枠組みでの研究としては [4] が最初であると思われる．彼らは爆発解を持つ ODE に定数遅延を持つ項を付加した場合に, 解の爆発に影響を与えない十分条件を示している．また, [5] ではある程度一般的な設定で, DDE：$x'(t) = F(x(t), x(t-1))$ と ODE:$x'(t) = F(x(t), a)$(a は定数.) の比較を解の爆発という観点から行っている．(なお, ここでは変数変換をして時間遅れを 1 としている.) また, 2 次元系では [6], [7] で遅延の効果で遅延がないときにはなかった解の爆発が起こる現象も知られている．なお, これらの結果は定数遅延の場合であって, その他の遅延のタイプでは積分方程式の研究に帰着できる場合を除き, あまり研究されていない.

分布型の遅延が解の爆発にポジティブに与える影響としては, これまで $x'(t) = x(t)\int_0^1 x(t-s)k(s)ds$ やその一般形を調べてきた．ここで, カーネル関数 $k(s)$ は非負連続関数とする．これは正の初期値を持つすべての解が爆発する ODE: $x'(t) = x^2(t) = x(t)\cdot x(t)$ と正の初期関数を持つすべての解が時間大域的に存在する DDE: $x'(t) = x(t)\cdot x(t-1)$ とを形式的に繋げて考えるために設定したトイモデルである．この DDE に対しては $k(s) = 1$ や $k(s) = s^\alpha(\alpha > 0)$ などのカーネルの場合, 正の初期関数を持つすべての解が爆発することが分かっている．右辺を少し一般化した $x'(t) = x(t)^p\int_0^1 x^q(t-s)ds(p, q > 0)$ の場合は, $p + q > 1$ であれば正の初期関数を持つすべての解が爆発し, そうでない場合は時間大域的に存在することが分かっている．分布型遅延項 $\int_0^1 x^q(t-s)ds$ は解の爆発に関する限り, あたかも $x^q(t)$ のように振る舞い解の爆発に寄与していることが分かる.

以上とは逆に, 分布型の遅延が解の爆発に抑制的に働きそうな状況として, 次の問題を考える.

$$x'(t) = \frac{x^2(t)}{\displaystyle\int_0^\infty x(t-s)\cdot k(s)ds}, \quad t > 0.$$

初期条件は $x(t) = \phi(t)$ $(t \le 0)$ で, ϕ は正値連続関数とする．この問題に対して, いくつかのカーネル関数について考察した結果を報告する.

結果

<u>Case 1: $k(s) = 1$(一様カーネル) の場合:</u> この場合, すべての解が指数関数解になり時間大域的に存在することが分かる. つまり, $1/\int_0^\infty x(t-s)\cdot 1ds$ により有限時間爆発が抑え込まれている.

<u>Case 2: $k(s) = e^{-s}$ の場合:</u> この場合, すべての解は二重指数関数となり時間大域的に存在し, 指数関数より早く発散する. この場合も解の爆発の抑制が出来ていることになる.

<u>Case 3: $k(s) = \delta_\tau(s)\ \ (\tau > 0)$ の場合:</u> この場合, 方程式は定数遅延を持つ $x'(t) = x^2(t)/x(t-\tau)$ となる. このとき任意の $\tau > 0$ に対し爆発解が存在し, 更に, 次が成り立つ: (i) $\tau \le e^{-1}$ のとき, 指数関数解が存在する. (ii) $\tau > e^{-1}$ のときは, すべての解は有限時間で爆発する.

つまり, τ が大きい場合は $1/x(t-\tau)$ で解の爆発は抑え込めないが, τ が小さい場合は $1/x(t-\tau)$ で解の爆発を抑え込める場合があることを意味する.

<u>Case 4: $k(s) = s$ の場合:</u> この場合, 少なくとも指数関数解およびこの指数関数解に漸近する解、更に有限時間で爆発する解が存在する. よって, この場合初期関数に依存して解の爆発を抑制できるかが決まる.

まとめ

ここまでの考察から現時点では, カーネル関数によって解の爆発の抑制の可否が分かれたり, 初期状態に依存することが分かった. カーネル関数に関しては, Case 1,2 では $k(0) > 0$ であり, Case 3,4 の場合は $k(0) = 0$ である, という違いがある. つまり, カーネル関数の原点近傍での振る舞いが解の爆発への影響を考える際に重要となる可能性がある. 爆発の抑制に関するカーネルの分水嶺関数があるかなどが今後の課題である.

謝辞　本研究は JSPS 科研費 JP25K00922 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] J.A.D. Appleby, D.D. Patterson, Blow–up and superexponential growth in superlinear volterra equations, Disc. Cont. Dyn. Syst., Ser. A, 38(8) (2018) pp. 3993–4017.

[2] H. Brunner, Z.W. Yang, Blow-up behavior of Hammerstein-type Volterra integral equations, J. Int. Equ. Appl., 24(4) (2012) pp. 487–512.

[3] I. Győri, Y. Nakata, G. Röst, Unbounded and blow-up solutions for a delay logistic equation with positive feedback, Comm. Pure Appl. Anal., 17(6) (2018) pp. 2845–2854.

[4] K. Ezzinbi, M. Jazar, Blow-up results for some nonlinear delay differential equations, Positivity, 10(2) (2006) pp. 329–341.

[5] T. Ishiwata and Y. Nakata, A note on blow-up solutions for a scalar differential equation with a discrete delay, Jpn. J. Ind. Appl. Math., 39(2022), pp. 959–972.

[6] A. Eremin, E. Ishiwata, T. Ishiwata, Y. Nakata, Delay-induced blow-up in a planar oscillation model, Jpn. J. Ind. Appl. Math., 38(2021), pp. 1037–1061.

[7] K. Yagasaki, Existence of finite time blow-up solutions in a normal form of the subcritical Hopf bifurcation with time-delayed feedback for small initial functions, Disc. Cont. Dyn. Syst., Ser. B, 27(2022), pp. 2621–2634.