

城郭石垣の設計法に基づく反り曲線における調和数とディガンマ関数

Harmonic Numbers and Digamma Functions in Warping Curves Based on Design Method of *Ishigaki* (Stone Walls) at Japanese Castles鈴木 利友 (Toshitomo Suzuki)¹¹ 武庫川女子大学 (Mukogawa Women's University)

e-mail: ttsuzuki@mukogawa-u.ac.jp

1 概要

『石垣秘伝之書』は、熊本藩の穴太が城郭石垣の設計法を記した文書である。1680年に記された野口本[1]や、1743年に記された北川本[2]が知られ、両者の内容はほぼ同じとされる。本書で示された反り曲線の設計法において、石垣の段数を無限にとった場合の曲線の式は既に導出されている[3][4][5]。しかしこの曲線は、段数が有限な場合の断面形状の頂点を厳密には通らない。本研究では調和数の積分表示を用いることにより、頂点を通る反り曲線の式が導出可能なことを示す。

2 断面形状の頂点を通る反り曲線の式の導出

『石垣秘伝之書』の設計法に基づく石垣の断面形状は、図1に示す開多角形 $DE_0E_1 \cdots E_{n-1}O$ である。このとき、 E_k の座標を (x, y) とおくと、

$$\begin{cases} x = \frac{n-k}{n+1}h \\ y = \frac{n-k}{n+1}b + \frac{a}{n} \sum_{i=1}^k \frac{k-i+1}{n-i+1} - a \end{cases} \quad (1)$$

である。ただし $\sum_{i=1}^0 \frac{k-i+1}{n-i+1} = 0$ とする。

ここで、調和数の積分表示より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{k-i+1}{n-i+1} &= k + (k-n) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{i} \right) \\ &= k + (k-n) \left(\int_0^1 \frac{1-s^n}{1-s} ds - \int_0^1 \frac{1-s^{n-k}}{1-s} ds \right) \\ &= k + (k-n) \int_0^1 \frac{s^{n-k} - s^n}{1-s} ds \end{aligned} \quad (2)$$

(1)(2)より k を消去して x と y の関係式を求めると

$$\begin{aligned} y &= \frac{b}{h}x - \frac{a}{h} \left(1 + \frac{1}{n} \right) x \left(\int_0^1 \frac{s^{\frac{n+1}{h}x - s^n}}{1-s} ds + 1 \right) \\ &= \frac{b}{h}x - \frac{a}{h} \left(1 + \frac{1}{n} \right) x \left(\psi(n+1) - \psi\left(\frac{n+1}{h}x + 1\right) + 1 \right) \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $\psi(z) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right) dt$ はディガンマ関数である。(3)は、頂点 D, E_0, E_1, \dots ,

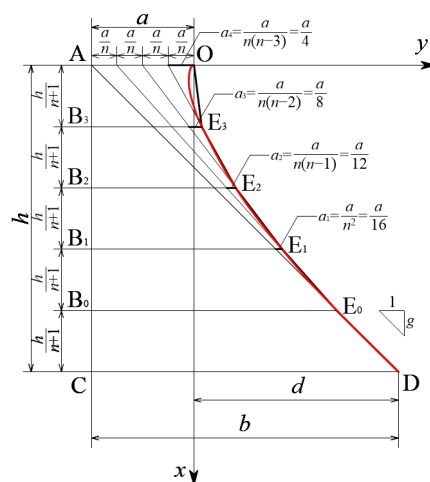


図1 『石垣秘伝之書』に基づく断面形状の決定方法 ($n=4$ の場合) と、断面形状の頂点を通る反り曲線 (赤色)

E_{n-1}, O を通る反り曲線の式である.

(3)の a, b を, 石垣の奥行き $d = b - a$ と, 線分 DE_0 の勾配 $g = \frac{h}{b}$ (初期勾配) を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{g} - \left(\frac{1}{g} - \frac{d}{h}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) x \left(\int_0^1 \frac{s^{\frac{n+1}{h}x} - s^n}{1-s} ds + 1 \right) \\ &= \frac{x}{g} - \left(\frac{1}{g} - \frac{d}{h}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) x \left(\psi(n+1) - \psi\left(\frac{n+1}{h}x + 1\right) + 1 \right) \end{aligned} \quad (4)$$

である.

3 段数を無限にとった場合の反り曲線の式との関係

ディガンマ関数の漸近展開より, B_{2i} をベルヌーイ数とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log(n+1) - \frac{1}{2(n+1)} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{2i}}{2i(n+1)^{2i}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi\left(\frac{n+1}{h}x + 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log\left(\frac{n+1}{h}x + 1\right) - \frac{1}{2\left(\frac{n+1}{h}x + 1\right)} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{2i}}{2i\left(\frac{n+1}{h}x + 1\right)^{2i}} \right\} \quad (6)$$

なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \psi(n+1) - \psi\left(\frac{n+1}{h}x + 1\right) \right\} = -\log \frac{x}{h} \quad (7)$$

よって, (3)(4)において $n \rightarrow \infty$ とすると

$$y = \frac{b-a}{h}x + \frac{a}{h}x \log \frac{x}{h} \quad (8)$$

$$y = \frac{d}{h}x + \left(\frac{1}{g} - \frac{d}{h}\right)x \log \frac{x}{h} \quad (9)$$

となる. これは, 段数を無限にとった場合の反り曲線の式[3][4][5]と等しい.

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP23K11753, JST CREST JPMJCR1911 の支援を受けた.

参考文献

- [1] 石川県金沢城調査研究所編, 金沢城石垣構築技術史料Ⅱ, pp. 11-28, 石川県金沢城調査研究所, 2011. 3
- [2] 文化財環境整備研究所編, 佐敷花岡城跡保存整備工事報告書 第二版, pp. 142-156, 芦北町, 2001. 3
- [3] 柳井 浩, 石垣の曲線 一様式の数理一, オペレーションズ リサーチ, Vol. 33, No. 6, pp. 281-286, 1988. 6
- [4] 西田一彦, 西形達明, 玉野富雄, 森本浩行, 城郭石垣断面形状の設計法とその数式表示に関する考察, 土木学会論文集, No. 750, pp. 89-98, 2003. 12
- [5] Suzuki, T., Ogata, Y., Yoshida, A., Umezaki, C., Tagawa H., & Yoneda, K., Redefinitions of Mathematical Formulae for Warping Curves Based on Three Design Methods of *Ishigaki* (Stone Walls) at Japanese Castles and Comparison with Photogrammetric Results of Edges of *Ishigaki* at Hikone Castle, Intercultural Understanding, Vol. 11, pp. 20-29, 2022. 3

ミウラ折りとヨシムラ折りの間に群がる特異な一般化ミウラ折り

Singular Generalized Miura-ori existing between Miura-ori and Yoshimura-ori

田川 浩之 (Hiroyuki Tagawa)¹

¹武庫川女子大学建築学部建築学科

e-mail: tagawa@mukogawa-u.ac.jp

1 概要

筆者らは、正規、非正規な配置の特異な一般化ミウラ折りを定義し、それらのパターンの数え上げや建築設計への応用などについて検討してきた^{[1],[2]}等。正規な配置の一般化ミウラ折りは、図1(a)のミウラ折りに代表されるように、自己交差を起こさず平坦に折り畳まれる。正規な配置から双対的な操作によって得られる非正規な配置の一般化ミウラ折りは、折り畳まれる過程で自己交差を起こし、筒型の立体的な形状になる。ミウラ折りから双対的な操作によって得られる図1(b)の砂時計パターンで、四辺形を退化させて三角形にすると、図1(c)の吉村パターンが得られる。その意味で、これまでの正規、非正規な配置の特異な一般化ミウラ折りは、ミウラ折りから吉村パターンに群がっていると解釈できる。

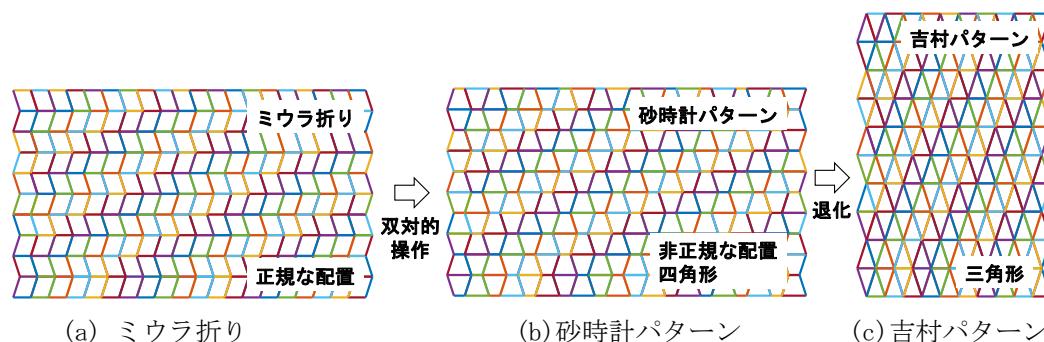


図1 ミウラ折り，砂時計パターン，吉村パターン

2 ミウラ折り（正規な配置）

正規な配置の特異な一般化ミウラ折りは、円弧状、渦巻状ミウラ折り^[1]など、数え上げると26パターン存在する^[2]。これらは連動した折り畳み条件である式(1)を満たす。 K は各節点での挟角 θ_i, θ_j を用いて式(2)で表される。正規な配置の一般化ミウラ折りは自己交差を起こさず平坦に折り畳まれる。ミウラ折りの剛体平坦折り畳みシミュレーションを図2に示す。

$$(K_4 - K_3)(1 - K_1 K_2) = (K_1 - K_2)(1 - K_3 K_4) \quad \dots (式1) \quad K = \frac{1 + \cos \theta_i \cos \theta_j}{\sin \theta_i \sin \theta_j} \quad \dots (式2)$$



図2 ミウラ折りの剛体平坦折り畳みシミュレーション

3 砂時計パターン（非正規な配置）、吉村パターン（退化）

非正規な配置の特異な一般化ミウラ折りは、図3に示すように、正規な配置から、Unit3と4で挟角BとDを入れ替える双対的な操作で得られる。Huffmann Tessellation など、数え上げると17パターン存在する。双対的な操作で得られた非正規な配置でも、式(3)に示すように K の値は変わらないため、連動した折り畳み条件の式(1)を満たす。縦方向の折れ線は、折れ方向が同じになるため、筒状の立体的な形状に折り畳まれ、自己交差が起こる。

$$K' = \frac{1 + \cos(\pi - \theta_i) \cos(\pi - \theta_j)}{\sin(\pi - \theta_i) \sin(\pi - \theta_j)} = K \quad \dots (式3)$$

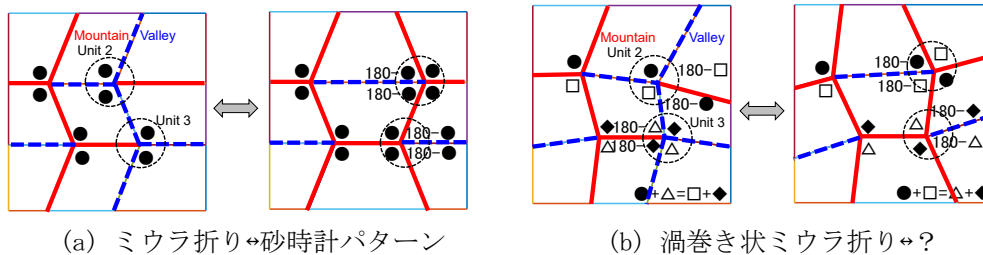


図3 双対的な操作（正規↔非正規）

砂時計パターンの剛体平坦折り畳みシミュレーションを図4に示す。吉村パターンは、砂時計パターンで1辺の長さを0として、四角形を三角形に退化させることで得られる。吉村パターンの平坦折り畳みシミュレーションを図5に示す。ここでは、1辺の長さを0に近い微小な値に設定し、三角形に近い四角形としており、1自由度の折り畳み挙動である。

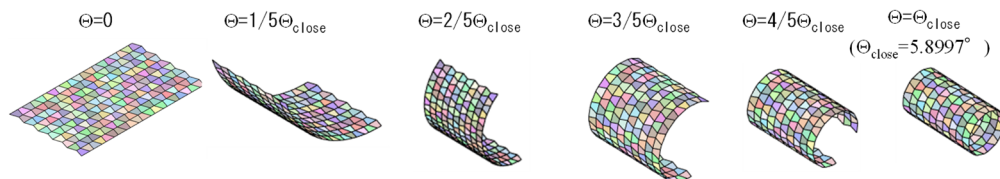


図4 砂時計パターンの剛体平坦折り畳みシミュレーション

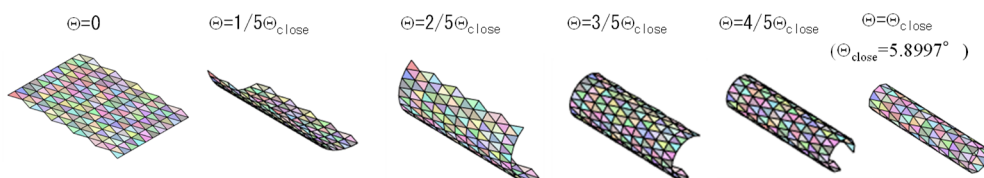


図5 吉村パターンの剛体平坦折り畳みシミュレーション

謝辞 本研究は、JSPS 科研費 23K04113, JST CREST JPMJCR1911 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] H.Tagawa, N. Yashioka, T. Suzuki, Proposal of arc- and spiral-shaped Miura-ori and its application to the design of large roof architecture, Proceedings of the IASS symposium 2022, Beijing, China, 2022.
- [2] H. Tagawa, A. Sugimura, A. Mukai, K. Inomata, “Counting-up and classification of all combination patterns of singular generalized Miura-ori,” Proceedings of the IASS symposium 2024, Zurich, Switzerland, 2024.

A Gauge-Theory Framework for Graph Neural Networks

Hirotsada Honda¹

¹Faculty of Information and Networking for Innovation and Design, Toyo University
e-mail : honda.hirotsada@iniad.org

1 Introduction

We propose a graph neural-network layer that is exactly equivariant to both vertex permutations S_n and an arbitrary compact gauge group G_c (e.g. $SO(3)$, $SU(3)$). Following the formulation of the lattice gauge theory [1], each edge carries a link variable $U_{ij} \in G_c$; messages are formed by parallel – transporting neighbour features $U_{ij}h_j$ and then aggregated by an order-independent sum. This "parallel-transport layer" preserves symmetry without data augmentation and exposes a discrete curvature $\Omega_{ijk} \equiv U_{ij}^{(L)}U_{jk}^{(L)}U_{ki}^{(L)}$, allowing a lightweight Yang–Mills regularizer. We prove that our network is equivariant [2] to both vertex permutations and 3-D rotations—matching the rotation-equivariance of EGNN [3] while extending it with exact permutation equivariance."

2 Notations

We define the notations here. Let n , S_n , and G_c denote the number of vertices, symmetric group acting on vertex labels, and compact Lie group capturing the continuous symmetry (e.g. $SO(3)$, $E(d)$, $SU(k)$), respectively. $G = S_n \times G_c$ denotes the full gauge group, V , the feature representation space on which G_c acts linearly (e.g. \mathbb{R}^d for vectors, tensor irreps for higher types). $h_i^{(\ell)} \in V$ denotes the feature ("node characteristic") of vertex i at layer ℓ , and $U_{ij}^{(\ell)} \in G_c$, the link variable on edge $j \rightarrow i$, i.e., the discrete parallel transport obtained from the continuous connection:

$$U_{ij}^{(\ell)} = \mathcal{P} \exp \left(\int_{\gamma_{ij}} A^{(\ell)} \right),$$

where \mathcal{P} is referred to as the path-ordering operator. It holds that $U_{ji}^{(\ell)} = (U_{ij}^{(\ell)})^{-1}$. $s_{ij} \in \mathbb{R}^k$ are gauge invariant edge scalars (distance, weight, etc.), and \bigoplus , the commutative aggregator (such as sum, mean, or max), We also introduce layer maps at the l -th layer:

$$\psi^{(\ell)} : V \times V \times \mathbb{R}^k \rightarrow V, \quad \phi^{(\ell)} : V \times V \rightarrow V, \quad \sigma^{(\ell)} : V \times V \times G_c \times \mathbb{R}^k \rightarrow G_c,$$

where $\psi^{(\ell)}$, $\phi^{(\ell)}$, $\sigma^{(\ell)}$ are equivariant with respect to the action of G_c . We also use following terms and notations.

■Gauge action. For $(\sigma, r) \in S_n \times G_c$, we define its action by

$$(\sigma, r) \cdot (U_{ij}, h_i) = \left(r U_{\sigma^{-1}(i) \sigma^{-1}(j)} r^{-1}, r h_{\sigma^{-1}(i)} \right).$$

■Equivariance. Because $\psi^{(\ell)}, \phi^{(\ell)}, \sigma^{(\ell)}$ are equivariant and \bigoplus is order independent, it holds that

$$F^{(\ell)}((\sigma, r) \cdot (U_{ij}, h_j)) = (\sigma, r) \cdot F^{(\ell)}(U_{ij}, h_j) \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad \forall (\sigma, r) \in S_n \times G_c.$$

■ **Loss function.** Let $\hat{y} = \varrho(\bigoplus_i h_i^{(L)})$ be the gauge invariant read-out after L layers, with ϱ being an MLP. For a target y we combine the usual task loss $\mathcal{L}_{\text{task}}$ with a Yang–Mills penalty:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{task}}(\hat{y}, y) + \lambda \sum_{C \in \mathcal{C}_3} \|I - \Omega_C\|_F^2,$$

where $\Omega_C \equiv U_{ij}^{(L)} U_{jk}^{(L)} U_{ki}^{(L)}$, and \mathcal{C}_3 is any chosen set of oriented 3-cycles, $\|\cdot\|_F$ the Frobenius norm, and $\lambda \geq 0$, a regularization coefficient. Note that $\Omega_C = I \ \forall C$ means that the discrete connection is flat.

■ **Layer map** $F^{(\ell)}: (U^{(\ell)}, h^{(\ell)}) \mapsto (U^{(\ell+1)}, h^{(\ell+1)})$. It is defined as follows:

$$\begin{cases} m_{ij}^{(\ell)} = \psi^{(\ell)}(U_{ij}^{(\ell)} h_j^{(\ell)}, h_i^{(\ell)}, s_{ij}), \\ M_i^{(\ell)} = \bigoplus_{j \neq i} m_{ij}^{(\ell)}, \\ h_i^{(\ell+1)} = \phi^{(\ell)}(h_i^{(\ell)}, M_i^{(\ell)}), \\ U_{ij}^{(\ell+1)} = \sigma^{(\ell)}(h_i^{(\ell)}, h_j^{(\ell)}, U_{ij}^{(\ell)}, s_{ij}) \quad (l = 1, 2, \dots, L). \end{cases} \quad (1)$$

3 Main Result

Theorem 1. Let $(U^{(\ell)}, h^{(\ell)}) \mapsto (U^{(\ell+1)}, h^{(\ell+1)})$ be the update defined by equations (1) with maps $\psi^{(\ell)}, \phi^{(\ell)}, \sigma^{(\ell)}$ prescribed and a commutative aggregator \bigoplus . Then, for every permutation $\sigma \in S_n$ and every group element $r \in G_c$,

$$F^{(\ell)}((\sigma, r) \cdot (U^{(\ell)}, h^{(\ell)})) = (\sigma, r) \cdot F^{(\ell)}(U^{(\ell)}, h^{(\ell)}).$$

Hence the full network obtained by stacking these layers is $S_n \times G_c$ - equivariant.

Acknowledgement This work was supported by the INOUE ENRYO Memorial Grant, TOYO University.

参考文献

- [1] Rothe, H., Lattice gauge theories: an introduction (3rd edition), World Scientific Publishing Company. 2005.
- [2] Maron, H., Ben-Hamu, H., Shamir, N., and Lipman, Y., Invariant and equivariant graph networks, Proc. International Conference on Learning Representations (ICLR) 2019.
- [3] Satorras, G. et al., $E(n)$ equivariant graph neural networks, <https://arxiv.org/abs/2102.09844>, 9327–9337.