

偏微分方程式の有限体積法・粒子法ハイブリッド計算

Hybrid Finite Volume - Particle Method for Partial Differential Equations

降簾 大介 (Daisuke Furihata)

大阪大学 D3 センター (D3 Center, The University of Osaka)

e-mail : daisuke.furihata.cmc@osaka-u.ac.jp

1 はじめに

現実問題の多くが持つ質量保存性・局所組成保存性や全エネルギー減少性などの性質を再現する構造保存数値解法は発展著しいが、計算量等の問題も抱える。そこで異なるアプローチとして粒子法の適用を考える。保存系時間発展問題は、連続の式の適用で (構造保存の枠組みの導入の可能性を鑑みた) Voronoi 分割に基づく粒子法を適用可能である。さらに非保存系 (Allen-Cahn 方程式など) に粒子法適用手法を拡張する。その過程で、粒子法と有限体積法のハイブリッドともいうべき数値解析法が数学的に自然に考えられること、さらにそのハイブリッド比率を自由に調整可能なことを見出した。実例を交えて紹介する。

2 保存系時間発展問題への粒子法適用

保存系、いわゆる連続の式 $\partial u / \partial t + \operatorname{div}(u \mathbf{v}) = 0$ が成り立つ系への粒子法適用は容易である。ただし $u = u(x, t)$ は系の密度であり、 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t)$ は系の粒子速度である。そして、系の支配方程式を

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{M+1} \Delta^M \frac{\delta G}{\delta u}, \quad M \geq 0. \quad (1)$$

と想定する。なお以降は一般性を失わない範囲で $M = 1$ とする。この対象 (1) に連続の式を適用し次の式を得る。

$$\mathbf{v} = - \left(\frac{1}{u} \right) \operatorname{grad} \left(\frac{\delta G}{\delta u} \right) \quad (2)$$

あとはこの式に粒子法を適用すれば良い。具体的な粒子法スキームの設計には、(2) 右辺の $\operatorname{grad}(\delta G / \delta u)$ 部分を離散化する必要がある。よく知られた SPH 法や MPH 法ではなく、構造保存に繋がる可能性を鑑みて、粒子位置を母点とした Voronoi 空間分割に基づき粒子の密度を定義し、微分作用素を有限体積法的に離散化する。具体的には、粒子 i の位置が母点な Voronoi 領域を Ω_i に対し、その上で密度 u_i を $u_i \stackrel{\text{def}}{=} m / |\Omega_i|$ と定義する (いったん、粒子重さ m は定数とする)。

離散化した微分作用素については、たとえば以下のような定義を用いる。

$$(\operatorname{grad}_d^{\text{cov}} \phi)_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in N_i} \phi_{(i,j)} \mathbf{n}_{ij} r_{ij}, \quad (\Delta_d^{\text{cov}} \phi)_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in N_i} \left(\frac{\phi_j - \phi_i}{l_{ij}} \right) r_{ij}.$$

ただし、母点 i に対し隣接母点集合を N_i 、隣接母点までの距離を l_{ij} 、隣接母点 j との間の境界面大きさを r_{ij} 、その境界面での外向き法線ベクトルを \mathbf{n}_{ij} とする。

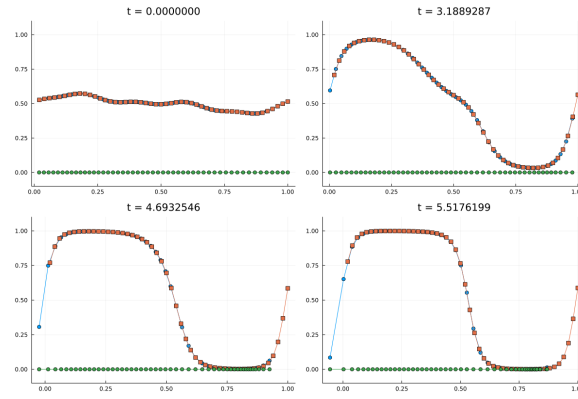


図 1. ハイブリッド解法を 1 次元 Allen-Cahn 方程式に適用した数値解の様子

例: Cahn-Hilliard 方程式への適用: (パラメータ p, q, r である) Cahn-Hilliard 方程式に適用すると、下記のような常微分方程式となる (i は粒子番号).

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = -\frac{|\Omega_i|}{m} \left(\text{grad}_d^{\text{cov}} \frac{\delta G}{\delta u} \right)_i, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\delta G}{\delta u} \right)_i = pu_i + 4r(u_i - \frac{1}{2})^3 + q(\Delta_d^{\text{cov}} u)_i. \quad (4)$$

3 非保存系への拡張

拡張として、連続の式の $\text{div}(u\mathbf{v})$ に相当しない項に「粒子重さが変化する」方程式を割り当てることを考える. たとえば Allen-Cahn 方程式のように $\partial u / \partial t = P(u) + c\Delta u$ という方程式 (ただし $P(u)$ は u の多項式、 c は定数) に対し、次の“密度 u –質量 m –速度 \mathbf{v} ”方程式を想定する (ただし、 $\Delta\Omega$ は粒子の支配領域大きさ).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\Delta\Omega} \frac{dm}{dt} - \text{div}(u\mathbf{v}). \quad (5)$$

すると最終的な 粒子法-有限体積法 スキームは次のように整理される.

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= -\left(\frac{c}{u}\right) \text{grad}(u), \\ \frac{dm}{dt} &= P(u)\Delta\Omega. \end{cases} \quad (6)$$

これは第一式が粒子法で第二式が有限体積法であり、いわゆるハイブリッド解法となっている. さらに、項の対応関係には制限は無く、このハイブリッド比率等も (原理的には) 変更が可能である.

1 次元問題への適用例: 上に述べたハイブリッド解法を Allen-Cahn 方程式で空間が 1 次元の場合に適用してみた結果が図-1 である. 詳細は省略するが、本解法が適切な近似解を出力し、かつ、粒子法の低密度状況における精度低下問題の回避が見てとれる. ハイブリッド比率を変えて計算した数値解も得られており、それらについても講演時に紹介したい.

最適輸送と移流による流れ場の補間

Interpolation of Velocity Field

Using Optimal Transport and Convection

堀江 正信 (Masanobu Horie)¹, 中嶋 怜央 (Leo Nakajima)¹, 佐藤 慎太郎 (Shintaro Sato)²

¹ 株式会社 R I C O S (RICOS Co. Ltd.), ² 東北大学 (Tohoku University)

e-mail : horie@ricos.co.jp

1 概要

物理現象の予測および数値解析を高速に行うための技術として機械学習が着目されている。筆者らによってこれまでに、数値解析手法を導入した機械学習モデルによって学習していない条件に対しても高精度に予測することが可能であることが実証されてきた [1, 2, 3]。これらの手法は偏微分方程式の微分演算からくる情報伝播の局所性を利用しており、系の大域的な特徴に依存していないため、解析領域形状といった大域的な特徴が変化しても精度が劣化しにくい。一方で、これらの手法は、その局所性ゆえに、非圧縮性流れなどに顕著に見られる大域的な相互作用を捉えにくく、大域的な情報伝播のためには既存の数値解析手法と同様に反復的な計算を多く行う必要があり、高速化の度合いも限定的になってしまうことがある。

そこで、本研究では、さまざまな条件で行った既知の数値解析データからわずかに条件が異なる未知の入力について、高速に解を予測する手法を検討する。特に、条件が近い既知のデータを何らかの意味で補間することによって、それらの情報を最大限効率的に活用することを考える。

具体的には、 d 次元領域 $\Omega \in \mathbb{R}^d$ において k 個の異なる条件 (例えば、埋め込み境界法における個体領域の分布) の集合 Θ の元 $\theta_1, \dots, \theta_k \in \Theta$ に対して数値解析結果となる流れ場の集合 \mathcal{U} の元 $u_{\theta_1}, \dots, u_{\theta_k} \in \mathcal{U}$ が与えられているとする。すなわち、下記のような k 個の既知データがあると仮定する:

$$u_{\theta_1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, (t, x) \mapsto u_{\theta_1}(t, x) \quad (1)$$

$$u_{\theta_2} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, (t, x) \mapsto u_{\theta_2}(t, x) \quad (2)$$

$$\vdots \quad (3)$$

$$u_{\theta_k} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, (t, x) \mapsto u_{\theta_k}(t, x) \quad (4)$$

この既知データをもとに、未知の条件 θ_{target} に対応する流れ場

$$u_{\theta_{\text{target}}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, (t, x) \mapsto u_{\theta_{\text{target}}}(t, x) \quad (5)$$

をよく近似する予測

$$\hat{u}_{\theta_{\text{target}}} := \text{Average} \left[\left\{ \left(u_{\theta_i}, \rho(\theta_i, \theta_{\text{target}}) \right) \right\}_{i=1}^k \right] \quad (6)$$

を求める問題を考える。ただし、 $\rho : \Theta \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ は入力条件間の適当な距離関数、 $\{\cdot\}$ は多重集合、Average は $\mathcal{U} \times \mathbb{R}$ 上の多重集合全体の集合から \mathcal{U} への写像であって何らかの意味における平均操作である。本研究では、この ρ および Average を適切に定めることによって、精度の高い補間の実現を目指す。

Average の候補として第一に思いつくのは単純な平均操作であるが、単純な平均操作では想定された補間操作がなされない場合がある。例えば、1 次元における下記のような状況を考える：

$$u_{\theta_1}(x) = \sin(x) \quad (7)$$

$$u_{\theta_2}(x) = \sin(x + \delta) \quad (8)$$

$$u_{\theta_{\text{target}}}(x) = \sin(x + \delta/2) \quad (9)$$

これは、位相のずれの意味で $u_{\theta_{\text{target}}}$ が u_{θ_1} と u_{θ_2} の中間に位置することから、位相のずれの意味での補間問題と考えられる。しかし、単純な平均操作では

$$\hat{u}_{\theta_{\text{target}}}^{\text{simple}} := \frac{u_{\theta_1} + u_{\theta_2}}{2} = \cos(\delta/2) \sin(x + \delta/2) \quad (10)$$

となりその誤差は

$$u_{\theta_{\text{target}}} - \hat{u}_{\theta_{\text{target}}}^{\text{simple}} = (1 - \cos(\delta/2)) \sin(x + \delta/2) \quad (11)$$

であるから、位相のずれ δ が大きい場合誤差が大きくなる。

そのため、我々は分布間の自然な補間を表現できる最適輸送に着目し、このような補間問題の高精度化を目指す。最適輸送とは、与えられたコスト関数のもとで、ふたつの確率測度間のコストがなるべく小さくなるように輸送を定める問題であり、確率測度間の距離の定義や形状の変形に適用されている [4]。また、コスト関数を L^2 距離に設定した最適輸送は移流方程式に帰着させられることが知られており [5]、この定式化もあわせて検討する。

謝辞 本研究は、JSPS 科研費 23KK0182、24K22300、NEDO ディープテック・スタートアップ支援事業 JPNP23019、防衛装備庁安全保障技術研究推進制度 JPJ004596 の支援を受けたものである。

参考文献

- [1] Masanobu Horie, Naoki Morita, Toshiaki Hishinuma, Yu Ihara, and Naoto Mitsume. Isometric transformation invariant and equivariant graph convolutional networks. In *International Conference on Learning Representations*, 2021.
- [2] Masanobu Horie and Naoto Mitsume. Physics-embedded neural networks: Graph neural PDE solvers with mixed boundary conditions. In Alice H. Oh, Alekh Agarwal, Danielle Belgrave, and Kyunghyun Cho, editors, *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2022.
- [3] Masanobu Horie and Naoto Mitsume. Graph neural PDE solvers with conservation and similarity-equivariance. In *Forty-first International Conference on Machine Learning*, 2024.
- [4] Justin Solomon, Fernando De Goes, Gabriel Peyré, Marco Cuturi, Adrian Butscher, Andy Nguyen, Tao Du, and Leonidas Guibas. Convolutional wasserstein distances: Efficient optimal transportation on geometric domains. *ACM Transactions on Graphics (ToG)*, Vol. 34, No. 4, pp. 1–11, 2015.
- [5] Jean-David Benamou and Yann Brenier. A computational fluid mechanics solution to the monge-kantorovich mass transfer problem. *Numerische Mathematik*, Vol. 84, No. 3, pp. 375–393, 2000.

あるベクトル場の波動方程式における構造保存数値計算について

On structure-preserving numerical calculation of wave equation for a vector field

土屋 拓也 (Takuya Tsuchiya)¹¹ 明治学院大経済 (Meiji Gakuin Univ.)

e-mail : tatsuchi@eco.meijigakuin.ac.jp

1 概要

拘束条件をもつベクトル場の波動方程式に対して、構造保存型数値計算手法を用いた高精度数値計算を行う。ここでは、正準形式での発展方程式及び拘束条件式の連立方程式系を対象とする。拘束条件をもつために、大域保存量である Hamiltonian 密度の全空間積分量に加え、局所保存量を共に保存する数値計算を行い、その結果を紹介する。

2 導入

波動方程式は波の現象を表す方程式であり、電磁波や重力波などの現象を記述する方程式として知られている。これまでにスカラー場に関する曲がった時空における波動方程式の高精度数値計算手法を行ってきた [1, 2] が、電磁波や重力波を記述する方程式はそれぞれベクトル場及びテンソル場で表現される。そのため、これらの高精度な数値計算手法を確立するために、今回ベクトル場に対する波動方程式を対象とする。

スカラー場とベクトル場における違いは発展変数の数である。対象とする方程式系は対称性を有する場合が多く、発展変数間に拘束条件を有する場合がある。スカラー場に対する高精度な数値計算を行う際に、これまで正準形式を用いて空間大域的な保存量に相当する Hamiltonian 密度の空間積分量を拘束条件とみなして、この量を保存するようにして構造保存型数値計算手法を用いて計算を行った。一方でベクトル場の場合には Maxwell 方程式の Gauss の法則のような局所的保存量を持つことがあり、この量を持つ方程式の正準形式を対象とする場合には、この局所保存量と大域保存量の Hamiltonian 密度の空間積分量の両方を満たす構造保存数値計算を行う必要がある。

3 発展方程式系

発展変数を A^μ とする Lagrangian が次で与えられる方程式を対象とする (参考 [3])。

$$\mathcal{L} := -\frac{1}{4p_1}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \frac{p_2}{2}A^\mu A_\mu + \frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) + p_3 A^\mu i_\mu. \quad (1)$$

$p_1 \neq 0$, p_2 , p_3 は定数, $\lambda \neq 0$ はスカラーである。 i^μ は外力を表し、連続の方程式 $\partial_\mu i^\mu = 0$ を満たすとする。この Lagrangian は Proca 方程式の Lagrangian に発展変数の発散項を Lagrange 乗数として付加したものとなっている。このとき、 A^μ と λ に関する Euler-Lagrange 方程式から

$$\frac{1}{p_1}(\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu) + p_2 A^\mu + p_3 i^\mu - \frac{1}{\lambda}(\partial^\mu \partial_\nu A^\nu) = 0, \quad (2)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (3)$$

が得られる。 A^0 の共役運動量 Π_0 は

$$\Pi_0 = \frac{1}{\lambda} \partial_0 A^0 + \frac{1}{\lambda} (\partial_m A^m). \quad (4)$$

A^i の共役運動量 Π_i は

$$\Pi_i = \frac{1}{p_1}(\partial_0 A_i + \partial_i A^0). \quad (5)$$

λ の共役運動量 π_λ は

$$\pi_\lambda = 0 \quad (6)$$

となるため, λ は発展変数ではない. Hamiltonian 密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{\lambda}{2}\Pi_0\Pi_0 - \Pi_0(\partial_m A^m) + \frac{p_1}{2}\Pi_m\Pi^m - \Pi^m(\partial_m A^0) + p_3 i^0 A^0 - p_3 i_m A^m \\ & + \frac{1}{4p_1}(\partial_m A_n - \partial_n A_m)(\partial^m A^n - \partial^n A^m) + \frac{p_2}{2}A^0 A^0 - \frac{p_2}{2}\delta_{mn}A^m A^n \end{aligned} \quad (7)$$

であり, 正準方程式は

$$\partial_0 A^0 = \lambda\Pi_0 - \partial_i A^i, \quad (8)$$

$$\partial_0 \Pi_0 = -p_3 i^0 - p_2 A^0 - \partial_i \Pi^i, \quad (9)$$

$$\partial_0 A^i = p_1 \Pi^i - \partial^i A^0, \quad (10)$$

$$\partial_0 \Pi_i = p_3 i_i + p_2 A_i - \partial_i \Pi^0 + \frac{1}{p_1}(\partial_j \partial^j A_i - \partial_i \partial_j A^j), \quad (11)$$

$$\mathcal{C}_1 = \Pi_0 \approx 0, \quad (12)$$

$$\mathcal{C}_2 = -p_3 i^0 - p_2 A^0 - \partial_i \Pi^i \approx 0. \quad (13)$$

ここで, ≈ 0 は weak equality といい, 拘束条件すべてが成り立つときにのみ等号が成立するという意味で用いている.

$\mathcal{C}_1 = \Pi_0$ の時間発展は

$$\partial_0 \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 \quad (14)$$

であり, \mathcal{C}_2 の時間発展は

$$\partial_0 \mathcal{C}_2 = -p_3 \lambda \mathcal{C}_1 + \partial_i \partial^i \mathcal{C}_1 \quad (15)$$

と拘束条件とその空間微分の線型和で表現される.

講演では, この方程式系の構造保存数値計算の結果の紹介を行う予定である. また, 可能であれば非線型 Klein-Gordon 方程式とのカップリングを行うなどの非線型効果の影響を考慮した数値結果も紹介する予定である.

謝辞 本研究にあたり, 科研費 (課題番号:24K06855, 24K06856) の助成を受けた.

参考文献

- [1] 土屋 拓也, 中村 誠, “半線型 Klein-Gordon 方程式の解の収束性と挙動について”, 日本応用数理学会 2024 年度年会.
- [2] 土屋 拓也, 中村 誠, “de Sitter 時空における半線型 Klein-Gordon 方程式の解の収束性と挙動について”, 日本応用数理学会第 21 回研究部会連合発表会.
- [3] 日置 善郎, ” 相対論的量子場 (改訂版)”, 吉岡書店 (2017).

固体境界が埋め込まれたナビエ・ストークス方程式と 画像データ駆動流れシミュレーションへの応用

Immersed-boundary Navier-Stokes equation and its application for image-data driven flow simulation

大島 伸行 (Nobuyuki Oshima)¹, 中道 信人 (Nobuto Nakamichi)²,
ジョ ヨンファ (Younghwa Cho)²

¹北海道大学工学研究院 (Faculty of Engineering, Hokkaido University),

²北海道大学工学院 (Graduate School of Engineering, Hokkaido University)

e-mail: oshima@eng.hokudai.ac.jp

1 固体境界が埋め込まれたナビエ・ストークス方程式

領域境界を関数等値面 (Level-set) で表す手法は画像処理, CAD の各種演算や界面の数値モデルなどに広く応用される. Oshima[1, 2]はこれを流れ方程式に適用して, 物体まわりの流れを解にもつように改良したナビエ・ストークス方程式 (Immersed-Boundary Navier-Stokes) を以下のように提案した.

$$\frac{\partial \varepsilon \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \rho) \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \rho \mathbf{u}) \mathbf{u} + \nabla \cdot \varepsilon (p \mathbf{I} - \Sigma) - p \nabla \varepsilon - \varepsilon \mathbf{f}_w = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon E}{\partial t} + \nabla \cdot \varepsilon (E + p) \mathbf{u} - \nabla \cdot \varepsilon \Sigma \mathbf{u} - \nabla \cdot \varepsilon \mathbf{q} - p \nabla \varepsilon \cdot \mathbf{u} - \varepsilon \mathbf{f}_w \cdot \mathbf{u} - \varepsilon q_w = 0 \quad (3)$$

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) = \rho R T \quad (4)$$

ここで, 変数 ε は物体境界近傍で固体 0 から流体 1 に急峻かつ滑らかに変化する関数とし, その中間値 (0.5) 等値面が物体壁境界の形状を表す. 物理変数 (速度 \mathbf{u} , 圧力 p , 密度 ρ , 全エネルギー E , 温度 T) は境界, 固体を含む全領域に定義され, 流体部 (~ 1) において物体まわり流れを与えると考える. 密度一定とし式 (3) (4) を除く非圧縮性近似では, 式 (1) (2) より圧力ポアソン式を導出して, MAC 法など従来解法で数値的に求解できる.

固体が存在する影響は薄い境界領域 ($0 < \varepsilon < 1$) において実質的な流体密度が $\varepsilon \rho$ により減少することで表されており, これが流れを物体から排除する圧力応力を与える. さらに, 固体と流体との粘性拡散による運動量およびエネルギー交換を表す壁面関数 \mathbf{f}_w および q_w は薄い境界領域に体積力として与えられ, 境界厚さ Δ , 粘度 μ , 熱伝達率 κ とした次元解析により

$$\varepsilon \mathbf{f}_w = -\alpha \mu \left\{ \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{\Delta} \right\}^2 \mathbf{u}, \quad \varepsilon q_w = \beta \kappa \left\{ \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{\Delta} \right\}^2 (T_w - T) \quad (5)$$

と近似する. ここで, パラメータ $\alpha, \beta=0$ がノイマン条件 (速度 slip, 断熱), ε 定義に応じた正定数 ($\varepsilon = \{\tanh(\xi/\Delta) - 1\}/2$ (ξ : 符号付距離関数) のとき 32) がディレクレ条件を近似する.

非圧縮性流れの検証例として翼形および円柱 2 次元および球 3 次元流れ, 計算格子に傾きをもつ平行チャンネル流れ [1, 2], 複数の移動物体まわり 2 次元流れ [3] など, また, 圧縮性流れでは円柱前方の離脱衝撃波の予測 [4] が示されている.

2 画像駆動流れシミュレーション

物体形状がデジタル画像データで与えられるとき、境界を等値面にもつ滑らかな ε 分布の算出には画像処理におけるフィルタ操作が有用である。界面原点のステップ関数に法線方向 1 次元フィルタ操作を適切なフィルターカーネルによって施すと近傍の符号付距離関数やその単調関数が算出され、これを 2, 3 次元に拡張適用すると滑らかな曲面近傍の ε 分布が近似的に導出できる [5]。デジタル画像や医療 CT のように画像格子が規格的であれば、これをシミュレーション計算格子とみなして物体形状を表す ε 分布を求めるためのフィルタ操作は汎用ソフトウェアで高速に実行できる。

3 次元画像例として複雑形状（機械装置）をレーダ計測して得た二値化データの適用例を示す。ここでは、①計測された点群データから 1 辺 256 分割の 3 次元等間隔格子に固体と背景（流れ場）領域を区別する二値が与えられ、②フィルター操作によって ε 分布を得ている。

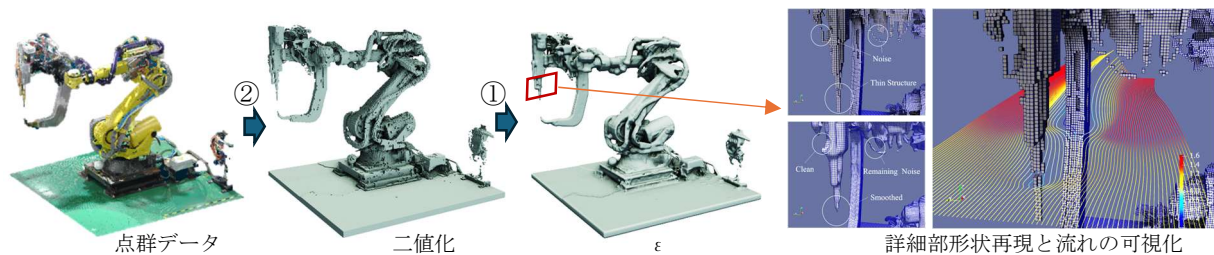


図1 3次元形状のレーダ計測から ε 分布の導出および詳細部の流れ可視化

3 まとめ

物体埋め込みナビエ・ストークス方程式を用いることで、格子生成や物体境界条件の補間などの従来の流れシミュレーションにおいて汎用化・高速化を妨げていた前処理工程が「画像処理」で規格化され、画像データから直接駆動する流れシミュレーションが構築された。これによって、入力（画像データ）から中間処理（流れ解析）を経て出力（可視化画像）に至るすべての情報と工程が同じデジタル画像のデータ規格にて離散化されることになり、数値解析の全工程を対象にした並列/GPU 処理高速化、AI を含むデータ解析、最適化/逆解析などに大きな利点となると考える。

参考文献

- [1] N.Oshima, N., A Novel approach for wall-boundary immersed flow simulation: proposal of modified Navier-Stokes equation, Journal of Fluid Science and Technology, Vol. 18, No. 4 (2023) doi.org/10.1299/jfst.2023jfst0034.
- [2] Oshima, N.: A Novel approach for wall-boundary immersed flow simulation (part 2: modeling of wall shear stress), Journal of Fluid Science and Technology, Vol. 19, No. 3 (2024) doi.org/10.1299/jfst.2024jfst0026, Errata 訂正 doi.org/10.1299/jfst.2024jfstE01.
- [3] 中道, Laeron, Cho, 大島, 境界埋め込みナビエ・ストークス方程式による移動境界流れ解析, 第 38 回数値流体力学シンポジウム予稿集, (2024), OS2-4-3-02.
- [4] 川城, 寺島, 大島, 物体境界埋め込み方程式による圧縮性流れ直交格子法の開発, 第 30 回計算工学会講演会予稿集, (2025), C-09-02.
- [5] N.Nakamichi, Y.Cho, and N.Oshima, Image-data-driven Simulation of Fluid Dynamics: Proposal and Evaluation, Mechanical Engineering Journal, Vol.11 (2024) doi.org/10.1299/mej.24-00196.