

力学系の不安定性とアンサンブルカルマンフィルタによる状態推定メカニズムの関係について

On the Relationship Between Instabilities in Dynamical Systems and State Estimation by the Ensemble Kalman Filter

竹田 航太 (Kota Takeda)¹, 三好 建正 (Takemasa Miyoshi)²,

¹ 名古屋大学 (Nagoya University), ² 理化学研究所 (RIKEN)

e-mail : takeda@na.nuap.nagoya-u.ac.jp

1 問題とアプローチ

ノイズを含む観測データと連続時間力学系の時間発展から軌道を推定する問題を考える。実データと数理モデルを組み合わせた状態推定・予測アプローチであるデータ同化と呼ばれる問題の一種である。推定手法として、多数の状態ベクトルの組 (アンサンブル) で状態推定分布の平均と共分散行列を近似するアンサンブルカルマンフィルタ (EnKF) に焦点を当てる。アンサンブル数 m が小さい場合でも EnKF による高精度推定が可能であることが知られており、数値気象予報などを中心によく用いられているが、そのメカニズムは不明である。また、どこまで m を小さくできるかもわかっていない。本研究では、推定精度が保たれることを推定誤差 (二乗誤差) が観測ノイズの分散のオーダーで評価できることとして定義する。つまり、力学系の軌道 $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^{N_x}$ と EnKF による推定 (m 個のアンサンブル平均) $\bar{\mathbf{x}}_t^{(m)}$ の二乗誤差と観測ノイズの分散 r^2 に対して、

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}}_t^{(m)}|^2] \leq O(r^2), \quad r \rightarrow 0 \quad (1)$$

が成り立つこととする。ここで、 $|\cdot|$ はユークリッドノルムであり、 $\mathbb{E}[\cdot]$ は統計的な観測ノイズに関する期待値を表す。推定誤差の評価 (1) が成り立つ最小の m は対象とする力学系に依存すると考えられる。力学系の不変量で m の下限を与え、(1) を証明することが最終的な目標である。

これまでの研究で、 $m \geq N_x + 1$ の場合に、その他適切な条件の下で (1) が成り立つことが示されている [1]。これは、力学系に対して一般的な条件のみ課した解析による粗い評価である。特に、数値気象予報へ応用する際には m が大き過ぎて非現実的な計算量が必要となる。この評価を改善するヒントとなるのが、次に示すリアプノフ解析を用いた力学系の不安定性の特徴づけである。力学系 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_x}$ に対し、そのフローを $\Psi_t(\mathbf{x})$ とおく。力学系の不安定性を特徴づけるリアプノフスペクトル $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{N_x}$ は

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sigma_i(D_{\mathbf{x}} \Psi_t)$$

で定義される (極限が存在し x に依存しないと仮定する)。ここで、 $D_{\mathbf{x}} \Psi_t$ は $\Psi_t(\mathbf{x})$ のヤコビ行列であり、 $\sigma_i(A)$ は行列 A の i 番目に大きい特異値を表す。リアプノフスペクトルは微小摂動の軌道に沿った指数的拡大・縮小率を表している。[2] では、各時刻で不安定空間の次元が $N_+ = \#\{i \mid \lambda_i > 0\}$ である離散時間力学系が対象となり、十分小さい有界な観測ノイズと目標の軌道に十分近い初期アンサンブルを用いて $m \geq N_+ + 1$ の場合に (1) に似た評価が得られた。この解析は推定の初期値がすでに目標に近いことを仮定しているため非現実的ではあるが、推定精度を保つための m について厳密な理論をもって示唆を与えている。[3] では、連続時間力学系を考え様々な m に対し EnKF の

数値実験が行われた．不安定-中立次元 $N_0 = \#\{i \mid \lambda_i \geq 0\}$ に対して， $m = N_0 + 1$ の付近で誤差 $|\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}}_t^{(m)}|$ の時間平均が急激に小さくなり， r 以下になることが確認された．

本研究では，これらの既存研究を踏まえた数値実験を行う．まず，Lorenz 96 モデル [4] という気象学でよく用いられる常微分方程式で記述されたトイモデルを対象にして，数値的にリアプノフスペクトルを計算し， N_+ および N_0 を評価する．次に，Lorenz 96 モデルに対する EnKF の数値実験を通して，(1) が成り立つ m の下限 m_* を評価し， N_+ および N_0 と比較する．さらに，これらの数値実験を解釈することで力学系の不安定性と EnKF による状態推定メカニズムの関係に迫る (図 1)．

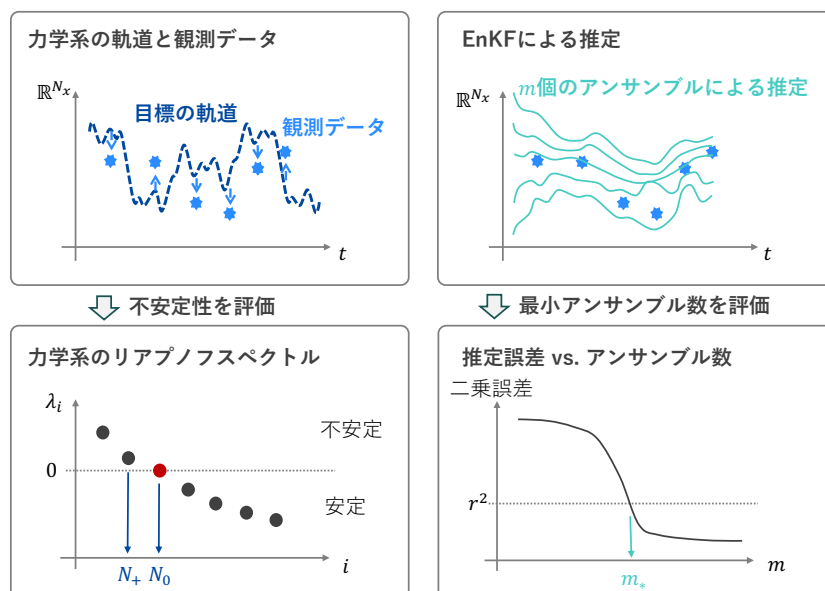


図 1. 本研究の概念図.

謝辞 本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2110 および理研の大学院生リサーチ・アソシエイト制度の支援を受けたものである．

参考文献

- [1] K. Takeda and T. Sakajo, Uniform Error Bounds of the Ensemble Transform Kalman Filter for Chaotic Dynamics with Multiplicative Covariance Inflation, SIAM/ASA J. Uncertainty Quantification, 12 (2024), pp. 1315–1335.
- [2] C. González-Tokman and B. R. Hunt, Ensemble data assimilation for hyperbolic systems, Physica D: Nonlinear Phenomena, 243 (2013), 128–142.
- [3] M. Bocquet and A. Carrassi, Four-dimensional ensemble variational data assimilation and the unstable subspace, Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography, 69 (2017), 1304504.
- [4] E. N. Lorenz, Predictability: a problem partly solved, in: Proc. of Seminar on Predictability. Presented at the ECMWF, Vol. 1, pp. 1–18, 1996.

リザーバーコンピューティングと一般化同期：非線形読み出しの有効性とその力学系的理解

Reservoir computing and generalized synchronization: the effectiveness of nonlinear readout and its dynamical systems interpretation

大久保 茜 (Akane Ohkubo)¹, 犬伏 正信 (Masanobu Inubushi)¹,

¹ 東京理科大学大学院理学研究科応用数学専攻 (Tokyo University of Science)

e-mail : 1424503@ed.tus.ac.jp

1 概要

近年活発に研究が進められているリザーバーコンピューティング (RC) は、学習パラメタを出力重みのみに限定するといった大幅な単純化を行なっているにもかかわらず、高精度で時系列予測が可能である。RC の高い予測精度を説明するため力学系理論を用いた研究がなされてきた。Grigoryava らはある条件下で連続微分可能な同期写像の存在を厳密に証明し、リザーバー状態と真の目標出力の関係を表す写像 (以下 h と表記する) を明示的に示した [1]。また原らは、Logistic 写像のカオス時系列予測に対し、Logistic 写像によって定まる力学系と RC との間の共役性について力学系解析を行った [2]。

写像 h の Taylor 展開を考えると、従来の RC はこの写像の線形近似に対応すると解釈できる。これにより、2 次や 3 次など高次項での近似は、より高精度な予測が可能であると期待できる。本研究ではこの解釈に基づき非線形出力を利用した新たな手法を提案する。数値実験により、従来法と比較して予測精度が大幅に改善することが明らかになった [3]。なお、ある種の非線形出力は既に先行研究 [4] で用いられているが、我々の理論的な枠組みは、これらの非線形出力が効果的である理由を包括的に説明する。

2 同期と RC

従来の RC の概要を説明する。入力 $x_n \in \mathbb{R}^K$ 、正解出力 $y_n \in \mathbb{R}^K$ ($n \in \mathbb{Z}$) を考える。目標はこの学習データ $\{x_n, y_n\}$ を用いて、入力 x_n に対して RC の出力 \hat{y}_n が正解出力 y_n を近似すること、すなわち $\hat{y}_n \simeq y_n$ となることである。リザーバー変数 $r_n \in [-1, 1]^N$ のダイナミクスは入力 x_n によって駆動され、写像 $F : [-1, 1]^N \times \mathbb{R}^K \rightarrow [-1, 1]^N$ を用いて $r_n = F(r_{n-1}, x_n)$ と定まる。従来の RC の出力 \hat{y}_n は、読み出し重み行列 $W \in M_{K,N}$ と出力バイアス $b \in \mathbb{R}^K$ により、 $\hat{y}_n = Wr_n + b$ と表される。読み出し重み行列 W^* と出力バイアス b^* は最小二乗法により、 $(b^*, W^*) := \arg \min_{b, W} \langle \|y_n - \hat{y}_n\|^2 \rangle_T$ と定まる。ここで、 $\langle \cdot \rangle_T$ は長時間平均を表す。ここでは簡単のため正則化項を省略しているが、後述の数値実験ではリッジ回帰を用いている。

与えられた共通の入力信号 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ と、任意のリザーバー初期状態 r_0, \hat{r}_0 ($r_0 \neq \hat{r}_0$) を考える。 $r_n = F(r_{n-1}, x_n)$, $\hat{r}_n = F(\hat{r}_{n-1}, x_n)$ とそれぞれ定まるリザーバーダイナミクスが $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|r_n - \hat{r}_n\| = 0$ となるとき、共通入力信号同期 (CSIS) が起こるという。

入力信号 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ が決定論的力学系によって生成される場合を考える。以下、予測対象の力学系を目標力学系と呼ぶ。目標力学系は非線形写像 $\phi : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K$ によって定まるとし、 $x_n = \phi^n(x_0)$ とする。ここで、 $x_0 \in \mathbb{R}^K$ は目標力学系の初期点を表し、 ϕ^n は ϕ の n 回合成写像である。CSIS が成り立つ時、リザーバーダイナミクス $\{r_n\}$ の漸近状態は目標ダイナミクス $\{x_n\}$ によって、過渡期を除い

て一意に定まる．この対応は一般化同期と呼ばれ、 $r_n = f(x_n)$ と表される．ここで $f: \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^N$ は一般化同期写像といい、その存在と、ある条件下の微分可能性が証明されている [1]．

写像 f に逆写像が存在する場合、 $x_n = f^{-1}(r_n)$ と表される．このとき、力学系の τ 先予測はリザーバー状態 r_n の関数として $y_n = x_{n+\tau} = \phi^\tau(x_n) = \phi^\tau(f^{-1}(r_n)) =: h(r_n)$ と表される．したがって、RC を用いて目標力学系の τ 先を予測することは、写像 $h: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^K$ の関数近似をすることと同等である．写像 h は非線形写像の ϕ^τ と f^{-1} の合成写像であるので一般的に非線形である．ここで h は十分滑らかであるとし、 h の Taylor 展開、 $h(r) = h(0) + \nabla h(0)r + \frac{1}{2}r^\top H(0)r + O(\|r\|^3)$ を考える． $\nabla h \in M_{K,N}$ 、 $H \in M_{K,N,N}$ はそれぞれ Jacobian $[\nabla h]_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial r_j}$ ($i = 1, \dots, K, j = 1, \dots, N$)、Hessian $[H]_{ijk} = \frac{\partial^2 h_i}{\partial r_j \partial r_k}$ ($i = 1, \dots, K, j, k = 1, \dots, N$) である．これは従来の RC にある解釈を与える．すなわち、出力バイアスベクトル b と読み出し重み行列 W は、近似誤差 $O(\|r\|^2)$ を含んだ Taylor 展開の最初の二項を近似するために使われ、この意味において従来の RC は目標写像 h の線形近似として解釈できる．

3 数値実験

本稿では、主に 3 次までの項を近似する手法の数値結果を示す．リザーバーとしてエコーステートネットワークを用いる．すなわち写像 F として $F(r, x) = \tanh(Ar + Bx)$ を用いる．ここで \tanh は要素ごとに適用される活性化関数であり、 $A \in M_{N,N}$ および $B \in M_{N,K}$ はランダム行列である．ここでは目標力学系として Lorenz '63 モデル $\dot{x} = 10(y - x)$, $\dot{y} = 28x - y - xz$, $\dot{z} = xy - 8/3z$ を用いる．ここで自励化した RC の時系列長期予測タスクを考える．目標は、自励化 RC による Lorenz カオスダイナミクスの再現である．評価指標は KL ダイバージェンス (KLD) $D_{KL}(p||q) = -\int p(x) \ln(q(x)/p(x))dx$ 、平均共役誤差 (MCE) $\bar{\epsilon}^c := \langle \|\phi(\hat{h}(r_n)) - \hat{h}G(r_n)\| \rangle_T$ とした [3]．なお、 $p(x)$ は目標力学系のデータから得られる確率密度関数、 $q(x)$ は RC の出力値から得られる確率密度関数である． $G(r_n)$ は自励 RC のリザーバードダイナミクスを表し、RC の予測出力 \hat{y} と F を用いて $G(r_n) := F(r_n, \hat{y}_n)$ と表される．3 次の項まで近似した場合でも、小さいネットワークサイズにおいてカオスダイナミクスの再構築が高精度で可能であるという結果が得られた．講演では、2 次の項まで近似した場合と比較し、詳細な数値結果を紹介する．

参考文献

- [1] L. Grigoryeva, A. Hart and J. Ortega, Chaos on compact manifolds: Differentiable synchronizations beyond the Takens theorem. *Phys. Rev. E* 103, 062204 (2021).
- [2] M. Hara and H. Kokubu, Learning dynamics by reservoir computing. *J. Dyn. Differ. Equ.* 36, 515-540 (2022).
- [3] A. Ohkubo and M. Inubushi, Reservoir computing with generalized readout based on generalized synchronization. *Sci. Rep.* 14, 30918 (2024).
- [4] J. Pathak, Z. Lu, B. Hunt, M. Girvan and E. Ott, Using machine learning to replicate chaotic attractors and calculate Lyapunov exponents from data. *Chaos Interdiscip. J. Nonlinear Sci.* 27(9), 121102 (2017).

Navier–Stokes 乱流の同期現象に対する力学系解析と機械学習応用

Synchronization in Navier–Stokes turbulence: Lyapunov analysis and its application to machine learning

犬伏 正信 (Masanobu Inubushi)¹, Colm-cille Caulfield²,

¹ 東京理科大学 (Tokyo University of Science), ²University of Cambridge

e-mail : inubushi@rs.tus.ac.jp

1 Introduction

In Navier–Stokes (NS) turbulence, large-scale turbulent flows determine small-scale flows. Previous studies using data assimilation with the three-dimensional NS equations indicate that employing observational data resolved down to a specific length scale, ℓ_*^{3D} , enables the successful reconstruction of small-scale flows. Such a length scale of “essential resolution of observation” for reconstruction ℓ_*^{3D} is close to the dissipation scale in the three-dimensional NS turbulence [1]. Here we study the length scale in a *two*-dimensional NS turbulence, ℓ_*^{2D} , and compare with the three-dimensional case. The numerical studies using data assimilation and conditional Lyapunov exponents reveal that, for Kolmogorov flows with Ekman drag, the length scale ℓ_*^{2D} is close to the forcing scale, which is substantially larger than the dissipation scale. Furthermore, we discuss the origin of the difference between the length scales, ℓ_*^{2D} and ℓ_*^{3D} , based on inter-scale interactions and orbital instabilities in turbulence dynamics [2].

2 Synchronization in turbulence

Sensitive dependence on initial conditions is one of the crucial properties of turbulence dynamics. Considering turbulence as a chaotic dynamical system, we can characterise it using the (maximum) Lyapunov exponent, which measures the speed of exponential growth of uncertainty in a state space.

Let us consider a dynamical system defined by differential equations, $\dot{x} = F(x)$, with some initial condition, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^N$. Precise data on the initial conditions x_0 are not available in practice due to the limitation of measurement, and so it is natural to introduce an initial uncertainty around x_0 .

In a chaotic dynamical system, uncertainty grows exponentially fast in the most unstable direction, $\delta x(t_0 + \Delta\tau)$, and $\|\delta x(t_0 + \Delta\tau)\| \propto \|\delta x(t_0)\| e^{\lambda_1 \Delta\tau}$ where $\lambda_1 (> 0)$ is the (maximum) Lyapunov exponent. When we consider the above differential equations as the Navier–Stokes equations, the positive Lyapunov exponent λ indicates the sensitive dependence on initial conditions of turbulence, which makes prediction difficult. Specifically, it is conjectured that the positive Lyapunov exponent in turbulence is the inverse of the Kolmogorov time τ_η , i.e., $\lambda_1 \propto 1/\tau_\eta$ [3]; thus, uncertainty grows with the fastest time scale in turbulence.

What if we could observe the state? Although complete observation of the state would eliminate uncertainty, it is unrealistic in practice. Instead, it is natural to assume that we can observe large-scale structures of turbulence; in other words, we can observe, but its resolution is low,

called *partial* or *incomplete* observation. Here, the key control parameter is the resolution of the observation. The wavenumber corresponding to the resolution is denoted by k_a ; we assume that data on a low-pass filtered field with $k < k_a$ are available.

If the resolution is too low, i.e., k_a is too small, the chaotic dynamics would still expand the uncertainty along the orbit. However, if we can obtain observational data with sufficiently high resolution, i.e., k_a is sufficiently large, the introduction of observational data overcomes chaotic dynamics, and reduces the uncertainty in the state. This is an interpretation of *data assimilation* (DA) from the viewpoint of dynamical systems theory. The outcome of DA, whether successful or not, is determined by the competition between uncertainty *expansion* by chaotic dynamics and uncertainty *reduction* through assimilation using observational data.

Interestingly, for three-dimensional turbulence in a periodic box, if k_a exceeds a critical value, $k_a \geq k_a^{*(3D)} := 0.2/\eta$ where η is the Kolmogorov length, the assimilation process progressively reduces and eventually eliminates the uncertainty. In other words, the small-scale structure associated with $k \geq k_a$ converges asymptotically to the true unobserved structure under the DA process. This critical value is less dependent on the details of external forcing and DA algorithms.

Our motivation is to understand DA dynamics of two-dimensional Navier–Stokes turbulence from a perspective of dynamical systems theory. In particular, we study Kolmogorov flow with Ekman drag is described by the Navier–Stokes equations with incompressible conditions,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \pi + \nu \Delta \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

where $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ and $\pi(\mathbf{x}, t)$ is the velocity and pressure field on two-dimensional torus $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi]^2$, i.e., $\mathbf{u} : \mathbb{T}^2 \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^2$ and $\pi : \mathbb{T}^2 \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$. The external forcing is the Kolmogorov type, $\mathbf{f} = \sin(k_f y) \mathbf{e}_x$, ν and α are the kinematic viscosity and the friction coefficient of the Ekman drag, respectively. In the talk, we will show results of the critical wavenumber in a two-dimensional NS turbulence, $k_a^{*(2D)}$, and compare with the three-dimensional case.

謝辞 This work was partially supported by JSPS Grants-in-Aid for Scientific Research (Grants No. 24H00186, No. 22K03420, and No. 22H05198).

参考文献

- [1] Inubushi, M., Saiki, Y., Kobayashi, M.U. and Goto, S., Characterizing small-scale dynamics of Navier–Stokes turbulence with transverse Lyapunov exponents: A data assimilation approach. *Phys. Rev. Lett.* 131, 25 (2023), 254001.
- [2] Inubushi, M. and Caulfield, C. P., Dimensional dependence of synchronisation in turbulence: insights from data assimilation and Lyapunov analysis (in preparation).
- [3] Ruelle, D., Microscopic fluctuations and turbulence, *Phys. Lett. A*, 72 (1979), 81–82.

小さな変化が（カオスによらず）大きな影響をもたらす場合について

When a small change results in large differences: without chaos

加藤 響 (Hibiki Kato)¹, 小林 幹 (Miki Kobayashi)², 齊木 吉隆 (Yoshitaka Saiki)¹,
原 誠人 (Masato Hara)¹

¹ 一橋大学 (Hitotsubashi University), ² 立正大学 (Rissho University)
e-mail: mathahara0620@gmail.com

1 概要

台風などの大規模系を何らかの人為的介入によって制御することは非常に困難な技術的課題である。そのような挑戦を応用力学系の観点から支援するための予備的考察として、「ある力学系に何らかの微小変化を与えることで（必ずしもカオス性に依拠せずに）系や軌道に何らかの大きな影響を及ぼすことは可能か？」という問題を多角的に探究することは有意義である。これに関連して、本講演では、初期点に摂動を加えたときの軌道の有限時間誤差発展などいくつかの具体的な問題について、数値計算と数学解析の両面から議論したい。

2 問題設定：初期値に与えた摂動の発展

力学系に与えた「小さな変化が大きな影響をもたらす」ような状況を数学的に考察するための定式化は様々あり得るが、ここではまず、次の問題設定を考える：

問題 1 $(X, \|\cdot\|)$ を係数体 \mathbb{R} のノルム空間, $f: X \rightarrow X$ を写像とし, $\epsilon \ll 1$ を固定する. このとき,

- (1) 各点 $x \in X$ および反復回数 $k \in \mathbb{N}$ について, 次の $V^*(x; k) \subseteq X$ (k 回後の誤差発展を最大化する方向 = **最適摂動方向** 全体の集合) はどのように特徴づけられるか？

$$V^*(x; k) := \arg \max_{\|v\|=1} \|f^k(x) - f^k(x + \epsilon v)\|$$

- (2) 反復回数 $k \in \mathbb{N}$ を固定するとき, 次の $X^*(k) \subseteq X$ (k 回後の最大誤差発展」を最大化する点全体の集合) はどのように特徴づけられるか？

$$X^*(k) := \arg \max_{x \in X} \|f^k(x) - f^k(x + \epsilon v^*)\| \quad (\text{where } v^* \in V^*(x; k))$$

$k \rightarrow \infty$ の極限については、適切な仮定を置けば、Lyapunov 指数の理論 (Robinson [1, §9.2] など参照) によって一定の説明が可能である。しかし台風のようにある力学系の過渡挙動と見なせるような現象の制御を考える際には $k \rightarrow \infty$ の極限よりもむしろ k が比較的小さい段階に着目する方が自然であり、この場合は系の Lyapunov 指数 (カオス性) に基づくのと異なる解析が必要となる。

3 k が小さい場合の線型近似による解析

簡単のため $X = \mathbb{R}^m$ の場合を考える。 $|\cdot|$ を Euclid ノルム, $\|\cdot\|_{\text{op}}$ を作用素ノルムとする。次はよく知られた事実である：

命題 1 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対し, $\sigma_{\max}(A)$ を A の最大特異値 (重複度 m), $v_i(A)$ ($i = 1, \dots, m$) を $\sigma_{\max}(A)$ に属する A の単位右特異ベクトルとする。このとき, (i) $\|A\|_{\text{op}} = \sigma_{\max}(A)$, (ii) $\text{span}\{v_1(A), \dots, v_m(A)\} = \arg \max_{|v|=1} |Av|$.

それゆえ、 $|f^k(x) - f^k(x + \epsilon v)| \approx \epsilon |Df^k(x)v|$ の近似が成り立つ状況であれば、前節の問題は近似的に (1) $V^*(x; k) = \text{span}\{v_1(Df^k(x)), \dots, v_m(Df^k(x))\}$, (2) $X^*(k) = \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} \sigma_{\max}(Df^k(x))$ と解決される。

通常の力学系理論との接続を考えると、特異値・特異ベクトルよりもむしろ固有値・固有ベクトルに基づいた理解が望ましいが、両者の関係はそれほど単純ではない。しかし、少なくとも **Hénon 写像** $f(x, y) := (1 - ax + y, bx): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($a = 1.4, b = 0.3$) の周期点に対しては、数値計算により、最適摂動方向 $V^*(x; p)$ は近似的には安定部分空間 $\mathbb{E}^s(x)$ の直交補空間である ($Df^p(x)$ の最大特異値に属する右特異ベクトル v と安定固有ベクトル v_1 がほぼ直交する) ことが判明している (図 1, 2)。

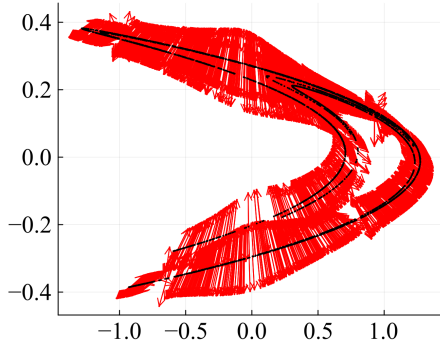


図 1: f の p 周期点 x に対する最適摂動方向 $V^*(x; p)$ ($p = 1, \dots, 20, \epsilon = 10^{-5}$)

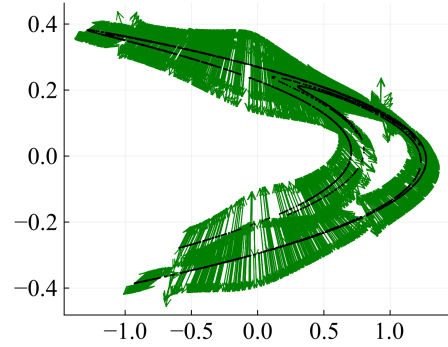


図 2: f の p 周期点 x に対する安定部分空間 $\mathbb{E}^s(x)$ に直交する方向 ($p = 1, \dots, 20$)

この数値結果は、次の命題と合わせて理解することができる：

命題 2 行列 $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ は二つの異なる実固有値 $0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ をもつものとし、対応する単位固有ベクトルを $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ とする。 (v_1 は相対的な安定方向、 v_2 は相対的な不安定方向である。) v_1 と v_2 の成す角を θ とする。このとき、実は A は異なる二つの特異値を持ち、最大特異値に属する単位右特異ベクトルを $v \in \mathbb{R}^2$, v と v_1 の成す角を Θ と書くと $45^\circ \leq \Theta \leq 135^\circ$ である。更に、

$$\frac{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + \Lambda^2}{2|\lambda_1\Lambda|} \rightarrow \infty \text{ のとき } \Theta \rightarrow 90^\circ \text{ (where } \Lambda = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\tan \theta} \text{)} \text{ である.}$$

4 議論

以上の内容に引き続くべき話題として、前節の内容 (数値計算や命題 2) を高次元の場合に拡張することや $k \rightarrow \infty$ の状況 (通常の力学系理論、特にエルゴード理論) と関連付けて理解することが挙げられる。また、既に述べたように、「小さな変化が大きな影響をもたらす」状況の取り扱いが定式化そのものの自由度が大きいので、講演ではそうした話題についても議論したい。

謝辞 本研究は JST ムーンショット型研究開発事業 (JPMJMS2282) の支援を受けたものです。

参考文献

- [1] Robinson, C. (1999), *Dynamical Systems*, CRC Press. (日本語訳: C. ロビンソン著, 國府寛司・柴山健伸・岡宏枝訳, 『力学系』, 2001, シュプリンガー・フェアラーク東京.)