

# RfR 法によるデータ駆動力学系モデルの幾何学的構造解析

## Geometric structure of data-driven dynamical model using RfR method

堤 夏輝 (Natsuki Tsutsumi)<sup>1</sup>, 齊木 吉隆 (Yoshitaka Saiki)<sup>1</sup>, 中井 拳吾 (Kengo Nakai)<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 一橋大学 (Hitotsubashi University), <sup>2</sup> 岡山大学 (Okayama University)

e-mail : t.natsu2653@gmail.com

### 1 はじめに

データ駆動力学系モデリングは、観測された時系列データのダイナミクスを再現する力学系モデルを構築する手法である。今回は特にカオス性を持つダイナミクスのモデリングに焦点を当てる。構築したモデルがダイナミクスを再現していると断言するためには、軌道の再現だけでなく、リアプノフ指数などの力学系構造も再現していることを確認する必要がある。ただし、多くの応用ケースにおいて長期を含む軌道が再現されていれば十分であり、必ずしもダイナミクスを完全に再現する必要はないことに注意されたい。データ駆動力学系モデリングの手法の一つに RfR (Radial function based Regression) 法がある [1]。RfR 法はスカラー時系列データから物理的解釈可能な変数だけを用いて、常微分方程式としてモデルを構築する手法である。偏微分方程式や遅延微分方程式などから生成される時系列データに対しても有効である。また、構築されたモデルの長期軌道が発散する場合にも、Stagger and Step 法を用いることで元のダイナミクスを再現する発散しない長期軌道を生成することが可能である [2]。RfR 法によって構築されたモデルは、軌道を再現しているが、負のリアプノフ指数を再現できていないことがある [1, 3]。軌道の再現には非負のリアプノフ指数を再現することが肝要であり、負のリアプノフ指数を再現することは必須ではない。本研究では、全てのリアプノフ指数を再現しているモデル (完全モデルと呼ぶ) とそうでないモデル (不完全モデルと呼ぶ) の違いを幾何学的構造の観点から解析する。

### 2 RfR 法によるデータ駆動力学系モデルの構築

RfR 法は 3 ステップでモデルを構築する。詳しい手順は [1, 2] を参照されたい。はじめに、スカラー時系列から高次元のモデル変数  $\mathbf{X}$  を時間遅れ座標を用いて作成する。次に、作成した変数  $\mathbf{X}$  の時間微分値を Taylor 近似を用いて推計する。最後に回帰を用いて、モデルを構築する。その際、次の形でモデルを定義する： $\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t))$ 。ここで、 $\mathbf{F}$  の第  $k$  成分である  $F_k$  は  $F_k(\mathbf{X}) := \tilde{\beta}_0^{(k)} + \sum_{d=1, \dots, D} \tilde{\beta}_d^{(k)} X_d + \sum_{j=1, \dots, J} \tilde{\beta}_{D+j}^{(k)} \phi_j(\mathbf{X})$  であり、 $\tilde{\beta}^{(k)}$  はデータから推定されるべきパラメータで ridge 回帰 (正則化パラメータを  $\alpha$  と表す) によって推計される。 $\tilde{\beta}^{(k)}$  を決定する際、推計した時間微分値を目的変数に用いる。また、 $\phi_j$  はガウス型動径基底関数  $\phi_j(\mathbf{X}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{X}-c_j\|^2}{\sigma^2}\right)$  であり、 $c_j$  は基底関数の中心点、 $\sigma$  は基底関数の幅を規定するパラメータである。中心点  $c_j$  はデータが存在する領域を覆うように格子状に配置される。

### 3 結果

分析対象として Lorenz 系 ( $\frac{dx}{dt} = 10(y-x)$ ,  $\frac{dy}{dt} = x(28-z) - y$ ,  $\frac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z$ ) を使い、6 次元のデータ駆動モデルを構築する。完全モデルにおいて、対象となるダイナミクスは 6 次元空間における 3 次元多様体上に埋め込みとして再現されていると期待される。実際、長期軌道から再現された不変

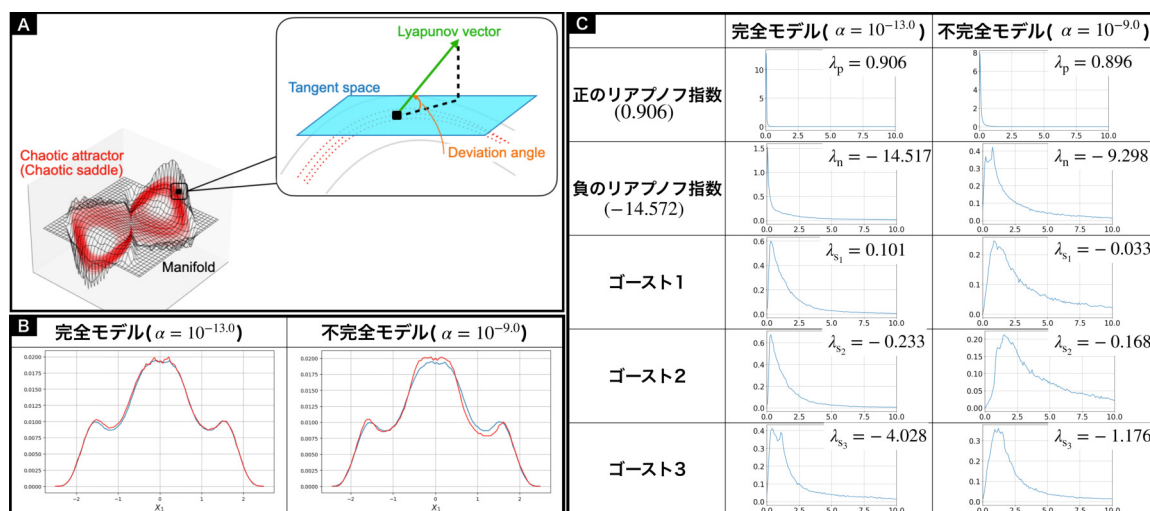


図 1. リアプノフベクトルと接空間のなす角の分布. パネル A に, 構築されたモデルの幾何学的イメージを示している. 低次元多様体上にダイナミクスが再現されており, その接空間とリアプノフベクトルのなす角を調べることでそのリアプノフベクトルが横断方向を向いているかを判定する. パネル B に, 異なる正則化パラメータを用いて構築した 2 つのモデル (完全モデルと不完全モデル) の不変密度分布を示している. どちらも元の分布を再現しているが, 完全モデルの方が精度が高い. パネル C に, 各リアプノフ指数ごとのリアプノフベクトルと接空間のなす角の分布を示している. 本来の系に存在しないリアプノフ指数はゴーストとしている. 角度を計算する際, 軌道の進行方向である中立方方向は除外している. 両方のモデルでゴーストは横断方向を向いており, 不完全モデルでは負のリアプノフ指数であるべきリアプノフ指数も横断方向を向いていることがわかる.

集合のボックスカウンティング次元は 3 を超えていない. そこで, 局所的な (不) 安定多様体を張るリアプノフベクトルと多様体の関係性を調べる. 軌道に沿った各点のリアプノフベクトルと多様体の接空間のなす角の分布を図 1 に示している. 完全モデルにおいて, 本来の系に存在するリアプノフ指数に対応するリアプノフベクトルは接空間上に存在しているが, 本来の系に存在しないリアプノフ指数に対応するリアプノフベクトルは接空間上に存在しないことがわかる. このことから, 完全モデルでは, 元のダイナミクスは 6 次元空間における 3 次元多様体上に埋め込まれていると言える. また, 不完全モデルにおいては, 本来の系に存在する負リアプノフ指数となるべきリアプノフ指数に対応するリアプノフベクトルが接空間上に存在しないことから, 元のダイナミクスは 6 次元空間における 3 次元多様体上に埋め込まれていないことがわかる. この埋め込み構造は, RfR 法に限らず, 広くデータ駆動力学系モデリングにおいてダイナミクスが再現されているかを左右する要素と考えられる.

**謝辞** 本研究は科研費 (課題番号 :22K17965, 25H01469) と JHPCN (課題番号 :jh250021) の助成を受けたものである.

## 参考文献

- [1] N.Tsutsumi, K.Nakai, Y.Saiki, Constructing differential equations using only a scalar time-series about continuous time chaotic dynamics, *Chaos* 32 (2022).
- [2] N.Tsutsumi, K.Nakai, Y.Saiki, Constructing low-dimensional ordinary differential equations from chaotic time series of high- or infinite-dimensional systems using radial-function-based regression, *Physical Review E* 108 (2023) 1-13.
- [3] N.Tsutsumi, K.Nakai, Y.Saiki, Data-driven ordinary-differential equation modeling of high-frequency complex dynamics via a low-frequency dynamics model, *Physical Review E* 111 (2025) 1-6.

# 複数のハミルトン系を同時に学習するシンプレクティックニューラルネットワーク

## Symplectic Neural Networks for Simultaneous Learning of Multiple Hamiltonian Systems

徐 百歌 (Baige Xu)<sup>1</sup>, 谷口 隆晴 (Takaharu Yaguchi)<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> 神戸大学 (Kobe University), <sup>2</sup> 理化学研究所 (RIKEN)

e-mail : baigexu@stu.kobe-u.ac.jp

### 1 はじめに

ハミルトン方程式は力学系や場の理論など、様々な分野における重要な数理モデルであり、エネルギー保存やシンプレクティック構造といった物理的な保存則を持つ [1]。このような構造を持つ系をニューラルネットワークで高精度かつ長期安定にモデル化することは、近年盛んに研究されている課題である。特に、その中、Hamiltonian Neural Networks (HNNs) や Symplectic Neural Networks (SympNets), Symplectic Neural Flow (SNF) などは、シンプレクティック構造を保つニューラルネットワークモデルとして知られている [2, 3, 4]。ただし、これらの手法は、特定のハミルトニアンを持つ系に対する学習を主な目的としているが、現実の応用において、複数の異なるハミルトン系を同時に扱う必要がある場合も多い。そこで、本研究では、SympNets をベースに改良を行い、複数のハミルトン系を同時にモデリング可能なニューラルネットワークモデルを提案する。具体的には、各ハミルトニアンから特徴抽出を行うことでパラメータ化し、それらをニューラルネットワークの入力とすることで、異なる系に対する挙動の一般化を目指す。

### 2 ハミルトン系と Symplectic Neural Networks

ハミルトン系は以下の方程式で記述される：

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q}, \quad (1)$$

ここで、 $q = q(t) \in \mathbb{R}^n$  は位置、 $p = p(t) \in \mathbb{R}^n$  は運動量、 $H(q,p) \in \mathbb{R}$  は系のエネルギー関数、ハミルトニアンである。この系は、シンプレクティック構造と呼ばれる幾何学的性質を持ち、この構造を保つことによってエネルギーなどの物理量が保存される。すなわち、時間発展の写像  $\Phi_t$  はシンプレクティック写像である必要がある：

$$\Phi_t^* \omega = \omega, \quad (2)$$

ここで  $\omega = dq \wedge dp$  はシンプレクティック形式を表す。この性質を数値的に保つため、シンプレクティック積分法 [5] や、ニューラルネットワークを用いたシンプレクティックモデルの研究が進んでいる。その中、SympNets は、通常のニューラルネットワークとは異なり、ネットワーク自体が構造的にシンプレクティック写像を近似するように設計されている。例えば、まず運動量  $p$  を更新し、その後更新された  $p$  を用いて位置  $q$  を更新する。更新式は以下の通りである：

$$p^{(t+1)} = p^{(t)} - \Delta t \nabla_q S_\theta^{(t)}(q^{(t)}), \quad q^{(t+1)} = q^{(t)} + \Delta t \nabla_p T_\theta^{(t)}(p^{(t+1)}), \quad (3)$$

ここで、 $S_\theta^{(t)}, T_\theta^{(t)}$  はスカラー関数で、ニューラルネットワークによってパラメータ化が可能である。

### 3 提案手法：複数のハミルトン系の同時学習

本研究では、ニューラルネットワークの構造において SympNets を基礎にしつつ、複数のハミルトン系に対する共通のモデルを学習するための手法を提案する。提案モデルでは、例えば、複数のハミルトン系に対して、それぞれのハミルトニアン関数をチェビシェフ多項式で近似し、その係数をニューラルネットワークの入力情報を用いる。まず、それぞれの系に対応するハミルトニアン  $H^{(i)}(q, p)$  ( $i = 1, \dots, I$ ) を、チェビシェフ多項式の基底により以下のように近似する：

$$H^{(i)}(q, p) \approx \sum_{j=1}^k c_j^{(i)} T_j(q, p). \quad (4)$$

ここで各  $T_j(q, p)$  は多項式、 $c_j^{(i)} \in \mathbb{R}$  は  $i$  番目の系の第  $j$  番目の係数である。したがって、全体として  $I$  個ハミルトニアンの情報は、以下のような係数ベクトル  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{Ik}$  に表される：

$$\mathbf{c} = (c_1^{(1)}, \dots, c_k^{(1)}, c_1^{(2)}, \dots, c_k^{(2)}, \dots, c_1^{(I)}, \dots, c_k^{(I)}). \quad (5)$$

入力として、系の初期状態  $u_0 = (q_0, p_0)$  およびハミルトニアン係数ベクトル  $\mathbf{c}$  を用い、次時刻の状態  $q_1, p_1$  を予測するように関数  $\mathcal{F}_\theta$  を学習する：

$$(q_1, p_1) = \mathcal{F}_\theta(q_0, p_0, \mathbf{c}),$$

ここで、 $\mathcal{F}_\theta$  は学習された複数のハミルトン系に対応する SympNets である。

この拡張により、ネットワークは複数の異なる力学系にわたって統一的に時間発展をモデル化することが可能になる。数値実験結果については、当日、報告する。

**謝辞** 本研究は JST CREST (JPMJCR1914, JPMJCR24Q5), JST ASPIRE (JPMJAP2329), JSPS KAKENHI (25K15148) の助成を受けた。

### 参考文献

- [1] Holm, Darryl D. Geometric mechanics-Part I: Dynamics and symmetry. World Scientific Publishing Company, 2011.
- [2] Greydanus, Samuel, Misko Dzamba, and Jason Yosinski, Hamiltonian neural networks, Advances in neural information processing systems 32 (2019).
- [3] Jin, Pengzhan, et al, SympNets: Intrinsic structure-preserving symplectic networks for identifying Hamiltonian systems, Neural Networks 132 (2020): 166-179.
- [4] Canizares, Priscilla, et al, Symplectic neural flows for modeling and discovery, arXiv preprint arXiv:2412.16787 (2024).
- [5] Hairer, Ernst, et al, Geometric numerical integration, Oberwolfach Reports 3.1 (2006): 805-882.

# プリミティブ方程式に対するナッジング型データ同化の数学的側面について

## Nudging-type data assimilation for the primitive equations

古川 賢<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 富山大学学術研究部理学系

e-mail : furukawa@sci.u-toyama.ac.jp

$\Omega = \mathbb{T}^2 \times (0, -1)$  を層状領域とする．プリミティブ方程式は大気や海洋などの薄い 3 次元領域内の流体運動を記述し，次で与えられる．

$$\begin{aligned} \partial_t v - \Delta v + u \cdot \nabla v + \nabla_H p &= f \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \partial_3 p &= 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T). \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $u(x, t) = (v(x, t), w(x, t)) = (v_1(x, t), v_2(x, t), w(x, t))$  は 3 次元のベクトル場、 $p(x, t)$  は圧力を表すスカラー値関数、 $f$  は外力、 $\nabla_H = (\partial_1, \partial_2)^T$  とする．速度場の鉛直成分  $w$  は、(1) 第 3 式より

$$w(x', x_3, t) = \int_{-\pi}^{x_3} \operatorname{div}_H v(x', z, t) dz$$

$(x' = (x_1, x_2), \operatorname{div}_H = \nabla_H \cdot)$  で与えられる．上境界では Neumann 境界条件，下境界では Dirichlet 境界条件を課す．プリミティブ方程式に対しては，Sobolev 空間  $H^1$  における (1) の時間大域適切性は Cao-Titi [2] によって解決されている．

データ同化は，モデルと観測を組み合わせることによって，精度の良い予測値を得る手法として用いられ，主に気象の予測に関連して発達してきた．気象予報などでプリミティブ方程式に基づく数理モデルと数値シミュレーションにより現実の物理現象を推定することが必要となるためである．リアルタイム性が求められる気象予報では，3D Navier-Stokes 方程式より計算コストが低いプリミティブ方程式の方が実用的である．物理現象を完全に説明可能な数理モデルを構築できたと仮定しても，偏微分方程式の解を求める場合には初期値・境界条件・外力などを完全に決定する必要があるが，これらの条件を完全に決定することは不可能であるため，観測値を用いる必要がある．数学的には，推定したい解  $u$  に対して観測値  $J_\delta u$  と  $u$  がある力学系の解になっているという知見から  $u$  を推定する問題となる．ここで，観測作用素  $J_\delta$  は

$$\|J_\delta \varphi - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\delta \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}, \quad \varphi \in H^1(\Omega),$$

なるルベグ空間  $L^2$  上の有界作用素である．なお， $H^m$  はソボレフ空間を表す．また，ここで推定するという意味は， $u(t)$  に時間無限大で漸近するデータ同化方程式の解  $\tilde{u}(t)$  を構成するということである．近年，Azouani ら [1] によってデータ同化に対する数学的枠組みが整備された．Azouani らの手法では，方程式に  $u$  に収束させる強制力を組み込んだ近似方程式を作ることによって，推定値を構成している（ナッジングと呼ばれる）．彼らは，3D Navier-Stokes 方程式の弱解  $u$  に対して，任意の初期値に対するデータ同化による近似方程式の解は，時間無限大で  $u$  に指数関数オーダーで  $L^2$ -収束することを示した．Pei[3] はプリミティブ方程式の解に対して，Azouani らと同様に  $L^2$  収束するデータ同化近似解を構成した．講演者 [4] は，外力に強い減衰条件を課した上で Pei の結果を最大

正則性のクラスに一般化した．プリミティブ方程式に対するデータ同化 (DA) 方程式は次である．

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{v} - \Delta \tilde{v} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{v} + \nabla_H \tilde{\pi} &= M_\delta f + \mu(J_\delta v - J_\delta \tilde{v}) \\ \partial_3 \tilde{\pi} &= 0, \\ \operatorname{div} \tilde{u} &= 0, \\ \tilde{v}(0) &= \tilde{v}_0.\end{aligned}\tag{2}$$

ここで,  $\mu > 0$  は十分大きいパラメータであり,  $M_\delta f = 0$  または  $M_\delta f = J_\delta f$  である．前者は, 外力を知っている状態に相当し, 後者は外力が観測によって概ねわかっている状況を意味する．

## 1 主結果とその証明の概略

**定理 1.1** ([5]).  $M_\delta f = 0$  とする．  $0 < \theta < \alpha < 1$ ,  $v_0, \tilde{v}_0 \in H_\sigma^1(\Omega)$  とする．外力  $f$  は次を満たすとする

$$f \in BC([0, \infty); H^1(\Omega)^2) \cap C^\alpha((0, \infty); H^1(\Omega)^2), \quad \partial_t f \in L_{loc}^2(0, T; L^2(\Omega)^2).$$

初期値  $v_0$ , 外力  $f$  に対するプリミティブ方程式の解  $v$  は次を満たすとする

$$v \in BC^\theta(0, \infty; H_\sigma^2(\Omega)), \quad \partial_t v \in C^\theta(0, \infty; L_\sigma^2(\Omega)).$$

ある定数  $C_1, C_2 > 0$  が存在し  $v$  に対し次を仮定する

$$1 + \sup_{0 < t < \infty} \|v(t)\|_{H^2}^4 \leq C\mu, \quad \mu\delta \leq C.$$

この時, ある  $\mu \geq \mu_* \geq \mu/4$  と DA 方程式の解  $\tilde{v}$  が存在して次を満たす

$$\|\partial_t v(t) - \partial_t \tilde{v}(t)\|_{L^2}, \|v(t) - \tilde{v}(t)\|_{H^2} = O(e^{-\mu_* t}).\tag{3}$$

$M_\delta f = J_\delta f$  の場合は (3) の収束が安定性に置き換わる．つまり,  $v(t) - \tilde{v}(t)$  は  $H^2$  の位相で  $\delta$ -近傍に収まる．証明ではアプリアリ評価と発展作用素を用いる．

**謝辞** 本研究は科研費若手研究 (No. 22K13948) の助成を受けたものである．

## 参考文献

- [1] A. Azouani, E. Olson, and E. S. Titi, Continuous data assimilation using general interpolant observables. J. Nonlinear Sci. 24, 2014.
- [2] C. Cao and E.S.Titi, Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics, Ann. of Math., 166, 2007, 245–267.
- [3] Y. Pei, Continuous data assimilation for the 3D primitive equations of the ocean, Commun. Pure Appl. Anal., 18, 2019, 2, 643–661.
- [4] K. Furukawa, Ken, Data assimilation to the primitive equations with  $L^p$ - $L^q$ -based maximal regularity approach, J. Math. Fluid Mech., 26, 2024, 1, no. 9, 32.
- [5] K. Furukawa, Data assimilation for the primitive equations in  $H^2$ , Nonlinearity, 38, 2025, 7, 075020.

# リザーバーコンピューティングの高次元空間における力学系構造解析

## Dynamical System Structure in High Dimensional Space for Reservoir Computing

中井 拳吾 (Kengo Nakai)<sup>1</sup>, 小林 幹 (Miki U. Kobayashi)<sup>2</sup>,  
 齊木 吉隆 (Yoshitaka Saiki)<sup>3</sup>, 堤 夏輝 (Natsuki Tsutsumi)<sup>3</sup>  
<sup>1</sup> 岡山大学 (Okayama University), <sup>2</sup> 立正大学 (Rissho University),  
<sup>3</sup> 一橋大学 (Hitotsubashi University)  
 e-mail : knakai@okayama-u.ac.jp

### 1 概要

リザーバーコンピューティングと呼ばれる機械学習手法が決定論的ダイナミクスの時系列モデリングに有効であることが明らかになってきた [1, 2, 3]。リザーバーコンピューティングなどのニューラルネットワークを用いた学習では中間層に現れる高次元ベクトルと入力ベクトルが同期すること [3, 4, 5] が重要であると考えられている。本講演ではリザーバーコンピューティングに現れる高次元空間に注目し、訓練データのダイナミクスがどのように再現されるかをリアプノフ指数などの観点から明らかにする。

### 2 リザーバーコンピューティングの概要

力学系  $\phi_{n+1} = \mathbf{f}(\phi_n)$  の変数  $\mathbf{u} = \mathbf{h}(\phi) \in \mathbb{R}^M$  について考える。ある時刻までの入力ベクトル  $\mathbf{u}$  を用いてリザーバーベクトル  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$  ( $N \gg M$ ) を次のように定める:

$$\mathbf{r}(t+1) = \tanh(\mathbf{A}\mathbf{r}(t) + \mathbf{W}_{\text{in}}\mathbf{u}(t) + \xi\mathbf{1}).$$

ただし、 $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{W}_{\text{in}}$  はランダム行列で、 $\mathbf{1}$  はすべての成分が 1 の  $N$  次元ベクトルを意味する。このように定めたリザーバーベクトル  $\mathbf{r}(t)$  と入力ベクトル  $\mathbf{u}(t)$  が  $\mathbf{u}(t) \approx \mathbf{W}_{\text{out}}\mathbf{r}(t)$  という関係になるように  $M \times N$  行列  $\mathbf{W}_{\text{out}}$  を定める。ここでは最小化問題  $\arg \min \sum_{t=0}^L \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}_{\text{out}}\mathbf{r}(t)\|$  を解くことによって決定し、得られた最小解を  $\mathbf{W}_{\text{out}}^*$  とする。これらの手順で決定した行列  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{W}_{\text{in}}$ ,  $\mathbf{W}_{\text{out}}^*$  を用いて次の力学系を考える:

$$\mathbf{r}(t+1) = \tanh(\mathbf{A}\mathbf{r}(t) + \mathbf{W}_{\text{in}}\mathbf{W}_{\text{out}}^*\mathbf{r}(t) + \xi\mathbf{1}). \quad (1)$$

以下では力学系 (1) をリザーバーモデルと呼ぶ。

本講演では行列  $\mathbf{W}_{\text{in}}$  はすべて共通の行列を用いる。スペクトル半径が 1 のランダムな行列  $\mathbf{A}'$  を一つ固定し、 $\mathbf{A} = \rho\mathbf{A}'$  となるように行列  $\mathbf{A}$  を設定する。このとき、行列  $\mathbf{A}$  のスペクトル半径は  $\rho$  になる。各々の行列  $\mathbf{A}$  に対して行列  $\mathbf{W}_{\text{out}}^*$  を定める。

### 3 結果

エノン写像  $x_{n+1} = 1 - 1.4x_n^2 + y_n$ ,  $y_{n+1} = 0.3x_n$  について考える。変数  $\mathbf{u}(n)$  は  $\mathbf{u}(n) = (x_n, y_n)^T$  となるように設定し、行列  $\mathbf{A}$  のスペクトル半径  $\rho$  ごとにリザーバーモデルを構成する。それぞれのリザーバーモデルの上位 5 つのリアプノフ指数を計算する (図 1)。

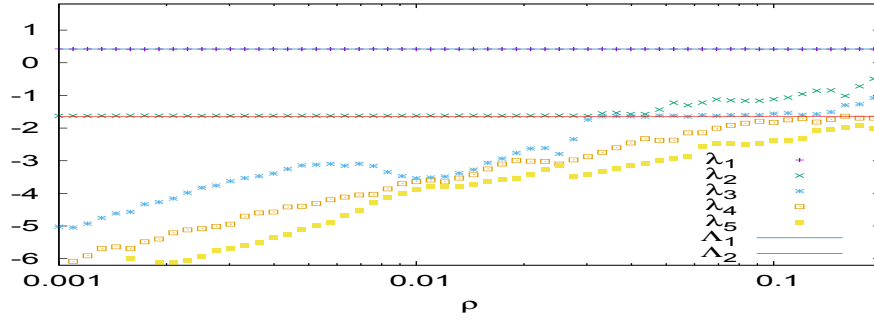


図 1. スペクトル半径  $\rho$  とリザーバーモデルの上位 5 つのリアプノフ指数との関係  $\lambda_i$  はリザーバーモデルの第  $i$  リアプノフ指数、 $\Lambda_i$  はエノン写像の第  $i$  リアプノフ指数を表す。エノン写像の第 1 リアプノフ指数  $\Lambda_1$  は 0.419、第 2 リアプノフ指数  $\Lambda_2$  は  $-1.623$  である。スペクトル半径  $\rho$  によらず  $\lambda_1 \approx \Lambda_1$  である。また、 $\rho < 0.03$  のとき  $\lambda_2 \approx \Lambda_2$  であるが、 $0.03 < \rho < 0.1$  のとき  $\lambda_3 \approx \Lambda_2$  である。

スペクトル半径  $\rho$  によらずエノン写像の正のリアプノフ指数は再現している。また、スペクトル半径  $\rho$  が 0.3 以下の場合にはリザーバーモデルの第 2 リアプノフ指数  $\lambda_2$  はエノン写像の第 2 リアプノフ指数  $\Lambda_2$  に対応するが、スペクトル半径  $\rho$  が大きい場合は ( $0.03 < \rho < 0.1$ ) リザーバーモデルの第 3 リアプノフ指数  $\lambda_3$  はエノン写像が第 2 リアプノフ指数  $\Lambda_2$  に対応する。スペクトル半径  $\rho > 0.14$  の場合、エノン写像の第 2 リアプノフ指数  $\Lambda_2$  は正確に復元していない。

講演では上記の結果に加えてある部分空間に制限されたリアプノフ指数やその部分空間とリアプノフベクトルとのなす角の計算結果をもとに、比較的大きなスペクトル半径であってもアトラクターがリザーバーモデルの高次元空間に再現されていることを明らかにする。

謝辞 本研究は科研費 (課題番号:22K17965, 25H01469) の助成を受けたものである。また、本研究の一部は学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点 (JHPCN) (課題番号: jh250021)、スーパーコンピュータ共同研究制度 (若手・女性研究者奨励枠) の支援による。

## 参考文献

- [1] Miki U. Kobayashi, Kengo Nakai, Yoshitaka Saiki, and Natsuki Tsutsumi. Dynamical system analysis of a data-driven model constructed by reservoir computing. *Physical Review E*, 104(4):044215, 2021.
- [2] Miki U. Kobayashi, Kengo Nakai, and Yoshitaka Saiki. Lyapunov analysis of data-driven models of high dimensional dynamics using reservoir computing: Lorenz-96 system and fluid flow. *Journal of Physics: Complexity*, 5(2):025024, 2024.
- [3] Zhixin Lu, Brian R. Hunt, and Edward Ott. Attractor reconstruction by machine learning. *Chaos*, 28(6):061104, 2018.
- [4] Allen Hart, James Hook, and Jonathan Dawes. Embedding and approximation theorems for echo state networks. *Neural Networks*, 128:234–247, 2020.
- [5] Allen G Hart. Generalised synchronisations, embeddings, and approximations for continuous time reservoir computers. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 458:133956, 2024.