構造物の地震応答解析を支える応用数学

Applied Mathematics for Structural Seismic Response Analysis

堀　宗朗 (Muneo Hori)[1]
[1] 海洋研究開発機構 (Japan Agency for Marine-Earth Science and Technology)
e-mail： horimune@jamstec.go.jp

1　はじめに

様々な構造物に対し，地震応答解析は耐震性を検証する手段である．この解析は固体連続体の波動方程式を解くものである．地震応答解析には数値計算が必要とされる．有限要素法を使う場合，解析モデルは 100 万〜1 億自由度が実務利用される．

地震応答解析は応用数学に支えられている．例えば，梁・シェルを使う構造力学と連続体力学の理解には変分法が有効である．建設材料や大きな変形状態では波動方程式が非線形になる．この数値解析にも応用数学のアルゴリズムが使われる．

以上を背景に，本講演は地震応答解析の例 [1] を示した後，地震応答解析を支える応用数学を説明する．物理的仮定を設けず，関数に数理的近似を加えるだけで，構造力学の支配方程式や非線形解析の支配方程式が導出できることを意図している．

2　構造物の地震応答解析の例

原子力発電所の地震応答解析では建屋に加え地盤の解析モデルも使う．実務利用される解析モデルの自由度は 100 万〜1,000 万のオーダとなる．設計用の 4 倍の入力地震動に対しても一定の耐震性があることを示すことができる．

ライフラインは，加速度のような地盤の揺れではなく地盤の歪で損傷する．空間分解能を上げるため，実務でも 1,000 万のオーダの解析モデルを使う，揺れに比べて，歪は地層形状の影響を大きく受け，ライフライン全体での耐震性の検証には大規模数値解析を使う地震応答解析が必要となる．

3　連続体の汎関数

問題を簡単にするため，準静的と物体力 0 の状態を考える．変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対し，変位-歪関係 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{sym}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}$，釣合式 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0}$，構成則 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{c} : \boldsymbol{\varepsilon}$ という 3 つの物理法則をまとめて，連続体 V に対する汎関数 $\mathcal{L}[\boldsymbol{u}] = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} : \boldsymbol{c} : \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}v$ が導出される．ここで，$\boldsymbol{\varepsilon}$ と $\boldsymbol{\sigma}$ は 2 階テンソルの歪と応力，$\boldsymbol{c}$ は 4 階の弾性テンソル，$\boldsymbol{\nabla}$ は微分演算子，$\cdot$ と $:$ は 1 階と 2 階の縮約，$\mathrm{sym}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}$ は変位勾配 $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}$ の対称部分である．

$\mathcal{L}$ に代わり $\mathcal{L}^*[\boldsymbol{u},\boldsymbol{\sigma}] = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{c}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}v$ を利用する．$\boldsymbol{\sigma}$ を導入する理由は，部材のトラクションフリーの境界条件を満たす近似関数を使うためである．

4　シェルの支配方程式

参考文献 [2] に詳細を示すが，直交座標 x_i を使ってシェル V の中立面 N の座標を $(x_1, x_2, h(x_1, x_2))$ とする．N 上で $(s^1, s^2, s^3) = (x_1, x_2, 0)$ となる曲線座標を導入する．N の法線方向で s^1 と s^2 は一定であり，s^3 は $g^{33} = 1$ で増減する．

$\frac{\partial h}{\partial x_i} = h_{,i}$ とすると，h_{ij} は曲率半径 R の逆数のオーダとなる．シェルの板厚 T との比を $\frac{T}{R} = \epsilon$ とすると，$s^3 h_{,pq} = O(\epsilon)$ となる．この ϵ を使って座標と共変微分に漸近展開を施すことができる．

N 上で s^1 と s^2 の基底ベクトル $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ を定義する．この $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ は V では s^1 と s^2 の基底ベクトルとはならないため，共変微分の計算には $\boldsymbol{b}_i$ の微分を計算する．$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{\sigma}$ の $\boldsymbol{b}_i$ に関する係数を s^i の適切な関数として，$\mathcal{L}^*$ の漸近展開を行うと，$O(\epsilon)$ と $O(\epsilon^2)$ の項から薄板と厚板のシェルの支配方程式が導出される．

薄板と厚板のシェルの $\mathcal{L}^*$ の被積分項の数は 4 と 6 である．スカラーである被積分項は座標に依存しないため，被積分項が一定の対称性を持つことは当然である．さらに漸近展開の結果，$O(\epsilon)$ と $O(\epsilon^2)$ には $h_{,pq}$ と $h_{,p}h_{,q}$ の項しか現れない．

5　非線形地震応答解析の取り扱い

地震応答解析の非線形性は，弾塑性の材料を使う材料非線形と，歪-変位関係が非線形となる幾何非線形に大別される．弾塑性材料では，降伏関数 f を使う弾塑性論と呼ばれる理論が構築されている．幾何非線形では，微分幾何に基づいた高度な理論が提案されている．どちらも難解である．

参考文献 [3] に詳細を示すが，汎関数 $\mathcal{L}^*$ に f を拘束条件 $\lambda f(\boldsymbol{\sigma})$ として加えるだけで，弾塑性論が再定式化できる．ここで λ は降伏条件 $f=0$ を貸すためのラグランジュ未定係数である．

$f=0$ は一軸の実験結果であり，3 次元連続体の拘束条件とすることは自然である．複数の降伏条件が課されても，拘束条件として取り扱うことは容易である．建設材料の代表であるコンクリートと地盤に適用される．

$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{\sigma}$ は座標 $\boldsymbol{x}$ の関数とされる．参考文献 [4] に詳細を示すが，$\boldsymbol{x}$ の代わりに $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ を変数とする $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ や $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\sigma}))$ を考えると幾何非線形となる．柱・梁に再起関数を適用すると，$\mathcal{L}^*$ からオイラー座屈が導出される．

再起関数は奇異な形であるが，プログラム言語では利用される．また，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ は繰り返し計算で求めることができる．この繰り返し計算はアップデートラグランジュアンと称されるアルゴリズムと一致する．

6　おわりに

汎関数 $\mathcal{L}^*$ に対し，漸近展開を使うことで薄板と厚板のシェル，拘束条件を使うことで材料非線形，再起関数を使うことで幾何非線形が導出できることを紹介した．応用数学の支援を明示することで，基礎となる連続体力学を簡潔にすることが可能である．なお，数理操作は正しいと思われるものの，本講演の内容は定説とはなっていないことを付記する．

謝辞　本研究は JSPS 科研費 23H00199，23K17780 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] M. Hori (ed.), *Application of High-Performance Computing to Earthquake-Related Problems*, World Scientific (2024).

[2] M. Hori *et al.*, Thin and thick shell theory consistent with continuum mechanics, J. JSCE (in print).

[3] M. Hori *et al.*, Alternative formulation of plastic flow rule using yield function, J. JSCE, Vol. 10, No. 1 (2022), pp. 381–389.

[4] M. Hori *et al.*, Derivation of Euler buckling equation from continuum mechanics at finite deformation state, J. JSCE, Vol. 11, No. 1 (2023), Article ID: 23-00074.