

## ピローボックスの等長変形

### Isometric deformations of pillow boxes

本田 淳史 (Atsufumi Honda)<sup>1</sup>, 小磯 深幸 (Miyuki Koiso)<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 横浜国立大学 (Yokohama National University), <sup>2</sup> 九州大学 (Kyushu University)

e-mail : honda-atsufumi-kp@ynu.ac.jp

## 1 ピローボックス

本稿の内容は [1] に基づく。ピローボックスとは、長方形を 2 枚用いて曲線折りによって構成される区分的に平坦な曲面である (図 1 参照)。ピローボックスはギフトボックスや包装材料として広く用いられており、実用的な応用がある。Koiso [2] は、内部体積を最大化する基準曲線が弾性曲線であることを証明した。Mitani [3] は、ピローボックスの設計と内部体積について論じている。

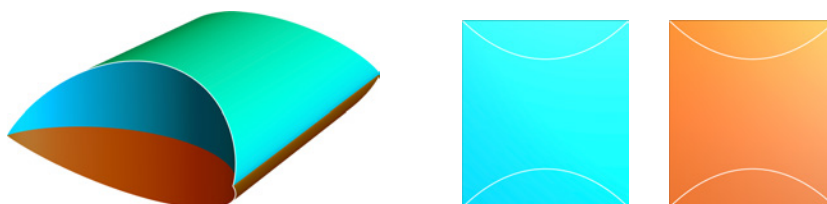


図 1. ピローボックス (左) と 2 枚の長方形 (右)。長方形上の曲線は crease pattern を表す。

ピローボックスは仮設住宅の構造にも利用されている (cf. Tachi [4]; ここではピローボックスが**仮設シェルター** (temporary shelters) として紹介されている)。このような仮設住宅を作ることは、長方形の紙を伸び縮みさせずにピローボックスへと変形することを意味し、これは数学的には**等長変形**と呼ばれる。

## 2 主結果

本論文では、ピローボックスの等長変形を考察する。ピローボックスは、定義により、2 枚の長方形の対応する辺の各点を同一視して得られる**二重長方形**と等長的である。長方形の crease pattern を変化させることを許せば、ピローボックスから二重長方形への連続的な等長変形を構成することが可能である (図 2 参照)。しかし、実用面では、crease pattern を保持する等長変形が望ましい。

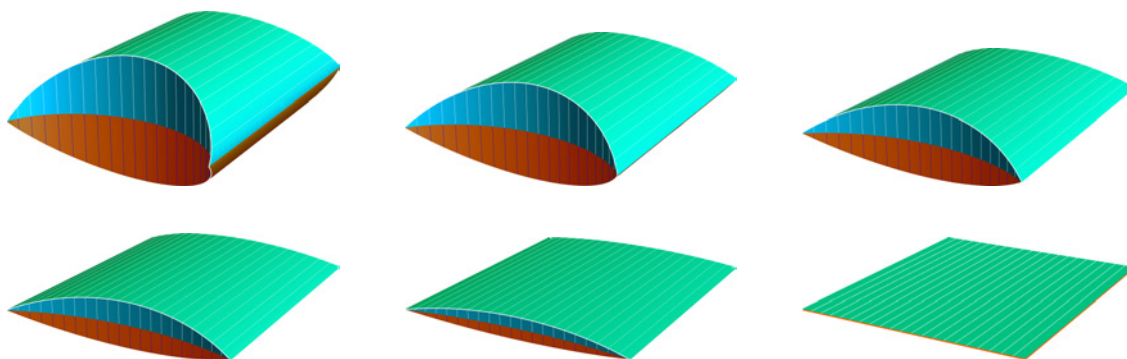


図 2. ピローボックス (上段左) から二重長方形 (下段右) への crease pattern の変形を許容した等長変形。

本研究 [1] では、ピローボックスから二重長方形への曲線折りにおける等長変形で、crease patternを保つものを折り紙変形として導入し、その分類を与えた。その系として次を得た。

**定理 ([1]).** 折り紙変形はピローボックスの位相を保たない。

図 3 は、ピローボックスから二重長方形への折り紙変形を示す。ピローボックスと二重長方形はともに 2 次元球面に同相であるが、等長変形の途中ではそうではないことが観察できる。

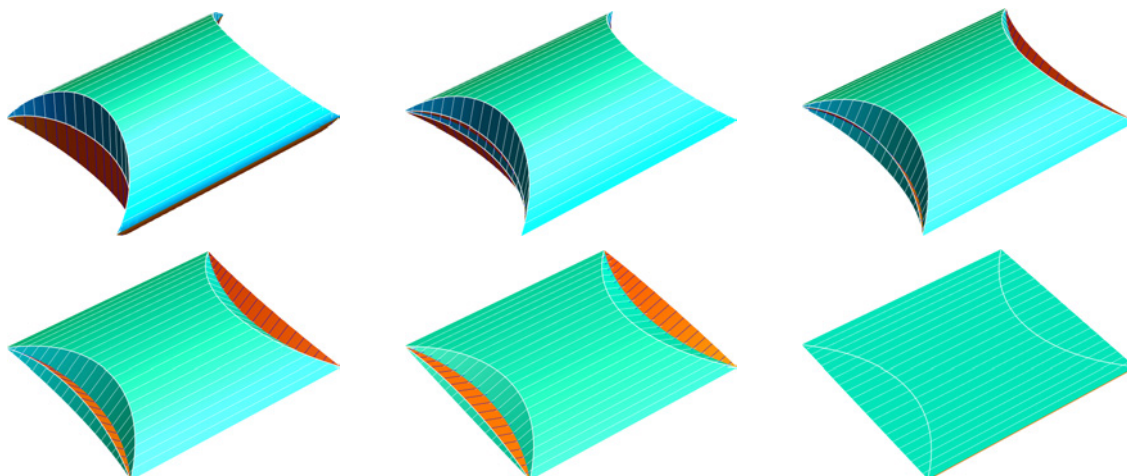


図 3. ピローボックス (上段左) から二重長方形 (下段右) への、crease pattern を保つ等長変形。

本研究のもう一つの動機は、いわゆる「ふいご予想」である。ふいご予想とは、多面体の内部体積は等長変形の下で不変であるというものである。この予想は R. Connelly と D. Sullivan によって定式化され、Sabitov および Connelly–Sabitov–Walz によって証明された。詳しくは E. Ghys による解説記事 [5] を参照せよ。我々の結果は、ふいご予想がより広いクラスの曲面に対して成り立つ可能性を示唆している。

**謝辞** 本研究は、JSPS 科研費 JP23K20212、24K06709 の助成と JST CREST JPMJCR1911 の支援を受けたものである。

## 参考文献

- [1] A. Honda and M. Koiso, *Isometric deformations of pillow boxes*, preprint.
- [2] M. Koiso, *Problem solving using differential geometry* (in Japanese), *Mathematical Sciences* 60:9 (2023), 14–20.
- [3] J. Mitani, *Pillow Box Design*, preprint (arXiv:2410.17593).
- [4] T. Tachi, *One-DOF Rigid Foldable Structures from Space Curves*, in *Proceedings of the IABSE-IASS Symposium 2011, London, UK*, (2011), 20–23.
- [5] E. Ghys, *L’explosion des Mathématiques. Le théorème du soufflet*. p. 23-27. Société Mathématique de France (SMF), Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI) Paris, 2002. <https://smf.emath.fr/node/27377>

# メビウス幾何における自己アフィン性に基づく美的曲線の幾何学

## Geometry of aesthetic curves based on self-affinity in Möbius geometry

熊谷 駿 (Shun Kumagai)<sup>1</sup>, 梶原 健司 (Kenji Kajiwara)<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 八戸工業大学 (Hachinohe Institute of Technology)

<sup>2</sup> 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 (IMI, Kyushu University)

e-mail : shun.kumagai.p5@alumni.tohoku.ac.jp<sup>1</sup>, kaji@imi.kyushu-u.ac.jp<sup>2</sup>

### 1 曲線の自己アフィン性

曲線の自己アフィン性 [1] は実車の意匠形状の解析をもとに提案された対称性で、形状設計における「審美性」にかかわるものとして対数型美的曲線 [2] の曲線クラスをもたらした。これまで、曲線の位置 (接) ベクトルに関する「原田型」、曲線の特徴量に関する「三浦型」の二つの自己アフィン性の検討を進めてきた。平面曲線  $\gamma(w) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  に対して正則性  $|\gamma_w| \neq 0$  と非退化性  $\det(\gamma_w, \gamma_{ww}) \neq 0$  を仮定し、 $s := \int |\gamma_w| dw$  (弧長径数),  $\kappa^E := |\gamma_{ss}|$  (ユークリッド曲率),  $\theta := \int \kappa^E ds$  (相似弧長径数),  $u := \det(\gamma_w, \gamma_{ww})^{-\frac{1}{3}}$  (等積弧長径数),  $\kappa^{SA} := -\gamma_{uuu}/\gamma_u$  (等積曲率) とかく。本稿の自己アフィン性は、**高々径数変換の自由度によって成り立つ性質**を指すものとする。

**命題 1 (三浦型自己アフィン性 [2, 3])** 曲線  $\gamma(w) : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^2$  に対し、三浦型自己アフィン性：

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (\kappa^E(w + \varepsilon), s_w(w + \varepsilon)) = (e^{-\varepsilon} \kappa^E(w), e^{\alpha \varepsilon} s_w(w)), \quad (1)$$

は  $\kappa^E(s)^\alpha = \xi s + \eta$ ,  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$  (対数型美的曲線) であることに同値である。

**命題 2 (原田型自己アフィン性 [3, 4])** 曲線  $\gamma(w) : \mathbb{R} \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}^2$  に対し、原田型自己アフィン性：

$$\exists A(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R}), \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \gamma_w(w + \varepsilon) = A(\varepsilon) \gamma_w(w), \quad (2)$$

は  $\kappa^{SA}(u) = \pm(\xi u + \eta)^{-2}$ ,  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$  であることに同値である。これは等積アフィン変換を法として、以下の曲線クラスを定める： $\xi = 0$  のとき二次曲線 ( $\kappa^{SA} > 0$  : 楕円,  $\kappa^{SA} = 0$  : 放物線,  $\kappa^{SA} < 0$  : 双曲線),  $0 < |\xi| < 2$  のとき対数らせん ( $\alpha = 1$  の対数型美的曲線),  $|\xi| = 2$  のとき関数  $y = x \log x$  のグラフ,  $|\xi| = \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{2}{5}}$  のとき指数・対数関数のグラフ, それ以外のとき冪関数のグラフ。

### 2 メビウス幾何

**補題 3** 行列値関数  $\Phi(w) : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \text{GL}(2, \mathbb{C})$ ,  $K(w) : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \text{M}(2, \mathbb{C})$  に対し、フレネ型公式  $\Phi_w(w) = \Phi(w)K(w)$  が成り立つとする。このとき、 $K(w)$  が定数であるためには  $A(w, \varepsilon) := \Phi(w + \varepsilon)\Phi(w)^{-1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \text{GL}(2, \mathbb{C})$  が  $w$  によらない  $A(\varepsilon)$  であること、すなわち自己アフィン性

$$\exists A(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C}), \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \Phi(w + \varepsilon) = A(\varepsilon)\Phi(w), \quad (3)$$

が成り立つことが必要かつ十分である。

複素曲線  $c(w) = (c_1 \ c_2)^T : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}^2$  に横断性  $\det(c_w, c) \neq 0$  を仮定し、以下では横断的曲線と呼ぶものとする。これに対し、 $\Phi := (c_w \ c) \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ ,  $\lambda := \det \Phi^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda_w & \lambda \end{pmatrix}$ , **メビウス枠**  $\Phi^M := ((c\lambda)_w \ c\lambda) = \Phi\Lambda \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  を定義する。このときフレネ型公式

$$\Phi_w^M = \Phi^M K^M = \Phi^M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \kappa_c^M & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa_c^M = -\frac{1}{2} \left( \frac{(c_2/c_1)_{ww}}{(c_2/c_1)_w} \right)_w + \frac{1}{4} \left( \frac{(c_2/c_1)_{ww}}{(c_2/c_1)_w} \right)^2, \quad (4)$$

が成り立ち、メビウス曲率  $\kappa_c^M$  がメビウス同値類  $\left\{ (c'_1 \ c'_2)^T \mid \frac{c'_2}{c'_1} = \frac{ac_1 + bc_2}{cc_1 + dc_2}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C}) \right\}$  と一対一に対応する．ここで、各  $w$  で  $c(w)$  の代わりに代表元  $c(w)\lambda(w)$  をとることは射影曲線  $[c(w)] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{CP}^2$  を考えることに対応する．

**定理 4** 横断的曲線  $c(w) = (c_1 \ c_2)^T : \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}^2$  に対し、射影的・原田型自己アフィン性：

$$\exists A(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{C}), \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad [c(w + \varepsilon)] = [A(\varepsilon)c(w)], \quad (5)$$

$$\exists \nu(w, \varepsilon) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \forall w, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad c(w + \varepsilon) = \nu(w, \varepsilon)A(\varepsilon)c(w), \quad (6)$$

が成り立つとき、 $\nu(w, \varepsilon) = \frac{\lambda(w)}{\lambda(w + \varepsilon)} \det A(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$  である．とくに (5), (6) はメビウス枠の自己アフィン性  $\Phi^M(w + \varepsilon) = \det A(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \cdot A(\varepsilon)\Phi^M(w)$ ，ならびに  $\kappa_c^M$  が定数であることに同値である．これはメビウス変換を法として  $\kappa_c^M = 0$  のとき  $\frac{c_2(w)}{c_1(w)} = w : \text{円} \cdot \text{直線}$ ， $\kappa_c^M \neq 0$  のとき  $\frac{c_2(w)}{c_1(w)} = \exp(\sqrt{\kappa_c^M}w) : \text{円} \cdot \text{直線}$  ( $\kappa_c^M \in \mathbb{R}^\times$ )，対数らせん ( $\kappa_c^M \in \mathbb{C}^\times \setminus \mathbb{R}$ ) として表される曲線クラスを定める．

### 3 メビウス幾何の特殊化における自己アフィン性

正則・非退化曲線  $\gamma(w) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  に対し、 $\phi = (\gamma_w, \gamma_{ww}) \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ ， $\mu := \exp\left(-\int \frac{\gamma_w \cdot \gamma_{ww}}{|\gamma_w|^2} dw\right)$ ， $M := \begin{pmatrix} \mu & \mu_w \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ，直交枠  $\Phi^\perp := (\gamma_w \mu \ (\gamma_w \mu)_w) = \phi M$  を定義する．ここでは  $\mu = 1/s_w$  であり、 $\Phi^\perp = (\gamma_s \ \gamma_{sw}) = (\gamma_w/s_w \ \sqrt{-1} \gamma_w \kappa^E)$  と表されることに注意する．さらに  $c_\gamma^\perp(w) := (\Phi^\perp(w))^T$  とおくと横断的曲線  $c = c_\gamma^\perp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$  を定め、その射影座標は  $\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{-1} \kappa^E s_w = \sqrt{-1} \theta_w$  である．

**命題 5** 曲線  $\gamma$  に対して三浦型自己アフィン性 (1) が成り立つならば、実数倍を除いて  $s_w = e^{\alpha w}$ ， $\kappa^E = e^{-w}$ ， $\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{-1} e^{(\alpha-1)w}$  である．また、次の射影的・原田型自己アフィン性が成り立つ：

$$[c(w + \varepsilon)] = \left[ \frac{\gamma_w(w + \varepsilon)/s_w(w + \varepsilon)}{\sqrt{-1} \gamma_w(w + \varepsilon) \kappa^E(w + \varepsilon)} \right] = \left[ \frac{\gamma_w(w + \varepsilon)}{\gamma_w(w)} \begin{pmatrix} e^{-\alpha\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{-\varepsilon} \end{pmatrix} c(w) \right] = [A(\varepsilon)c(w)]. \quad (7)$$

とくに、傾き  $\alpha$  の対数型美的曲線  $\gamma$  が定める曲線  $c = c_\gamma^\perp$  のメビウス曲率は  $\kappa_c^M = (\alpha - 1)^2$  である．

自己アフィン性 (7) において、補題 4 より  $\nu(w, \varepsilon) = \frac{\gamma_w(w + \varepsilon)}{\gamma_w(w)} = \frac{\lambda(w)}{\lambda(w + \varepsilon)} \det A(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$  が成り立つ．したがって射影同値類  $[\gamma_w]$  の代表元  $\gamma_w \lambda$  に対して次の原田型自己アフィン性が成り立つ：

$$\gamma_w(w + \varepsilon) \lambda(w + \varepsilon) = \det A(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \gamma_w(w) \lambda(w), \quad \det A(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{\alpha+1}{2}\varepsilon}. \quad (8)$$

**命題 6** 正則・非退化曲線  $\gamma(w) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  に対し、 $c_\gamma^{\text{emb}}(w) := (\text{Re } \gamma_w(w) \ \text{Im } \gamma_w(w))^T$  とおくと横断的曲線  $c = c_\gamma^{\text{emb}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$  を定める．曲線  $c_\gamma^{\text{emb}}$  が  $A(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$ ， $\nu(w, \varepsilon) = 1$  に対して自己アフィン性 (5), (6) を持つことは、 $\gamma$  が命題 2 の曲線クラスに属することに同値である．

**定理 7** 正則・非退化曲線  $\gamma(w) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  に対し、 $c_\gamma(w) := (\gamma_w \ \gamma_{ww})^T$  とおくと横断的曲線  $c = c_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$  を定める．曲線  $c_\gamma$  が自己アフィン性 (5), (6) を持つことは、 $\frac{c_2}{c_1} = \frac{\gamma_{ww}}{\gamma_w}$  のメビウス変換を法として  $\gamma$  が放物線 ( $\kappa_c^M = 0$ ) または対数型美的曲線 ( $\kappa_c^M \neq 0$ ) であることに同値である．

**謝辞** 本研究は JST CREST JPMJCR1911 の助成を受けたものである．

### 参考文献

- [1] 原田利宣, 森典彦, 杉山和雄, “曲線の物理的性質と自己アフィン性”, デザイン学研究, Vol.42, No.3, pp.33–40, 1995.
- [2] 三浦憲二郎, “美しい曲線の一般式とその自己アフィン性”, 精密工学会誌, 72 (7) 857–861, 2006.
- [3] S. Kumagai, K. Kajiwar, “Self-affinities of planar curves: towards unified description of aesthetic curves”, to appear in Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, arXiv:2407.17008, 2024.
- [4] S. Kumagai, K. Kajiwar, “A new class of aesthetic curves based on the self-affinity in equiaffine geometry”, preprint, arXiv:2505.20713, 2025.

## 可積分離散べき函数から構成される Michell–Prager 型トラス構造

## Michell–Prager type truss structures constructed by integrable discrete power functions

政田 智秋 (Masada Motoki)<sup>1</sup>, 早川 健太郎 (Hayakawa Kentaro)<sup>2</sup>, 林 和希 (Hayashi Kazuki)<sup>3</sup>,  
軸丸 芳揮 (Jikumaru Yoshiki)<sup>4</sup>, 梶原 健司 (Kajiwara Kenji)<sup>5</sup>, 横須賀 洋平 (Yokosuka Yohei)<sup>6</sup>

<sup>1</sup> 九州大学 (Kyushu Univ.), <sup>2</sup> 日本大学 (Nihon Univ.), <sup>3</sup> 京都大学 (Kyoto Univ.),

<sup>4</sup> 東洋大学 (Toyo Univ.), <sup>5</sup> 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 (IMI, Kyushu Univ.),

<sup>6</sup> 鹿児島大学 (Kagoshima Univ.)

e-mail : masada.motoki.382@s.kyushu-u.ac.jp

## 1 概要

以前の講演で,  $|(\text{軸力})| \times (\text{部材長})$  の和を最小化するという意味で力学的合理性を有する Michell–Prager 型トラス構造を, 可積分離散指数函数から構成できることを示した [1]. より一般に, 可積分離散正則函数から同様の手順で Michell–Prager 型トラス構造の生成が期待される. 本講演では, 可積分離散べき函数からトラス構造を構成し, その形状や力学特性について検証した結果を報告する.

## 2 離散べき函数

グラフ  $G = (V(\mathbb{Z}^2), E(\mathbb{Z}^2))$  ( $V = V(\mathbb{Z}^2)$ : 頂点集合,  $E = E(\mathbb{Z}^2)$ : 辺集合), 写像  $\mathbf{r} : V \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  に対し,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(n, m)$ ,  $\mathbf{r}_{\pm 1} = \mathbf{r}(n \pm 1, m)$ ,  $\mathbf{r}_{\pm 2} = \mathbf{r}(n, m \pm 1)$ ,  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}(n+1, m+1)$  と書く.

**定義 1** (Bobenko–Pinkall, 1999[2])  $0 < \gamma < 2$  とする. 写像  $\mathbf{r} : \mathbb{Z}_+^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(n, m) \mapsto \mathbf{r} = \mathbf{r}(n, m)$  が初期条件  $\mathbf{r}(0, 0) = 0$ ,  $\mathbf{r}(1, 0) = 1$ ,  $\mathbf{r}(0, 1) = e^{\gamma\pi i/2}$ , および

$$Q := (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{12})^{-1}(\mathbf{r}_{12} - \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})^{-1} = -1, \quad (1)$$

$$\gamma\mathbf{r} = 2n \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{-1})}{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{-1}} + 2m \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{-2})}{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{-2}}, \quad (2)$$

をみたすとき,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(n, m)$  を指数  $\gamma$  の離散べき函数 (discrete power function) という.

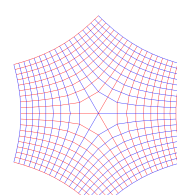
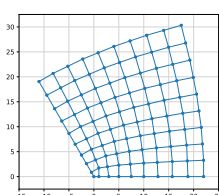
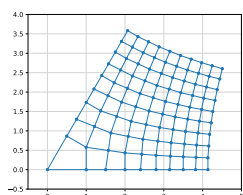


図 1. 離散べき函数 ( $\gamma = 2/3$ ) 図 2. 離散べき函数 ( $\gamma = 4/3$ ) 図 3.  $\gamma = 2/3$  で定義域を拡張.

(1), (2) は過剰決定系であるが, 整合的である [3]. 内部の点  $(n, m > 0)$  は (1) で決まり, 境界となる点  $(n = 0$  および  $m = 0)$  は (2) で決まる. さらに, 定義域は拡張することが可能である [4](図 3).

なお, (1) は離散等温網 (discrete isothermic net)[5] または離散正則函数 (discrete holomorphic function)[6] を定める式で, 4 点  $\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_2$  がこの順で同一円周上にあることを意味する. 離散等温網  $\mathbf{r}$  に対して, 次式で定まる  $\bar{\mathbf{r}}$  を  $\mathbf{r}$  の Christoffel 変換という ( $\mathbf{r}^*$  は  $\mathbf{r}$  の複素共役):

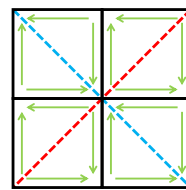
$$(\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}})(\mathbf{r}_1^* - \mathbf{r}^*) = C, \quad (\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}})(\mathbf{r}_2^* - \mathbf{r}^*) = -C, \quad C : \text{任意定数}. \quad (3)$$

**定理 2** (Schief, 2014[7])  $\mathbf{r} : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  を離散曲率線網,  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^2$  を純せん断力とする. 組  $(\mathbf{r}, F)$  の力とモーメントが釣り合うためには,  $\mathbf{r}$  が離散正則函数であることが必要十分である. このとき, 力

$F$  のなす格子は  $\mathbf{r}$  の Christoffel 変換  $\bar{\mathbf{r}}$  で与えられる ( $\mathbf{r}$ : form diagram,  $\bar{\mathbf{r}}$ : force diagram とよぶ).

### 3 Michell–Prager 型トラス構造

Michell トラスについては, 「各部材に対する  $|(\text{軸力})| \times (\text{部材長})$  が構造全体で一定である」という性質がよく知られており, 本講演ではこの性質をもつトラス構造のことを **Michell–Prager 型トラス構造**



(Michell–Prager type truss structures) とよぶ. 純せん断力で釣り合う面要素の対角線は, 釣り合い状態にあるトラス構造を生成し (図 4), これにより離散べき函数からトラス構造を構成できる. 特に離散等温網の対角線のなす構造は Michell–Prager 型トラス構造であり, 部材長の対数の符号付き和をエネルギー汎函数とする変分原理で統制される.

### 4 主結果

離散べき函数の対角線から図 5 に示す部分構造を抽出し, 離散等温網が純せん断力で釣り合う状態に対応する荷重を設定したところ, このトラス構造は近似的に Michell トラスであることがわかった. 以下は構造解析の結果の一例である. 図 5 は軸力分布を表し, 黒の三角形は固定点, 矢印は節点荷重, 赤色 (青色) は圧縮力 (引張力) が生じている部材, 色の濃淡は軸力の大きさを表す. 図 6 は, Michell 型汎函数による最適化前 (before, 薄灰色の点線) と最適化後 (after, 濃灰色の実線) の比較である.

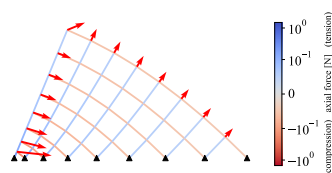


図 5. 軸力分布 ( $\gamma = 1.5, N = 18$ )

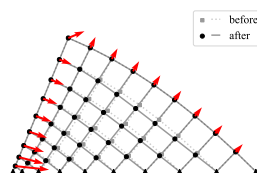


図 6. 最適化前後の比較

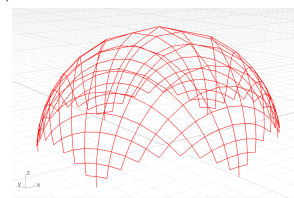


図 7. メビウス変換による 3 次元構造

なお, 離散等温性はメビウス不変であり, 今回のトラス構造にメビウス変換を施すことで, 釣り合いを保ったまま 3 次元構造を構成できる (図 7). 実際の応力分布や力学特性は今後検証予定である.

### 参考文献

- [1] K. Hayashi et al., Parametric generation of optimal structures through discrete exponential functions: unveiling connections between structural optimality and discrete isothermicity. *Struct. Multidiscip. Optim.*, Vol. 67(3)(2024), 41.
- [2] A. I. Bobenko, U. Pinkall, Discretization of Surfaces and Integrable Systems, in: *Discrete Integrable Geometry and Physics* (1999), pp.3–58.
- [3] F. Nijhoff, H. Capel, The Discrete Korteweg–de Vries Equation, *Acta Applicandae Mathematica*, Vol. 39 1-3 (1995), 133-158.
- [4] H. Ando et al., An explicit formula for the discrete power function associated with circle patterns of Schramm type, *Funkcial. Ekvac.*, Vol. 57(1)(2014), 1-41.
- [5] A. Bobenko, Y. Suris, *Discrete Differential Geometry*, AMS, 2009.
- [6] A. Bobenko, U. Pinkall, Discrete isothermic surfaces, *J. Reine. Angew. Math*, Vol. 475 (1996), 187-208
- [7] W. K. Schief, Integrable structures in discrete shell membrane theory, *Proc. R. Soc. A*, Vol. 470 (2014), 20130757.

## 第1種・第2種の膜O曲面について

### On the membrane O surfaces of the first and second kind

軸丸 芳揮 (Yoshiki Jikumaru)<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 東洋大学 情報連携学部 (INIAD, Toyo University)

e-mail : jikumaru@toyo.jp

## 1 概要

Calapso により提示された第1種・第2種の Guichard 曲面のアナロジーとして、第1種・第2種の膜O曲面のクラスを提案し、それぞれの支配方程式を紹介する。

## 2 記号の準備

曲率線座標  $(x, y)$  で表示された  $\mathbb{R}^3$  内の曲面 (片)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$  に対し、第一・第二基本形式を以下のように表す：

$$I = A_1^2 dx^2 + A_2^2 dy^2, \quad II = \kappa_1 A_1^2 dx^2 + \kappa_2 A_2^2 dy^2. \quad (1)$$

さらに単位接ベクトル  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  および単位法ベクトル  $\mathbf{N}$  を関係式

$$\mathbf{r}_x = A_1 \mathbf{X}, \quad \mathbf{r}_y = A_2 \mathbf{Y}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \quad (2)$$

で定める。このとき Weingarten の公式は以下のように表される：

$$\mathbf{N}_x = -\kappa_1 A_1 \mathbf{X}, \quad \mathbf{N}_y = -\kappa_2 A_2 \mathbf{Y}. \quad (3)$$

さらに、Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式は次式で表される：

$$\left( \frac{(A_1)_y}{A_2} \right)_y + \left( \frac{(A_2)_x}{A_1} \right)_x + \kappa_1 \kappa_2 A_1 A_2 = 0, \quad \begin{cases} (\kappa_1)_y + (\log A_1)_y (\kappa_1 - \kappa_2) = 0 \\ (\kappa_2)_x + (\log A_2)_x (\kappa_2 - \kappa_1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

膜形状が滑らかな曲面でモデル化されているとし、Gauss 曲率  $\mathcal{K} = \kappa_1 \kappa_2 \neq 0$  の状況を考える。このとき、膜の法線方向から一定の荷重  $q_n$  が作用して釣り合うためには、制約条件

$$\kappa_2^2 \frac{f(x)}{A_1^2} + \kappa_1^2 \frac{g(y)}{A_2^2} = q_n (\kappa_1 - \kappa_2)^2, \quad (5)$$

を満たす関数  $f(x), g(y)$  の存在が必要十分であり、面内膜応力  $T_1, T_2$  は次式を満たす [1]：

$$\frac{f(x)}{A_1^2} = q_n + 2\kappa_1 T_2, \quad \frac{g(y)}{A_2^2} = q_n + 2\kappa_2 T_1. \quad (6)$$

一方で Guichard 曲面と呼ばれるクラスは、等温曲率線座標を許容する曲面のある種の一般化として導入され、制約条件は以下の形で与えられる ( $c$  はゼロでない定数)：

$$\frac{f(x)}{A_1^2} + \frac{g(y)}{A_2^2} = c(\kappa_1 - \kappa_2)^2. \quad (7)$$

Calapso はこの制約条件を満たす補助的な関数を導入し、第1種・第2種の Guichard 曲面を提唱した [2, 3]。本稿では Calapso の構成に倣い、第1種・第2種の膜O曲面を提案する。以下では座標変換によって  $f(x) = -g(y) = q_n$  を仮定する。

### 3 第1種の膜 O 曲面 (正曲率曲面を含むクラス)

以下のように関数  $\alpha, \xi, h$  を設定する：

$$\begin{aligned} A_1 &= \cosh \alpha + h \sinh \alpha, & A_2 &= h \cosh \alpha + \sinh \alpha, \\ -\frac{1}{\kappa_1} &= e^{-\xi}(h + \coth \alpha), & -\frac{1}{\kappa_2} &= e^{-\xi}(h + \tanh \alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

このとき Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式より

$$\begin{aligned} (\alpha_x + \xi_x \coth \alpha)_x + (\alpha_y + \xi_y \tanh \alpha)_y + e^{2\xi} \sinh \alpha \cosh \alpha &= 0, \\ h_x &= (h + \coth \alpha) \xi_x, & h_y &= (h + \tanh \alpha) \xi_y. \end{aligned} \quad (9)$$

ここで  $h$  に対する両立条件  $(h_x)_y = (h_y)_x$  は次式で与えられる：

$$\xi_{xy} = \xi_x \xi_y + \alpha_y \xi_x \coth \alpha + \alpha_x \xi_y \tanh \alpha. \quad (10)$$

$\xi = h = 0$  のとき,  $\omega = 2\alpha$  とおくと  $\omega_{xx} + \omega_{yy} + \sinh \omega = 0$  であり, このとき  $\mathcal{K} = 1$ .

### 4 第2種の膜 O 曲面 (負曲率曲面を含むクラス)

以下のように関数  $\alpha, \xi, h$  を設定する：

$$\begin{aligned} A_1 &= \cos \alpha + h \sin \alpha, & A_2 &= h \cos \alpha - \sin \alpha, \\ -\frac{1}{\kappa_1} &= e^{-\xi}(h + \cot \alpha), & -\frac{1}{\kappa_2} &= e^{-\xi}(h - \tan \alpha). \end{aligned} \quad (11)$$

このとき Gauss-Mainardi-Codazzi 方程式より

$$\begin{aligned} (-\alpha_x + \xi_x \cot \alpha)_x + (\alpha_y + \xi_y \tan \alpha)_y + e^{2\xi} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ h_x &= (h + \cot \alpha) \xi_x, & h_y &= (h - \tan \alpha) \xi_y. \end{aligned} \quad (12)$$

ここで  $h$  に対する両立条件  $(h_x)_y = (h_y)_x$  は次式で与えられる：

$$\xi_{xy} = \xi_x \xi_y + \alpha_y \xi_x \cot \alpha - \alpha_x \xi_y \tan \alpha. \quad (13)$$

- $\xi = h = 0$  のとき,  $\omega = 2\alpha$  とおくと  $\omega_{xx} - \omega_{yy} = \sin \omega$  であり, このとき  $\mathcal{K} = -1$ .
- $\alpha = \pi/4$  のとき,  $\xi_{xx} + \xi_{yy} + \frac{1}{2}e^{2\xi} = 0$ ,  $(e^{-\xi})_{xy} = 0$ . この場合は [4] の 6.1 節で考察されており, Dupin サイクロイドを含む Canal 曲面が対応することが知られている.

謝辞 本研究は JSPS KAKENHI Grant Number JP24K16924 の補助を受けた.

### 参考文献

- [1] C. Rogers and W. K. Schief, On the equilibrium of shell membranes under normal loading. hidden integrability, Proc. Math. Phys. Eng. Sci., Vol. 459, no. 2038 (2003), pp.2449–2462.
- [2] P. Calapso, Alcune superficie di Guichard e le relative trasformazioni, Annali di Matematica, Serie III 11 (1905), pp.201–251.
- [3] L. P. Eisenhart, Transformation of Surfaces, Princeton University Press, 1923.
- [4] W. K. Schief, A. Szereszewski, C. Rogers, The Lamé equation in shell membrane theory, J. Math. Phys. Vol. 48 (2007), 073510.