Stability analysis and optimal error estimation of local discontinuous Galerkin method for stochastic two-dimensional KdV equation

Xuewei Liu[1], Shao-Liang Zhang[1], Xiaohua Ding[2]
[1]Nagoya University, [2]Harbin Institute of Technology at Weihai

e-mail : mathmathlll@163.com

1 Introduction

Consider the solution of the following stochastic two-dimensional KdV equation

$$\begin{cases} \mathrm{d}\upsilon = \left(\kappa \dfrac{\partial^3 \upsilon}{\partial x^3} + \kappa \dfrac{\partial^3 \upsilon}{\partial y^3} + \alpha \Delta \upsilon + f(\upsilon, \nabla \upsilon)\right) \mathrm{d}\tau + g(\upsilon, \nabla\upsilon)\, \mathrm{d}W_\tau, \ (x, y, \tau) \in \Omega \times [0, T], \\ \upsilon(x, y, 0) = \upsilon_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

with the periodic boundary conditions, which arises in various physical fields such as the motion of water waves in channels [1], plasma magnetic current waves [2] and non-resonant lattice vibrations [3].

2 LDG method

To facilitate the construction of the LDG method for the stochastic two-dimensional KdV equation, auxiliary variables q and p are introduced to reformulate equation (1) into a system of first-order equations

$$\begin{cases} q = \nabla \upsilon, \\ p = \nabla q, \\ \mathrm{d}\upsilon = (\kappa \nabla p + \alpha \nabla q + f(\upsilon, q))\, \mathrm{d}\tau + g(\upsilon, q)\, \mathrm{d}W_\tau, \end{cases} \tag{2}$$

with the initial condition

$$\upsilon(x, y, 0) = \upsilon_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \tag{3}$$

The weak formulations of system (2) are derived by multiplying each equation with appropriate test functions z_h, w_h, v_h, which are piecewise polynomials defined on each element, followed by integration by parts. Consequently, the discrete problem is represented by the piecewise polynomial functions q_h, p_h and υ_h as

$$\begin{cases} (q_h, z_h)_{K_l} = -(\upsilon_h, \nabla z_h)_{K_l} + (\hat{\upsilon}_h, z_h)_{\partial K_l}, \\ (p_h, w_h)_{K_l} = -(q_h, \nabla w_h)_{K_l} + (\hat{q}_h, w_h)_{\partial K_l}, \\ (\mathrm{v}_h, \mathrm{d}\upsilon_h)_{K_l} = -\kappa (p_h, \nabla \mathrm{v}_h)_{K_l} \mathrm{d}\tau - \alpha (q_h, \nabla \mathrm{v}_h)_{K_l} \mathrm{d}\tau + (f(\upsilon_h, q_h), \mathrm{v}_h)_{K_l} \mathrm{d}\tau \\ \qquad + (g(\upsilon_h, q_h), \mathrm{v}_h)_{K_l} \mathrm{d}W_\tau + \kappa (\hat{p}_h, \mathrm{v}_h)_{\partial K_l} \mathrm{d}\tau + \alpha (\hat{q}_h, \mathrm{v}_h)_{\partial K_l} \mathrm{d}\tau, \end{cases} \tag{4}$$

where $(\cdot,\cdot)_{K_l}$ denotes the inner product over the element K_l, and $(\cdot,\cdot)_{\partial K_l}$ represents the boundary integrals arising from integration by parts. The numerical fluxes in (4) are selected as

$$\begin{aligned} &\hat{\upsilon}_h(x, y_{j+\frac{1}{2}}, \tau) := \upsilon_h(x, y^+_{j+\frac{1}{2}}, \tau), \ \hat{\upsilon}_h(x_{i+\frac{1}{2}}, y, \tau) := \upsilon_h(x^+_{i+\frac{1}{2}}, y, \tau), \\ &\hat{p}_h(x, y_{j+\frac{1}{2}}, \tau) := p_h(x, y^-_{j+\frac{1}{2}}, \tau), \ \hat{p}_h(x_{i+\frac{1}{2}}, y, \tau) := p_h(x^-_{i+\frac{1}{2}}, y, \tau), \\ &\hat{q}_h(x, y_{j+\frac{1}{2}}, \tau) := q_h(x, y^-_{j+\frac{1}{2}}, \tau), \ \hat{q}_h(x_{i+\frac{1}{2}}, y, \tau) := q_h(x^-_{i+\frac{1}{2}}, y, \tau). \end{aligned} \tag{5}$$

3 Stability property

Theorem 1 Let the nonlinearities f and g satisfy linear growth condition with constants B_2. If the coefficient α in equation (4) satisfies $\alpha \geq B_2$, then the numerical solution satisfies the following stability estimate in expectation

$$\sup_{0\leq\tau\leq T} \mathbb{E}\left\|\upsilon_h(\cdot,\tau)\right\|^2 \leq C\left(1+\left\|\upsilon_h(\cdot,0)\right\|^2\right).$$

4 Error estimation

Theorem 2 Let equation (1) with periodic boundary conditions admit a solution $\upsilon \in \mathcal{L}^2([0,T];H^{\mathcal{N}+4}) \cap \Upsilon^2([0,T];\mathcal{L}^2) \cap \mathcal{L}^\infty(0,T;H^{\mathcal{N}+1})$, with initial data $\upsilon_0 \in H^{\mathcal{N}+1}$, where H^s denotes the Sobolev space of order s and Υ^2 denotes the space of adapted processes with bounded expected supremum norm. Let υ_h be the numerical solution of the LDG method (4)–(5) and assume f, g are Lipschitz continuous with constant $B_1 > 0$. If the parameters satisfy $\kappa > \max\left\{\alpha, 2\alpha^2+4\epsilon^2\right\}$ and $\alpha > \left(1+\kappa+\frac{\alpha}{2}+\frac{B_1}{2}\right)\epsilon^2$, $\forall\,\epsilon>0$, then the error estimate holds

$$\mathbb{E}\left\|e_\upsilon(\cdot,\tau)\right\|^2_{\Omega_h} + \left(\frac{\kappa}{2}-\alpha^2-2\epsilon^2\right)\mathbb{E}\left\|e_p(\cdot,\tau)\right\|^2_{\Omega_h} + \mathbb{E}\left\|e_{\upsilon_\tau}(\cdot,\tau)\right\|^2_{\Omega_h} + \frac{1}{4}\mathbb{E}\left\|e_q(\cdot,\tau)\right\|^2_{\Omega_h} \leq Ch^{2\mathcal{N}+2}.$$

5 Numerical experiments

Example 1 Considering stochastic two-dimensional KdV equation

$$\begin{cases} \mathrm{d}\upsilon(x,y,\tau) = \left(\upsilon_{xxx}(x,y,\tau)+0.00125\upsilon_{xx}(x,y,\tau)+\upsilon_x(x,y,\tau)-0.00125\upsilon(x,y,\tau)\right)\mathrm{d}\tau \\ \qquad\qquad \left(\upsilon_{yyy}(x,y,\tau)+0.00125\upsilon_{yy}(x,y,\tau)+\upsilon_y(x,y,\tau)\right)\mathrm{d}\tau \\ \qquad\qquad +\left(0.05\upsilon(x,y,\tau)+0.05\upsilon_x(x,y,\tau)+0.05\upsilon_y(x,y,\tau)\right)\mathrm{d}W_\tau, (x,y,\tau)\in\Omega\times[0,T], \\ \upsilon_0(x,y) = \sin(4x)\sin(4y), (x,y)\in\Omega. \end{cases}$$

In Table 1, the convergence orders corresponding to different basis functions of various degrees are listed.

Table1. Optimal convergence order of the LDG method

	$\mathcal{N}=0$		$\mathcal{N}=1$		$\mathcal{N}=2$	
N	$\mathcal{L}^2$-error	order	$\mathcal{L}^2$-error	order	$\mathcal{L}^2$-error	order
40	0.0780	/	0.00307836	/	9.4538E-05	/
80	0.0359	1.1949	0.00076307	2.0168	1.2377E-05	2.9332
160	0.0140	1.3586	0.00017855	2.0910	1.3433E-06	3.2038

From Table 1, it is observed that numerical results validate the theoretical analysis, and the observed spatial convergence rates are consistent with Theorem 2.

References

[1] Zabusky, N. J., & Galvin, C. J. Shallow-water waves, the Korteweg-de Vries equation and solitons, *Journal of Fluid Mechanics*, **47**. 4, (1971) 811-824.

[2] Boldyrev, S. Nonlinear magnetosonic waves in a multi-ion-species plasma, *Physics of Plasmas*, **5**. 5, (1998) 1315-1320.

[3] Toda, M. Studies of a non-linear lattice, *Physics Reports*, **18**. 1, (1975) 1-123.

変形 AAA アルゴリズムの事後誤差評価に関する検討

A Study on A Posteriori Error Analysis for a Variant of the AAA Algorithm

吉田元紀 (Motoki Yoshida) [1], 田中健一郎 (Ken'ichiro Tanaka) [2],
[1] 東京大学大学院情報理工学系研究科 (The University of Tokyo), [2] 東京科学大学 (Institute of Science Tokyo)
e-mail : yoshida-motoki650@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

1　概要

有理関数近似は複素領域上においてデータ点を最もよく近似する有理関数を求める問題である．有理関数近似アルゴリズムの 1 つである AAA アルゴリズム [1] は，その誤差の収束の早さと計算速度から高い注目を集めている．しかし，AAA アルゴリズムの収束性に対する研究はなされていない．その要因の 1 つに，AAA アルゴリズム中において複数の異なる誤差関数が用いられており，解析を困難にしている点があげられる．本研究では，AAA アルゴリズムの誤差関数に同じものを適用した**変形 AAA アルゴリズム**に対して誤差の収束性の解析を行った．AAA アルゴリズムを変形したことにより，誤差の狭義単調減少性を示した．また，アルゴリズムの各反復における誤差の変化を評価する方程式を導出し．事後誤差評価を与えた．

2　導入：AAA アルゴリズム

AAA アルゴリズム は有理関数近似アルゴリズムの 1 つである．特徴として，有理関数の重心表現，greedy な補間点選択と誤差 2 ノルム最適化による重みの更新の繰り返しによるアルゴリズムがあげられる．はじめに有理関数の重心表現について述べる．

定義 1（重心表現）　有理関数近似の補間点 m 点と m 点上の関数値の組 $(z_1, f_1), (z_2, f_2), \dots (z_m, f_m)$ と，各点における重み $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ が与えられたとき，有理関数 $r(z)$ を

$$r(z) = n_w(z) \,/\, d_w(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{w_k f_k}{z - z_k} \,/ \sum_{k=1}^{m} \frac{w_k}{z - z_k}$$

で表現することを，有理関数の**重心表現**という．

AAA アルゴリズムは各反復 $m = 1, 2, \dots$ において以下の補間点選択と重み決定を繰り返す．

1) 補間点選択
反復 $m-1$ の時点で補間点に選ばれていない点集合 $Z^{(m-1)}$ の中から，反復 $(m-1)$ で得られた有理式 r_{m-1} と f との誤差の絶対値が最大となる点を選び，新たな補間点 z_m とする：

$$z_m \in \underset{z \in Z^{(m-1)}}{\operatorname{argmax}} |f(z) - r_{m-1}(z)|. \tag{1}$$

2) 重み決定
重心表現において用いる重みを決定する．「分母を払った誤差」のノルムを最小化する問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \|f d_{m,w} - n_{m,w}\|_{Z^{(m)}} \\ \text{条件} & \|w\|_m = 1 \end{array}$$

を $n_{m,w}$ と $d_{m,w}$ の重み $w := (w_1, \ldots, w_m)$ について解いて $w_1, \ldots, w_m$ を決定する．選択された補間点と重みを用いた重心表現による有理関数が出力される．

本研究では AAA アルゴリズムの誤差関数を統一した変形 AAA アルゴリズムを解析する．具体的には，補間点選択における誤差関数を重み決定関数と統一し，$\|fd_{m,w}(z) - n_{m,w}(z)\|$ とする．

3　誤差解析

AAA アルゴリズムの誤差解析において重要な定理を 2 つ挙げる．

定理 2（Loewner matrix との対応）　補間点に選ばれなかった点集合 $\{z_i^{(m)}\}$ と補間点集合 $\{z_j\}$ を用いて Loewner matrix A_m を以下で定める．

$$(A_m)_{ij} = \frac{f(z_i^{(m)}) - f(z_j)}{z_i^{(m)} - z_j} \tag{2}$$

AAA アルゴリズムの反復 m における誤差は A_m の最小特異値 $\sigma_1^{A_m}$ に等しい

定理 3（Lowener matrix の 1rank update）　Loewner matrixA_m と A_{m+1} の間に以下の関係が成立．

$$B_m^* B_m = A_m^* A_m - a_m a_m^* \tag{3}$$
$$A_{m+1} A_{m+1}^* = B_m B_m^* + c_{m+1} c_{m+1}^* \tag{4}$$

ただし，a_m は z_{m+1} と $\{z_j\}$ の差分商ベクトル，c_m は z_{m+1} と $\{z_i^{(m)}\}$ の差分商ベクトル．

これらを用いた解析結果を示す．以降の解析では $\sigma_1^{A_m}$ ではなく，特異値の二乗 $\lambda_1^{A_m}$ を用いる．まず $\lambda_1^{A_m}$ と $\lambda_1^{B_m}$ の比較による結果を示す．

定理 4　$\lambda_1^{A_m}$ と $\lambda_1^{B_m}$ に対して

$$\lambda_1^{B_m} \leq \left(1 - \|u_1^{(m)}\|_\infty^2\right) \lambda_1^{A_m} \tag{5}$$

が成立．ただし，$u_1^{(m)}$ は A_m の最小特異値の左特異ベクトル．

次に $\lambda_1^{B_m}$ と $\lambda_1^{A_{m+1}}$ の比較による結果を示す．解析は行列の 1rank update の補題 [2] に基づく．

定理 5　$\lambda_1^{B_m}$ と $\lambda_1^{A_{m+1}}$ に対して以下が成立．

$$1 - \sum_{j=1}^{m+1} \frac{|(v_j^{(m+1)})_{m+1}|^2}{1 - \frac{\lambda_1^{B_m}}{\lambda_j^{A_m}}} = 0 \tag{6}$$

ただし，$(v_j^{(m+1)})_{m+1}$ は A_{m+1} の第 j 特異値の右特異ベクトル $v_j^{(m+1)}$ の $m+1$ 成分，つまり末尾．

この方程式をもとに，変形 AAA アルゴリズムの事後誤差評価を与える．

参考文献

[1] Yuji Nakatsukasa, Olivier Sète, and Lloyd N. Trefethen. The AAA algorithm for rational approximation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 40(3):A1494 – A1522, January 2018.

[2] Jiu Ding and Aihui Zhou. Eigenvalues of rank-one updated matrices with some applications. *Appl. Math. Lett.*, 20:1223–1226, 2007.

3 次元 Poisson 方程式の境界値問題のための有限要素法におけるメッシュ分割

Mesh Refinement of the Finite Element Method Applied to 3D BVP for Poisson Equation

杉田 幸亮 (Kosuke Sugita)[1], Hengguang Li[1],
[1]Wayne State University, Department of Mathematics
e-mail：kosuke.sugita@wayne.edu, li@wayne.edu

1 概要

有限要素法において，メッシュを単純に一様に分割すると，計算領域の形状によっては，通常の Sobolev ノルムによる有限要素法の近似解の収束が悪化することが知られており，こういった問題を，四面体を用いたメッシュ分割について詳細に調べた結果がいくつか挙げられる ([1], [2])．収束の悪化はいわゆる特異性を持つ頂点や辺に起因する．四面体以外の典型的な多面体，例えば五面体や六面体も有限要素法では広く用いられており，既存の成果を他の多面体の場合にも一般化することは重要である．本研究では，形状関数が多項式の場合には，四面体に限定されていた結果を，五面体や六面体を用いたり，それらを組み合わせたりといった場合にも一般化する理論的・数値的な成果を得た．

2 理論的枠組み

ここでは，本研究における最も単純なモデル問題として，以下の Dirichlet 境界値問題を考える．

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega. \tag{1}$$

ここで，$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は有界な Lipschitz 領域，$\partial\Omega$ は Ω の境界，$f \in L^2(\Omega)$ とする．特異頂点 $c \in \mathcal{C}$ や特異辺 $e \in \mathcal{E}$ を局所的に調べると，偏微分作用素から得られるある正の固有値 λ_c や λ_e を用いて，

$$\eta_c = \sqrt{\lambda_c + 1/4} \ \ (c \in \mathcal{C}), \quad \eta_e = \lambda_e = \pi/\omega_e \ \ (e \in \mathcal{E}) \tag{2}$$

と表される量が得られ，特異性の程度に対応している．ここで，ω_e は特異辺をはさむ二面の成す角度である．さらに，η_c および η_e に対応するパラメータ μ_c および μ_e を用いて，次のように議論の中心となる関数空間を定義できる．

定義 1（本研究における重み付き Sobolev 空間） m を正の整数とし，$H^m_{loc}(\Omega) := \{v \in H^m(\omega) : \omega \Subset \Omega \ \ \forall\omega\}$ とする．ここで，$H^m(\omega)$ は標準的な m 次 Sobolev 空間，$\omega \Subset \Omega$ は Ω に含まれかつコンパクトな閉包を持つ任意の開集合である．特異頂点と特異辺の集合 $\mathcal{S} = \mathcal{C} \cup \mathcal{E}$ に対して，特異性の程度を表す正の値からなるパラメータ $\boldsymbol{\mu} := \{\mu_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ を設定する．本研究で用いる重み付き Sobolev 空間を以下の通り定義する．

$$\mathcal{M}^m_{\boldsymbol{\mu}}(\Omega) := \{v \in H^m_{loc}(\Omega) : r_c^{|\alpha|-\mu_c}\partial^\alpha v \in L^2(\mathcal{V}_c^o), r_e^{|\alpha_\perp|-\mu_e}\partial^\alpha v \in L^2(\mathcal{V}_e^o), \tag{3}$$

$$r_c^{|\alpha|-\mu_c} r_{c,e}^{|\alpha_\perp|-\mu_e}\partial^\alpha v \in L^2(\mathcal{V}_c^e), \forall|\alpha| \le m\}, \tag{4}$$

$$\|v\|^2_{\mathcal{M}^m_{\boldsymbol{\mu}}(\Omega)} := \|v\|^2_{H^m(\mathcal{V}^o)} + \sum_{|\alpha|\le m} (\sum_{c\in\mathcal{C}} \|r_c^{|\alpha|-\mu_c}\partial^\alpha v\|^2_{L^2(\mathcal{V}_c^o)} \tag{5}$$

$$+ \sum_{e\in\mathcal{E}, c\in\mathcal{C}} r_c^{|\alpha|-\mu_c} r_{c,e}^{|\alpha_\perp|-\mu_e}\partial^\alpha v + \sum_{e\in\mathcal{E}} \|r_e^{|\alpha_\perp|-\mu_e}\partial^\alpha v\|^2_{L^2(\mathcal{V}_e^o)}). \tag{6}$$

ここで, $\mathcal{V}_e^o, \mathcal{V}_c^o, \mathcal{V}_c^e$ は特異頂点や特異辺を含む十分小さい Ω の部分領域で, $\mathcal{V}^o = \Omega\backslash(\mathcal{V}_e^o \cup \mathcal{V}_c^o \cup \mathcal{V}_c^e)$ である．η_c, η_e, μ_c, μ_e の導出や，ここで導入された重み付き Sobolev 空間の詳細な議論の参考文献として [1]，[2] 等が挙げられる．

3 理論的誤差評価

μ_c や μ_e によって定まる範囲におさまるようにパラメータ κ_c や κ_e の値を設定し，メッシュ生成に用いることで，理論的誤差評価が次のように得られる．

定理 2 計算領域の形状による特異性の程度を表すパラメータ μ_e や μ_v に対して，メッシュ生成パラメータ κ_e や κ_v をそれぞれ十分小さくとる．これらのパラメータと，四面体，五面体，六面体を用いて，かつ五面体と六面体の形状関数が多項式になるように本研究におけるメッシュ生成アルゴリズムによって生成レベル L の有限要素を構成する．このとき，$\mathbf{0} \le \boldsymbol{\mu} \le \boldsymbol{\eta}$ を満たす重み付き Sobolev 空間 $u \in \mathcal{M}^{m+1}_{\boldsymbol{\mu}+\mathbf{1}}(\Omega)$ に対して，有限要素解 u_I の u に対する $H^1(\Omega)$ セミノルムの誤差評価として，

$$|u - u_I|_{H^1(\Omega)} \le Ch^m \|u\|_{\mathcal{M}^{m+1}_{\boldsymbol{\mu}+\mathbf{1}}(\Omega)} \tag{7}$$

が得られる．ここで $h = 2^{-L}$ である．

4 数値実験

一例として，いわゆるプリズム状の計算領域は，特異辺が境界に存在し得る．そのような場合に対して，本研究のメッシュ生成アルゴリズムによって得られる数値実験結果は表 1 の通りである．収束性を確認する一つの標準的な量 $\mathcal{R}_l := \log_2\left(\frac{|u_l - u_{l-1}|_{H^1(\Omega)}}{|u_{l+1} - u_l|_{H^1(\Omega)}}\right)$ を用いた．κ を十分小さくとることで，より低いメッシュ生成レベル l において，$\mathcal{R}_l$ が上限である 1 により速く近づくことを確認できた．

表 1. プリズム状計算領域における $\mathcal{R}_l$ の収束の確認

$l \setminus \kappa$	0.5	0.4	0.3	0.2
3	0.939	0.945	0.941	0.931
4	0.955	0.974	0.979	0.977
5	0.948	0.983	0.992	0.992
6	0.928	0.985	0.996	0.997

5 まとめ

3 次元 Poisson 方程式の境界値問題に適用する有限要素法のために，特異頂点や特異辺のまわりで局所的に得られるパラメータを用いてメッシュ分割を工夫することで，重み付き Sobolev 空間における理論的誤差評価が得られ，数値実験でも整合的な結果を得られた．五面体や六面体の形状関数が多項式ではなく有理関数になるより一般の場合への対応が今後の課題として挙げられる．

参考文献

[1] A. Buffa and M. Costabel and M. Dauge, Anisotropic regularity results for Laplace and Maxwell operators in a polyhedron, C. r., Math, Vol. 336, pp. 565-560, 2003.

[2] H. Li, Graded Finite Element Methods for Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Springer, 2022.

Space–Time 法による波動方程式の数値解析における Dirichlet 境界安定化手法の検討

Dirichlet Boundary Stabilization Methods for Space–Time Finite Element Analysis of the Wave Equation

谷口 靖憲 (Yasutoshi Taniguchi)[1], 柏原 崇人 (Takahito Kashiwabara)[1],
滝沢 研二 (Kenji Takizawa)[2]
[1] 東京大学 (The University of Tokyo), [2] 早稲田大学 (Waseda University)
e-mail : yasutoshi.taniguchi@tafsm.org

1 概要

本研究は, 2 階の双曲型偏微分方程式に対して, 空間方向に Galerkin 法, 時間方向に不連続 Galerkin 法 (DG 法) を適用する Space–Time 有限要素法 (ST 法) (例えば [1]) を取り扱う．この手法は，数値解によるシステムの力学的エネルギーが増加しないという点で安定であり，Galerkin/least-squares (GLS) 安定化を用いることで，厳密解がスキームを満たすという意味での Consistency を保ちながら，高周波領域の散逸を制御することも可能である [2]．我々は近年，ST 法による波動方程式の Dirichlet 問題の求解において，境界条件を強制的に課す方法を用いた際，Dirihclet 条件に対応する強制力が時間方向に数値振動を引き起こす現象を確認した．そこで本研究では，これを緩和するための境界安定化手法を新たに提案する．具体的には，Dirichlet 境界条件を Nitsche の方法 [3] によって課し，さらに追加の安定化項を追加する．

2 問題設定

1 次元空間 $\overline{\Omega} = [0, L]$ を棒の初期配置が占める空間とし，初期位置を意味するパラメータを $X \in [0, L]$ と定義する．$\overline{\Omega}_0$ の内部領域を $\Omega = (0, L)$ と表記する．領域境界 $X = 0, L$ において外向き方向を示す大きさ 1 のスカラーを $\overline{n}(0) = -1,\ \overline{n}(L) = 1$ とする．時間領域を $\overline{I} = [0, T]$ とし，その内部領域を $I = (0, T)$ とする．時間を意味するパラメータを $t \in \overline{I}$ と定義する．Ω $(X, t) \in \overline{\Omega}_0 \times [0, T]$ を定義域にもつ主変数からの変位ベクトルを $u \in C^2\left(\overline{\Omega} \times \overline{I}; \mathbb{R}\right)$ と定義する．初期変位 $u_0 \in C^2\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}\right)$ と初期速度 $v_0 \in C^0\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}\right)$ に対して，支配方程式の strong form は次のように与えられる:

$$\rho \ddot{u} - E u'' = 0 \qquad \text{in } Q := \Omega \times I, \tag{1}$$
$$u(0, t) = 0 \qquad t \in I, \tag{2}$$
$$u(L, t) = 0 \qquad t \in I, \tag{3}$$
$$u(X, 0) = u_0(X) \quad X \in \overline{\Omega}, \tag{4}$$
$$\dot{u}(X, 0) = v_0(X) \quad X \in \overline{\Omega}, \tag{5}$$

ただし，$\rho \in \mathbb{R}$ は棒の単位長さあたりの質量，$E \in \mathbb{R}$ は剛性を表す．$(\ddot{\cdot})$ は時間微分 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$，$(\cdot'')$ は空間微分 $\frac{\partial^2}{\partial X^2}$ を表す．

3 提案手法の変分方程式

時間領域 $\overline{I} = [0, T]$ を有限個の領域に分割し，その境界を $0 = t_0 < t_1 < \ldots, t_N = T$ とする．分割されたそれぞれの領域のうち境界を含まないものを $I_n = (t_n, t_{n+1})$ と定義する．なお，

境界も含んだものを $\overline{I}_n = [t_n, t_{n+1}]$ と定義する．時間領域 $\overline{I}_n$ と空間領域 $\overline{\Omega}$ の直積による時空間領域をスラブと呼び，閉包と内部領域をそれぞれ $\overline{Q}_n \coloneqq \overline{\Omega} \times \overline{I}_n$ および $Q_n \coloneqq \Omega \times I_n$ と定義する．次の双線形形式 $a(\cdot,\cdot)_\Omega : H^2(\Omega;\mathbb{R}) \times H^2(\Omega;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ と $a(\cdot,\cdot)_{Q_n} : L^2\left((t_n, t_{n+1}); H^2(\Omega;\mathbb{R})\right) \times L^2\left((t_n, t_{n+1}); H^2(\Omega;\mathbb{R})\right) \to \mathbb{R}$ を定義する:

$$\begin{aligned} a(u,v)_\Omega &\coloneqq \int_\Omega Eu' \cdot v' \, \mathrm{d}\Omega - \left.\left(\overline{n} \cdot (Ew' \cdot v + Ev' \cdot w) - \varepsilon_L v \cdot w\right)\right|_{X=L} \\ &\quad - \left.\left(\overline{n} \cdot (Ew' \cdot v + Ev' \cdot w) - \varepsilon_0 v \cdot w\right)\right|_{X=0}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$a(u,v)_{Q_n} \coloneqq \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(u,v)_\Omega \, \mathrm{d}t. \tag{7}$$

なお，$\varepsilon_0, \varepsilon_L$ はペナルティパラメータであり，$a(u,u)_\Omega$ の正定値性を担保するように定める．

2 つの有限次元関数空間 $V_h \subset H^2(\Omega;\mathbb{R})$ および $W_h^n \subset H^2(I_n;\mathbb{R})$ のテンソル積による関数空間 $Y_h^n \coloneqq V_h \otimes W_h^n$ を定義する．試験関数を $u_h \in Y_h^n$，重み関数を $\delta u_h \in Y_h^n$ する．なお，関数空間の定義はスラブ $\overline{Q}_n$ で完結しているため，時刻 t_n，$(n = 1, \ldots, N-1)$ において異なる左右極限が存在するが，$u_h(X, t_n^+) \in Y_h^n$，$u_h(X, t_n^-) \in Y_h^{n-1}$ として区別する．左右極限の差を $[\![u_h(X,t_n)]\!] \coloneqq u_h(X,t_n^+) - u_h(X,t_n^-)$ と表記する．

スラブごとに次のような変分方程式を構成し，$n = 0$ から逐次求解する:

$$\begin{aligned} &(\rho \ddot{u}_h, \delta \dot{u}_h)_{L^2(Q_n;\mathbb{R})} + a(u_h, \delta \dot{u}_h)_{Q_n} + \underbrace{\left(\frac{\tau}{\rho}(\rho \ddot{u}_h - E u_h''), (\rho \delta \ddot{u}_h - E \delta u_h'')\right)_{L^2(Q_n;\mathbb{R})}}_{\text{GLS 安定化項}} \\ &\quad + \underbrace{\left(\rho [\![\dot{u}_h(\cdot,t_n)]\!], \delta \dot{u}_h(\cdot,t_n^+)\right)_{L^2(\Omega;\mathbb{R})}}_{\text{スラブ間の速度の連続性を課す項}} + \underbrace{a([\![u_h(\cdot,t_n)]\!], \delta u_h(\cdot,t_n^+))_\Omega}_{\text{スラブ間の変位の連続性を課す項}} \\ &\quad + \underbrace{\left.\int_{t_n}^{t_{n+1}} \gamma_v \dot{u}_h \cdot \dot{u}_h \, \mathrm{d}t\right|_{X=L} + \left.\int_{t_n}^{t_{n+1}} \gamma_v \dot{u}_h \cdot \dot{u}_h \, \mathrm{d}t\right|_{X=0}}_{\text{新しく導入した安定化 その 1}} \\ &\quad + \underbrace{\left.\int_{t_n}^{t_{n+1}} \gamma_a \ddot{u}_h \cdot \ddot{u}_h \, \mathrm{d}t\right|_{X=L} + \left.\int_{t_n}^{t_{n+1}} \gamma_a \ddot{u}_h \cdot \ddot{u}_h \, \mathrm{d}t\right|_{X=0}}_{\text{新しく導入した安定化 その 2}} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

なお，変分方程式の性質や新しく導入した境界安定化の効果は発表で説明する．

謝辞　本研究は JSPS 科研費 JP25KJ0079 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] T.J.R. Hughes and G.M. Hulbert, “Space–time finite element methods for elastodynamics: formulations and error estimates”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **66** (1988) 339–363.

[2] G.M. Hulbert, “Time finite element methods for structural dynamics”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33** (2) (1992) 307–331.

[3] J.C.C. Nitsche, “Über ein variationsprinzip zur lösung von dirichlet-problemen bei verwendung von teilräumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, **36** (1971) 9–15.