

IMT-DE 変換を用いた関数近似

A function approximation using the IMT-DE transformation

緒方 秀教 (Hidenori Ogata)¹

¹ 電気通信大学大学院 情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻 (Department of Computer and Network Engineering, Graduate School of Informatics and Engineering, The University of Electro-Communications)

e-mail : hidenori.ogata@uec.ac.jp

1 概要

本講演では IMT-DE 変数変換を用いた関数近似の手法を提案する。変数変換の技法は伝統的に数値積分に用いられていたが、DE 公式に用いられている DE 変換は近年、積分方程式など数値積分以外の数値計算に応用されている。本講演では、もう一つの変数変換である IMT 型変数変換も、周期的 Sinc 近似と併用して、数値積分以外の数値計算に応用できることを示し、その例として関数近似の手法を示す。

2 関数近似

$f(x)$ を有界閉区間 $[a, b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) 上で定義された解析関数とする。以下、 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ の端点でゼロになるとする： $f(a) = f(b) = 0$ 。端点でゼロにならない場合は、

$$f(x) = f_0(x) + f(a)\frac{b-x}{b-a} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

で定義された関数 $f_0(x)$ は端点でゼロになるから、 $f_0(x)$ について考察すればよい。

関数 $f(x)$ に対し、IMT-DE 型数値積分公式 [1] で用いられている次の IMT-DE 型変数変換を施す：

$$x = \varphi(u) := \frac{b-a}{2} \tanh \left(A \sinh B \left(\frac{1}{1-u} - \frac{1}{u} \right) \right) + \frac{b+a}{2} \quad (A, B > 0 \text{ は定数}).$$

すると、変数変換により得られる関数 $g(u) := f(\varphi(u))$ は区間 $(0, 1)$ 上 C^∞ -級であり $g^{(n)}(0) = g^{(n)}(1) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を満たす。したがって、 $g(u)$ は全無限区間 $(-\infty, \infty)$ 上で定義された周期 1 の周期関数に拡張できる。そこで、周期関数に対する Sinc 近似 [2] (以後「周期 Sinc 近似」と呼ぶことにする) による関数近似を考えることができる。

$$g(u) \simeq \mathcal{S}_N[g](u) = h \sum_{k=0}^{2N} g(kh) \frac{\sin[(\pi/h)(u - kh)]}{\sin[\pi(u - kh)]} \quad \left(N \text{ は正の定数, } h = \frac{1}{2N+1} \right).$$

こうして、関数 $f(x)$ に対する次の近似を得る。

$$f(x) \simeq \mathcal{S}_N[f](x) := \mathcal{S}_N[f \circ \varphi](\varphi^{-1}(x)) = h \sum_{k=0}^{2N} f(\varphi(kh)) \frac{\sin[(\pi/h)(\varphi^{-1}(x) - kh)]}{\sin[\pi(\varphi^{-1}(x) - kh)]}.$$

近似関数 $\mathcal{S}_N[f](x)$ は次を満たす：

$$\mathcal{S}_N[f](\varphi(kh)) = f(\varphi(kh)) \quad (k = 1, 2, \dots, 2N).$$

したがって、 $\mathcal{S}_N[f](x)$ は点 $x = \varphi(kh)$ ($k = 1, 2, \dots, 2N$) を標本点に持つ補間公式である。

周期 Sinc 近似は、近似しようとする関数が解析的な周期関数であるとき、近似の精度が良いことが知られている。今の場合、 $g(u) = f(\varphi(u))$ は解析的でなく C^∞ -級の周期関数であるが、この場合にも周期 Sinc 近似の精度は良いことが期待される。したがって、関数近似 $f(x) \simeq \mathcal{S}_N[f](x)$ の精度は高いことが期待される。実際、理論誤差解析により本方法の誤差は $O[\exp(-cN/\log^2 N)]$ (c は正の定数) であることが示される。

3 数値例

区間 $[0, 1]$ 上で定義された関数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ に対し関数近似 $f(x) \simeq \mathcal{S}_N[f](x)$ の性能を調べた。IMT-DE 変換のパラメータを $(A, B) = (1, 1), (\pi/2, \pi/2), (1/2, 1/2), (\pi/2, \pi/4)$ と取って倍精度演算により近似関数 $\mathcal{S}_N[f](x)$ を計算し、誤差

$$\text{error} := \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - \mathcal{S}_N[f](x)|$$

の関数評価回数 $N_{\text{eval}} := 2N$ に対する変化を調べた。図 1 にその結果を示す。図より、本方法の関数近似は関数評価回数 N_{eval} を増やすにつれて指数関数的に収束することがわかる。

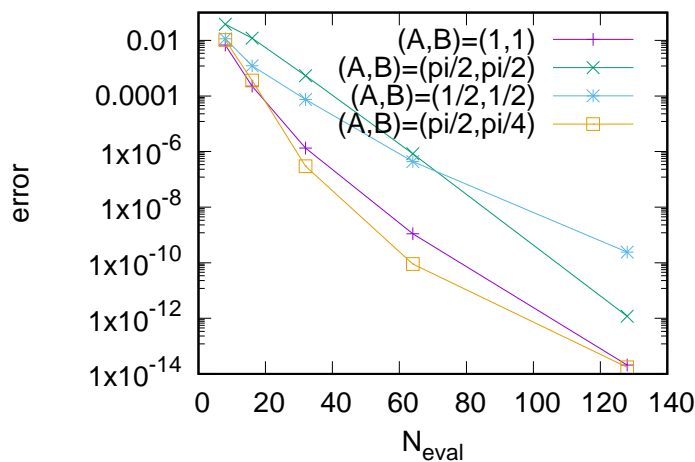


図 1. 関数近似誤差.

謝辞 本研究は JSPS 科研費 24K06840 の助成を受けている。

参考文献

- [1] Mori, M., An IMT-type double exponential formula for numerical integration, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. Vol.14 (1978), 713–729.
- [2] Stenger, F., Baker, B., Brewer, C., Hunter, G., Kaputerko, S. and Shepherd, J., Periodic approximation based on sinc, Int. J. Pure Appl. Math., Vol.49 (2008), 63–72.

円柱領域における divergence-free 有限要素解の構築と厳密誤差解析

Construction of divergence-free finite element solutions and rigorous error analysis on a cylindrical domain

劉 雪峰 (Xuefeng LIU)¹¹ 東京女子大学 (Tokyo Woman's Christian University)

e-mail : xfliu@cis.twcu.ac.jp

1 Introduction

The regularity and uniqueness of solutions for the Navier–Stokes equation is a fundamental problem in the field of partial differential equations. A recent work by Guilloid and Šverák [1] reports a numerical investigation into the non-uniqueness of the Navier–Stokes equation on a cylindrical domain, where the authors suggest that “it is conceivable that our calculations could be upgraded to a computer-assisted proof, although this would require substantial additional work and calculations, including a more detailed analysis of the asymptotic expansions of the solutions at large distances.”

To validate the numerically observed behaviors of solutions, verified computation is an important tool for providing rigorous proofs and drawing mathematically correct conclusions. A recent result using such an approach is the computer-assisted solution verification method proposed by the author to study the Navier–Stokes equation on 3D domains [2]. In this method, an explicit error estimation technique using the hypercircle method for the projection operator related to the Stokes equation plays a crucial role.

In the study of solution blow-up or non-uniqueness, the cylindrical domain has been frequently investigated. However, for problems defined in cylindrical coordinates, numerical schemes that provide divergence-free solutions have not been well studied.

Note that the divergence-free condition for a velocity field (u_r, u_θ, u_z) in cylindrical coordinates is given by

$$\frac{1}{r}\partial_r(ru_r) + \partial_z u_z = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (1.1)$$

In this research, we propose a new scheme to construct approximate solutions that strictly satisfy the above divergence-free condition, along with error estimation using the technique of the hypercircle method.

2 FEM schemes using new variables

We focus on axisymmetric solutions in a cylindrical domain, whose central axis and cross-section are denoted by Γ_0 and ω , respectively. Adopting cylindrical coordinates and assuming $f_\theta = 0$ in $\mathbf{f} = (f_r, f_\theta, f_z)$, and that \mathbf{u} is swirl-free—i.e., $\partial_\theta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ and $u_\theta = 0$ in $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$ —we obtain the weak formulation of the Stokes equations as follows:

Find $(u_r, u_z, p) \in V_r \times V_z \times L^2_{0,r}(\omega)$ such that

$$\begin{aligned} (\mu \nabla u_r, \nabla v_r)_r + (\mu u_r, v_r)_{1/r} - (p, \frac{1}{r} \partial_r(rv_r))_r &= (f, v_r)_r \quad \forall v_r \in V_r, \\ (\mu \nabla u_z, \nabla v_z)_r - (p, \partial_z v_z)_r &= (f, v_z)_r \quad \forall v_z \in V_z, \\ (q, \frac{1}{r} \partial_r(ru_r) + \partial_z u_z)_r &= 0 \quad \forall q \in L^2_{0,r}(\omega), \end{aligned} \quad (2.1)$$

where $(\cdot, \cdot)_r = \int_{\omega} (\cdot)(\cdot) r dr dz$, $\nabla v = \left(\partial_r v, \partial_z v \right)^T$,

$$\begin{aligned} L^2_{0,r}(\omega) &= \{q : \int_{\omega} |q|^2 r dr dz < \infty, \int_{\omega} q r dr dz = 0\}, \\ H^1_r(\omega) &= \{q : \int_{\omega} (|q|^2 + |\partial_r q|^2 + |\partial_z q|^2) r dr dz < \infty\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

and

$$\begin{aligned} V_r &= \{u_r \in L^2_{1/r}(\omega) \cap H^1_r(\omega) : u_r|_{\partial\omega} = 0\}, \\ V_z &= \{u_z \in H^1_r(\omega) : u_z|_{\partial\omega \setminus \Gamma_0} = 0, \partial_r u_z|_{\Gamma_0} = 0\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

For the axisymmetric Stokes solution, we reformulate it by introducing new variables,

$$u_1 = ru_r \in V_{0,r} = \{rv \mid v \in V_r\}, \quad u_2 = ru_z \in V_{0,z} = \{rv \mid v \in V_z\}. \quad (2.4)$$

Note that, by the definitions in (2.2), $H^1_{1/r}(\omega) \subset L^2_{1/r}(\omega)$ in (2.4). Thus the weak formulation reads: Find $(u_1, u_2, p) \in V_{0,r} \times V_{0,z} \times L^2_0(\omega)$ such that

$$\begin{aligned} (\mu \nabla u_1, \nabla v_1)_{\frac{1}{r}} - (p, \partial_r v_1) &= (f, v_1) \quad \forall v_1 \in V_{0,r}, \\ (\mu \nabla u_2, \nabla v_2)_{\frac{1}{r}} - (\mu u_2, v_2)_{\frac{1}{r^3}} - (p, \partial_z v_2) &= (f, v_2) \quad \forall v_2 \in V_{0,z}, \\ (q, \partial_r u_1 + \partial_z u_2) &= 0 \quad \forall q \in L^2_r(\omega), \end{aligned} \quad (2.5)$$

where $L^2_0(\omega) = \{q : \int_{\omega} |q|^2 dr dz < \infty, \int_{\omega} q dr dz = 0\}$.

Notably, in the new formulation, both the gradient and divergence operators appear the same as in Cartesian coordinates. This allows us to use traditional FEM schemes, such as the Scott–Vogelius FEMs and the hypercircle technique [2], to obtain point-wise divergence-free approximate solutions with explicit error estimation, while carefully handling the weight $1/r$.

In this talk, we will discuss newly developed FEM schemes and the hypercircle technique used to obtain a priori error estimates for FEM solutions to the Stokes equation on a cylindrical domain. This research is a joint work with Shangyou Zhang from the University of Delaware.

参考文献

- [1] J. Guilloid and V. Šverák, Numerical investigations of non-uniqueness for the Navier–Stokes initial value problem in borderline spaces, *J. Math. Fluid Mech.* 25 (2023), no. 3, Paper No. 46, 25 pp.
- [2] X. Liu, M.T. Nakao and S. Oishi, Computer-assisted proof for the stationary solution existence of the Navier–Stokes equation over 3D domains, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 108 (2022), 106223.

曲線要素を用いた 3 次元直交選点有限要素法による曲線矩形管路のStokes流れの数値解析

Numerical analysis of Stokes flow in curve rectangular pipe by 3-dimensional orthogonal collocation finite elements method using curve element

大久保孝樹 (Takaki Ohkubo)¹

¹函館高専名誉教授 (Hakodate National College of Technology professor emeritus)

e-mail: ohkubo@hakodate-ct.ac.jp

1. 概要

本研究では、3次元の直交選点有限要素法の開発を行った。3次元空間の微分作用素を定義するとともに、局所座標系から全体座標系への座標変換マトリックスを作成するために、合成関数の偏微分より全体座標系から局所座標系への変換マトリックスを誘導した。この座標変換マトリックスにおいて、全体座標系の座標を局所座標系の座標によって多項式表示して、アイソパラメトリック要素を誘導し、曲線矩形管路に適用した。本研究では、簡単のため定常 Stokes 方程式に適用して数値計算を行い流量の連続性を確認した。

2. 3次元空間の微分作用素

3次元多項式を Lagrange 補間公式によって表現すると式(1)のように表される。

$$u(\xi, \eta, \varsigma) = \sum_{i=1}^{N_1+2} \sum_{j=1}^{N_2+2} \sum_{k=1}^{N_3+2} l_i(\xi) l_j(\eta) l_k(\varsigma) u(\xi_i, \eta_j, \varsigma_k) \quad (1)$$

$$l_i(\xi) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{N_1+2} \frac{\xi - \xi_l}{\xi_i - \xi_l} \quad l_j(\eta) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N_2+2} \frac{\eta - \eta_l}{\eta_j - \eta_l} \quad l_k(\varsigma) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{N_3+2} \frac{\varsigma - \varsigma_l}{\varsigma_k - \varsigma_l} \quad (2)$$

上式(2)を、 ξ , η , ς で偏微分し、選点 m (ξ 方向の選点番号), n (η 方向の選点番号), l (ς 方向の選点番号)での偏微分を以下に表示する。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{m,n} &= \sum_{i=1}^{N_1+2} \sum_{j=1}^{N_2+2} \sum_{k=1}^{N_3+2} l'_i(\xi_m) l_j(\eta_n) l_k(\varsigma_l) u(\xi_i, \eta_j, \varsigma_k) & \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{m,n} &= \sum_{i=1}^{N_1+2} \sum_{j=1}^{N_2+2} \sum_{k=1}^{N_3+2} l_i(\xi_m) l'_j(\eta_n) l_k(\varsigma_l) u(\xi_i, \eta_j, \varsigma_k) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \varsigma} \right|_{m,n} &= \sum_{i=1}^{N_1+2} \sum_{j=1}^{N_2+2} \sum_{k=1}^{N_3+2} l_i(\xi_m) l_j(\eta_n) l'_k(\varsigma_l) u(\xi_i, \eta_j, \varsigma_k) & \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right|_{m,n} &= \sum_{i=1}^{N_1+2} \sum_{j=1}^{N_2+2} \sum_{k=1}^{N_3+2} l''_i(\xi_m) l_j(\eta_n) l_k(\varsigma_l) u(\xi_i, \eta_j, \varsigma_k) \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right|_{m,n} &= \sum_{i=1}^{N_1+2} \sum_{j=1}^{N_2+2} \sum_{k=1}^{N_3+2} l_i(\xi_m) l''_j(\eta_n) l_k(\varsigma_l) u(\xi_i, \eta_j, \varsigma_k) & \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \varsigma^2} \right|_{m,n} &= \sum_{i=1}^{N_1+2} \sum_{j=1}^{N_2+2} \sum_{k=1}^{N_3+2} l_i(\xi_m) l_j(\eta_n) l''_k(\varsigma_l) u(\xi_i, \eta_j, \varsigma_k) \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{m,n} &= \sum_{i=1}^{N_1+2} \sum_{j=1}^{N_2+2} \sum_{k=1}^{N_3+2} l'_i(\xi_m) l'_j(\eta_n) l_k(\varsigma_l) u(\xi_i, \eta_j, \varsigma_k) & \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \varsigma} \right|_{m,n} &= \sum_{i=1}^{N_1+2} \sum_{j=1}^{N_2+2} \sum_{k=1}^{N_3+2} l_i(\xi_m) l'_j(\eta_n) l'_k(\varsigma_l) u(\xi_i, \eta_j, \varsigma_k) \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \varsigma \partial \xi} \right|_{m,n} &= \sum_{i=1}^{N_1+2} \sum_{j=1}^{N_2+2} \sum_{k=1}^{N_3+2} l'_i(\xi_m) l_j(\eta_n) l'_k(\varsigma_l) u(\xi_i, \eta_j, \varsigma_k) & & \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)より、微分作用素(行列)は式(4)で表される。ただし、(')と('')は1階微分, 2階微分である。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\xi &= l'_i(\xi_m) l_j(\eta_n) l_k(\varsigma_l) & \mathbf{A}_\eta &= l_i(\xi_m) l'_j(\eta_n) l_k(\varsigma_l) & \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \right] &= \mathbf{A}_\xi \mathbf{u} & \left[\frac{\partial u}{\partial \eta} \right] &= \mathbf{A}_\eta \mathbf{u} & \left[\frac{\partial u}{\partial \varsigma} \right] &= \mathbf{A}_\varsigma \mathbf{u} \\ \mathbf{A}_\varsigma &= l_i(\xi_m) l_j(\eta_n) l'_k(\varsigma_l) & \mathbf{B}_\xi &= l''_i(\xi_m) l_j(\eta_n) l_k(\varsigma_l) & \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right] &= \mathbf{B}_\xi \mathbf{u} & \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right] &= \mathbf{B}_\eta \mathbf{u} & \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \varsigma^2} \right] &= \mathbf{B}_\varsigma \mathbf{u} \\ \mathbf{B}_\eta &= l_i(\xi_m) l''_j(\eta_n) l_k(\varsigma_l) & \mathbf{B}_\varsigma &= l_i(\xi_m) l_j(\eta_n) l''_k(\varsigma_l) & \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right] &= \mathbf{C}_{\xi\eta} \mathbf{u} & \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \varsigma} \right] &= \mathbf{C}_{\eta\varsigma} \mathbf{u} & \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \varsigma \partial \xi} \right] &= \mathbf{C}_{\varsigma\xi} \mathbf{u} \\ \mathbf{C}_{\xi\eta} &= l'_i(\xi_m) l'_j(\eta_n) l_k(\varsigma_l) & \mathbf{C}_{\eta\varsigma} &= l_i(\xi_m) l'_j(\eta_n) l'_k(\varsigma_l) & & & & & & \\ \mathbf{C}_{\varsigma\xi} &= l'_i(\xi_m) l_j(\eta_n) l'_k(\varsigma_l) & & & & & & & & \end{aligned}$$

3. 非構造格子に必要な座標変換マトリックスと形状関数

OCFEM(直交選点有限要素法)では, 要素内の離散的な選点(直交選点)における偏微分を局所座標系から全体座標系(非構造格子)に変換しなければならず, 合成関数の偏微分概念を用いることによって達成できる. 局所座標系を全体座標系(非構造格子)に変換するための合成関数に用いる座標変換関数は, 任意形状関数では x, y, z 座標を直交多項式の形状関数で表現する. 従属変数を u とすると, 合成関数の偏微分より (6) 式の全体座標から局所座標への変換マトリックスを得る. 形状関数は, 直交選点多項式によって表され, 全体座標系の x, y, z 座標は局所座標系 ξ, η, ζ によって (7) 式で表示される.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} & 2\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \xi} & 2\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} & 2\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \eta} & 2\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta^2} & \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)^2 & \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \zeta} & 2\frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \zeta} & 2\frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right) & \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \zeta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \zeta} & \frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta} & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) & \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta \partial \xi} & \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta \partial \xi} & \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta \partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \xi} & \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right) & \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) & \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z \partial x} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$x = \sum_{j=1}^{N_1+2} \sum_{i=1}^{N_2+2} \sum_{k=1}^{N_3+2} \xi^{i-1} \eta^{j-1} \zeta^{k-1} d_{xijk} \quad y = \sum_{j=1}^{N_1+2} \sum_{i=1}^{N_2+2} \sum_{k=1}^{N_3+2} \xi^{i-1} \eta^{j-1} \zeta^{k-1} d_{yijk} \quad z = \sum_{j=1}^{N_1+2} \sum_{i=1}^{N_2+2} \sum_{k=1}^{N_3+2} \xi^{i-1} \eta^{j-1} \zeta^{k-1} d_{zijk} \quad (7)$$

直交選点での x, y, z の 1 階微分と 2 階微分は, 微分作用素によって次式で表される. x についてのみ表示.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \zeta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta \partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\xi \mathbf{x} \\ \mathbf{A}_\eta \mathbf{x} \\ \mathbf{A}_\zeta \mathbf{x} \\ \mathbf{B}_\xi \mathbf{x} \\ \mathbf{B}_\eta \mathbf{x} \\ \mathbf{B}_\zeta \mathbf{x} \\ \mathbf{C}_{\xi\eta} \mathbf{x} \\ \mathbf{C}_{\eta\zeta} \mathbf{x} \\ \mathbf{C}_{\zeta\xi} \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (8)$$

これらの微分は, 座標変換マトリックスの計算に用いられる.

4. 形状関数上の試行関数の直交選点配置

正方形断面の直交選点配置を図-1 に示す. 要素内内部選点数 $15 \times 15 \times 15$ とした場合の 3 次元曲線矩形管路内の直交選点配置を図-2 に示す. 要素数は 5 とした. 定常 Stokes 方程式の数値計算結果は, 発表時に示す.

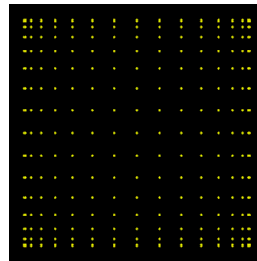


図-1 断面の直交選点配置

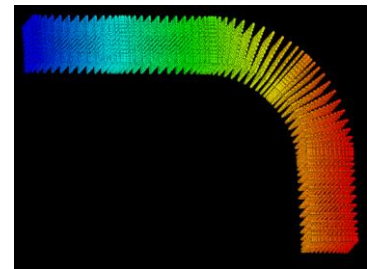


図-2 3次元曲線円管内の直交選点配置