

Hamiltonian systems and monotone twist maps for braids

梶原 唯加 (Yuika Kajihara)¹, 柴山 允瑠 (Mitsuru Shibayama)¹,

¹ 京都大学 (Kyoto University),

e-mail : kajihara.yuika.6f@kyoto-u.ac.jp

1 主結果と研究背景

本研究では, monotone twist map と呼ばれる写像によって定まる 2 つの不変曲線に囲まれた 2 次元領域上の力学系を考察する. 1986 年に Moser によって, この系の軌道を Poincaré 断面上で実現するような Hamiltonian が存在することが示されている. 本研究の目的は, Moser の結果を応用して与えられた組みひもを実現する Hamiltonian を構成することである. 主結果は次のとおり:

定理 1.1. \mathcal{B}_n を n 次組みひも群とし,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b\}$$

とする. このとき任意の $b \in \mathcal{B}_n$ について, ある Hamiltonian $H = H(t, x, y) \in C^\infty(\mathbb{R} \times A)$ が存在して, 次の性質を満たす: 平面上のある n 点 a_1, \dots, a_n があって, 集合

$$\{\{\varphi_t(a_1), \dots, \varphi_t(a_n)\} \times \{t\} \mid t \in [0, 1]\} \quad (1)$$

が b を表す. ここで, φ_t は H によって定まる Hamiltonian flow を表すとする.

証明の概略を述べる前に研究背景について触れておく. 組みひもとハミルトン系の関係性について調べる理由に, ハミルトン系の一種でもある n 体問題がある. (1) の各 $\varphi_t(a_i)$ を n 体問題の各質点の運動に置き換えて考えると, 平面 n 体問題の周期解は組みひもを定める. 平面 n 体問題には多様な周期解が存在することが知られているが, その代表例でもある 3 体問題における 8 の字解の存在を証明したことで著名な Montgomery は近年出版した著書の中で n 体問題に関する 4 つの未解決問題をあげている. その一つが以下に記す組みひもに関する問いであり, 本研究の元来の動機となっている:

Is every braid type on n strands realized by a periodic solution of the planar Newtonian n -body problem? (Open Question 3, [Mon25])

2 証明の概略

証明においては, monotone twist map と呼ばれる twist 写像および Moser による結果が重要な役割を果たす.

定義 2.1 (Monotone Twist Map). A 上の写像

$$\varphi: (x, y) \mapsto (x_1, y_1) = (f(x, y), g(x, y))$$

が monotone twist map であるとは, f, g が次を満たすことをいう:

$$1) \partial(f, g)/\partial(x, y) \equiv 1$$

- 2) $f(x+1, y) = f(x, y) + 1, g(x+1, y) = g(x, y)$
- 3) $g(x, y) = y \quad (y = a, b)$
- 4) $\partial f / \partial y > 0$ (*twist* 条件)

Moser は monotone twist map $\varphi: (x, y) \mapsto (x_1, y_1)$ が与えられたとき, (x, y) と (x_1, y_1) の間を補完する軌道を与える Hamiltonian が存在することを示した.

定理 2.2 ([Mos86]). φ を C^∞ 級の monotone twist map とする. このとき, ある Hamiltonian $H = H(t, x, y) \in C^\infty(\mathbb{R} \times A)$ が存在して, 以下が成り立つ:

1) 次の 3 条件を全て満たす:

- (a) $H(t+1, x, y) = H(t, x, y) = H(t, x+1, y)$
- (b) $H_x(t, x, y) = 0 \quad (y = a, b)$
- (c) $H_{yy} > 0$

2) 初期値問題

$$\dot{x} = H_y(t, x, y), \quad \dot{y} = -H_x(t, x, y), \quad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$$

についての解 $x(t), y(t)$ は次を満たす:

$$\varphi(x(0), y(0)) = (x(1), y(1))$$

■主結果 (定理 1.1) についての証明の概略

1) ε を正の定数, k を自然数, $\theta = \pi/k$ とし, φ を

$$(X, Y) = \begin{cases} ((\cos \theta)x + (\sin \theta)y, -(\sin \theta)x + (\cos \theta)y) & \|(x, y)\| \leq \varepsilon \\ (x + (\sin \theta)y, y) & \|(x, y)\| \geq 2\varepsilon \\ \tilde{\varphi}(x, y) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

で定める. このとき, φ が滑らかな monotone twist map となるような, ある ε, k および $\tilde{\varphi}$ があることを示す.

- 2) φ の k 回合成によって, ある点 a_i の近傍で π 回転し, それ以外の領域では単調な動きをするような map を $\psi := \varphi^k$ 構成する.
- 3) 定理 2.2 を用いて前ステップで得られた ψ に対応する Hamiltonian を H_i とする. 適当な初期値を選ぶことで, H_i による起動が組みひもの生成元 σ_i を描くことをみる.
- 4) 相異なる i, j について H_i による flow と H_j による flow が滑らかにつながる (あるいはそのように H_i, H_j を滑らかに変形できること) を示す.

参考文献

- [Mon25] Richard Montgomery, *Four open questions for the N -body problem*, Cambridge University Press, Cambridge, 2025.
- [Mos86] Jürgen Moser, *Monotone twist mappings and the calculus of variations*, Ergodic Theory Dynam. Systems **6** (1986), no. 3, 401–413.

Anosov 性を持つリンケージの構成

Construction of Anosov linkage

坂口 秀 (Shu Sakaguchi)¹, 柴山 允瑠 (Mitsuru Shibayama)¹,

¹ 京都大学情報学研究科 (Graduate School of Informatics, Kyoto University)

e-mail : sakaguchi@amp.i.kyoto-u.ac.jp

1 概要

Hunt と MacKay[1] は, Thurston と Weeks[2] が紹介したトリプルリンケージという機構について, 極限的な配位空間の曲率を調べることで Anosov 性を示した. 本発表では, Hunt と MacKay が扱ったトリプルリンケージの 3 次元へのある種の変形となっているリンケージを構成する. また, このリンケージの配位空間の曲率について数値計算を元に議論し, このリンケージもあるパラメータ領域で Anosov になっていることを示す.

2 Anosov 性

Anosov 流について説明する. 詳しくは [3] を参照されたい.

定義 1 (Anosov 流) M をコンパクトリーマン多様体, $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ を M とする. このとき, φ が Anosov 流であるとは, ある正の実数 $0 < \lambda < 1, C \geq 1$ と接束の $D\varphi^t$ 不変な分解 $TM = E^0 \oplus E^s \oplus E^u$ が存在して, E^0 は φ^t の生成ベクトル場で張られる 1 次元部分束, E^s, E^u は

$$\|D\varphi^t|_{E^s}\| \leq C\lambda^t, \quad \|D\varphi^{-t}|_{E^u}\| \leq C\lambda^t \quad (t \geq 0)$$

となることをいう.

負の断面曲率をもつコンパクトリーマン多様体上の測地流は Anosov 流である. また, Anosov 流は C^1 構造安定である. つまり, Anosov 流 φ^t に C^1 の位相で十分に近い流れは φ^t と位相同値である. 特に Anosov 流になる.

3 トリプルリンケージ

Hunt と Mackay はトリプルリンケージ (図 1) が $l_1 \ll 1, l_2 = 1$ でさらに剛体棒 l_1 の質量が剛体棒 l_2 の質量に比べて十分大きいとき, この機構が Anosov となることを示した. この証明は次のようになされた.

- 1 リンケージの慣性運動を配位空間の測地流としてみる.
- 2 配位空間の曲率が, パラメータの極限で負になることを示す. 従ってこの元で測地流は Anosov になる.
- 3 構造安定性より, パラメータが十分極限に近いとき Anosov 性は保たれる.

つまりリンケージの Anosov 性を示すには, 本質的にはパラメータの極限で配位空間が負曲率になることを示せば良い.

4 リンケージの構成

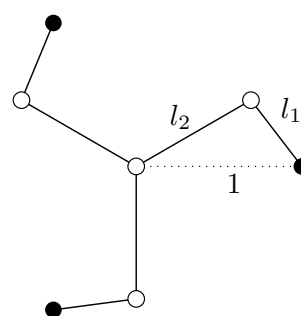


図 1: トリプルリンケージ. 黒が固定され, 白は自由に動ける.

次のようなリンケージを考える (図 2). \mathbb{R}^3 の単位球面上の 4 点を正四面体の各頂点となるように取り, 各点を中心とする半径 l の水平方向にだけ自由に回転ができる円板 C_1, \dots, C_4 を, それぞれの円板が乗っている 2 次元平面に原点が乗るように配置する (図 2). C_1, \dots, C_4 の縁にそれぞれ点 A_1, \dots, A_4 を取り, ここに長さ 1 の剛体棒の端点の一方を取りつける. 他方の端点を全て 1 点で繋ぎ合わせ, これを点 I とする. さらに, 点 I と原点 O を長さ pl ($p > 0$) の剛体棒で結ぶ.

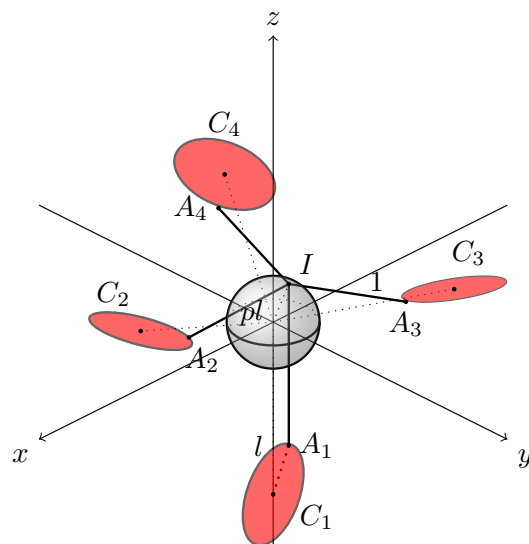


図 2: リンケージ

5 リンケージの Anosov 性

$l \rightarrow 0$ の極限での配位空間を考える. この時の曲率を A_1, A_2 の原点方向からの回転角 θ_1, θ_2 で座標をとり, 図 3 に示す. $p = 1.2$ では全体で負曲率が数値的に確認できた, 従ってパラメータが十分極限に近いとき, Anosov 性も分かる.

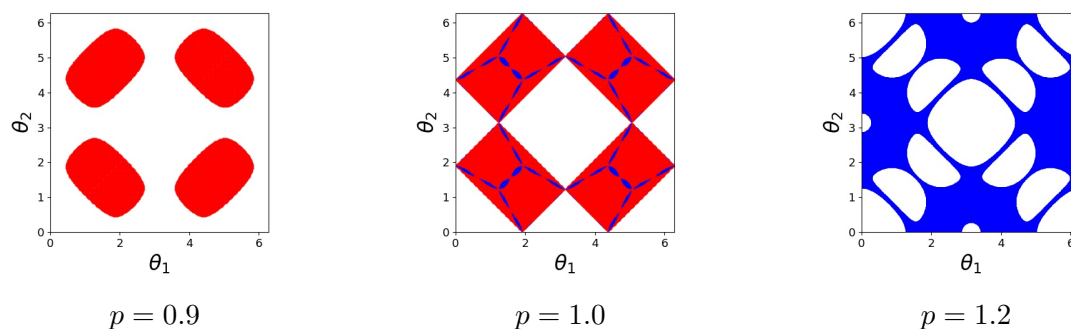


図 3: $p = 0.9, 1.0, 1.1$ における曲率 (赤が正曲率, 青が負曲率).

参考文献

- [1] TJ Hunt and RS MacKay. Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor. *Nonlinearity*, 16(4):1499, 2003.
- [2] William P Thurston and Jeffrey R Weeks. The mathematics of three-dimensional manifolds. *Scientific American*, 251(1):108–121, 1984.
- [3] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Number 54. Cambridge university press, 1995.

折り紙写像における不変曲線とアトラクターの存在について

The existence of invariant curves and a quasi-periodic attractor in Origami maps

市川 龍太郎 (Ichikawa Ryutaro)¹, 柴山 允瑠 (Shibayama Mitsuru)¹

¹ 京都大学大学院 情報学研究科 (Graduate School of Informatics Kyoto University)
e-mail : ryuichikawa@amp.i.kyoto-u.ac.jp

1 概要

折り紙の展開図において、三角形で構成されるモジュールが周期的に配置されたものは円柱形を形成することが知られており、形成される曲面はしばしば非自明な挙動を示すことから研究が行われている。先行研究 [1] では、この折り目の拡大を許すような展開図を考え、その離散力学系が写像のヤコビ行列式が定数となる Conformally Symplectic 力学系となることが確認されている。本研究ではこの離散力学系を対象に、モジュール数を十分大きくした際に、準周期アトラクターが存在することを Conformally Symplectic 力学系に対する KAM 定理 [2] を用い数値的に確認した。講演では、以上の結果とパラメータの変化による吸引領域の変化を述べ、最後に今後の展望を述べる。

2 折り紙写像の定義

折り紙におけるモジュール数を N 、折り紙上の折り目の長さに関する定数を l, r_1, r_2 、2 つのパラメータを $(d, \rho) \in (0, l) \times (-\pi, \pi)$ とし、写像の簡単化のため以下の各関数を定義する。

$$\begin{aligned} A(d; l, r_1, r_2) &= \sqrt{-\frac{4d^2r_2^2 + l^4 - 2l^2(r_1^2 + r_2^2) + (r_1^2 - r_2^2)^2}{r_1 - d}} \\ B(d; l, r_1, r_2) &= -2d^2 + l^2 + r_1^2 + r_2^2, \quad C(d; l) = \sqrt{(l-d)(l+d)}, \quad D(d; r_1) = \sqrt{r_1 - d} \\ E(d, \rho; l, N) &= \sqrt{(l^2 - 3d^2) \cos \frac{2\pi}{N} - d^2 - 4dC \sin \frac{2\pi}{N} \sin \rho + 2C^2 \sin^2 \frac{\pi}{N} \cos 2\rho + 3l^2} \end{aligned} \quad (1)$$

折り紙写像とは、以下の関数

$$\mathbf{F}(d, \rho; l, N, r_1, r_2, \sigma) = \left[\text{atan2} \left(\frac{\frac{1}{2C} \sin \frac{\pi}{N} (D \sin \rho \mp DA \cos \rho + 2dC \cot \frac{\pi}{N})}{-\frac{B \cos \rho \mp DA \sin \rho}{2C}}, \frac{\cos \frac{\pi}{N} (DCA \cos \rho - CB \sin \rho)}{2C^2} + 2d \sin \frac{\pi}{N} \right) \right] \quad (2)$$

$$\mathbf{G}(d, \rho; l, N) = \left[\text{atan2} \left(\frac{C \sin \frac{\pi}{N} \sin \rho + d \cos \frac{\pi}{N}}{-\frac{2C \cos \rho}{E}}, \frac{2d \sin \frac{\pi}{N} - 2C \cos \frac{\pi}{N} \sin \rho}{E} \right) \right] \quad (3)$$

に対し、 $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $k_i \in \{0, 1\}$, $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}(d, \rho; r_{i-1,1}, N, r_{i,1}, r_{i,2}, \sigma_i)$, $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}(d, \rho; r_{i,1}, N)$ としたときの n 回の写像の合成、およびスケーリング写像 $\mathbf{s}(d, \rho) = (d/s, \rho)$ の合成

$$\mathbf{M} = \mathbf{s} \circ (\mathbf{G}_{n-1}^{k_{n-1}} \circ \mathbf{F}_{n-1}) \circ \dots \circ (\mathbf{G}_i^{k_i} \circ \mathbf{F}_i) \circ \dots \circ (\mathbf{G}_0^{k_0} \circ \mathbf{F}_0) \quad (4)$$

で表される写像である。 σ_i は各折り目が山折りか谷折りかを表すシンボルであり、 s ($s > 1$) は折り紙の拡大係数である。この折り紙写像 \mathbf{M} を用いて、以下のように離散力学系を定義する。

$$\mathbf{M} : \begin{bmatrix} d_m \\ \rho_m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} d_{m+1} \\ \rho_{m+1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

3 Conformally Symplectic 力学系における KAM 定理

写像 $f : \mathbb{T} \times \mathcal{U}(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{T} \times \mathcal{U}$, $(\rho, d) \mapsto (\rho', d')$ が Conformally Symplectic 写像であるとは,

$$\det(Df) = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

が成立することである. 本研究の折り紙写像は Conformally Symplectic 写像であり, $\lambda = 1/s$ と対応している. また, 以下で紹介する KAM 定理では, モジュール数 N を $N = 1/\varepsilon$ として扱う.

定理 1 (Conformally Symplectic 力学系に対する KAM 定理)

Conformally Symplectic 写像 $f(\rho, d; \varepsilon, \mu)$ に対する非退化条件およびディオファントス条件が成立するよう, あるアルゴリズムの収束を確認する. このとき, アルゴリズムが収束するならば適切なドリフトパラメータ μ において, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し f に一つの準周期アトラクターが存在する.

4 数値実験結果

折り紙写像を図 1(a) の展開図に適用した結果を以下に記す. なお, 初期点は等間隔に取っており, 解が有限解の場合は図示しないものとする. 数値実験より, モジュール数 N が大きくなっていくにつれ, 相図の軌道は全体的に直線形のアトラクターに吸い込まれる様子が確認できる. 講演では仮想的な折り目を考え, 写像のドリフトパラメータ μ を調整した例も紹介する.

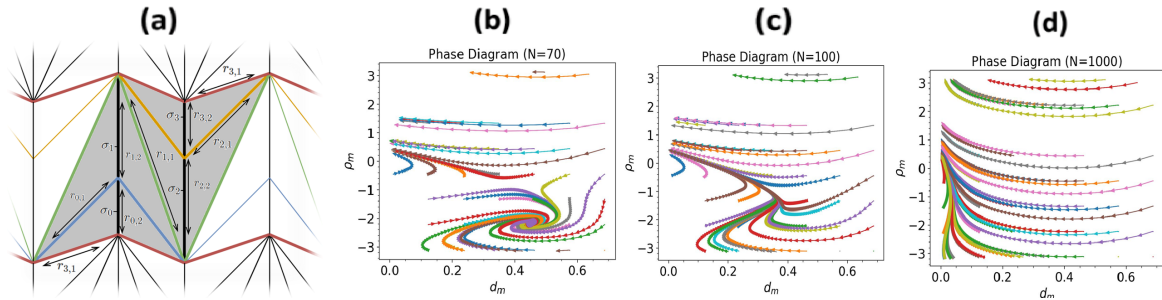


図 1. (a) 折り紙写像を適用する展開図. (b)-(d) モジュール数を変化させていった際の相図 ($N = 70, 100, 1000$).

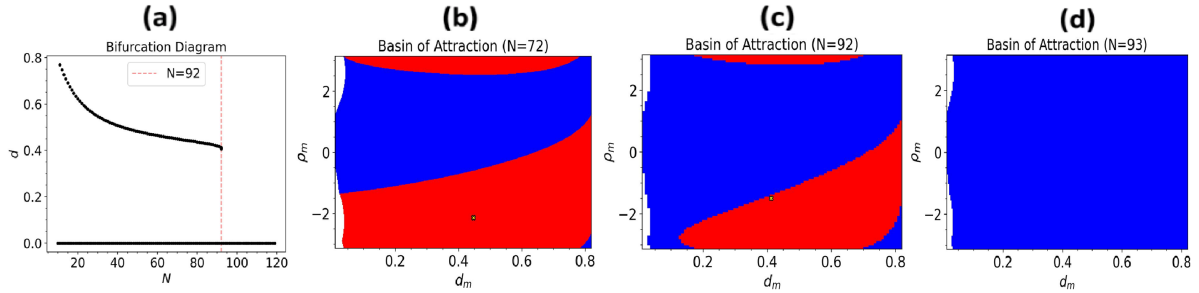


図 2. (a) 系の収束先に関する分岐図. (b)-(d) モジュール数を変化させていった際の吸引領域 ($N = 72, 92, 93$).

参考文献

- [1] Rinki Imada and Tomohiro Tachi. “Undulations in tubular origami tessellations: A connection to area-preserving maps.” *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 33:8 (2023), 083158.
- [2] Renato C. Calleja, Alessandra Celletti, and Rafael de la Llave. A KAM theory for conformally symplectic systems: efficient algorithms and their validation. *J. Differential Equations*, 255(5):978 – 1049, 2013.

平面 Sitnikov 問題におけるヘテロクリニック軌道の変分的構成

Variational construction of heteroclinic orbits in the planar Sitnikov problem

柴山 允瑠 (Mitsuru Shibayama)¹, 梶原 唯加 (Yuika Kajihara)¹, Yu Guowei ²

¹ 京都大学 (Kyoto University), ²Nankai University

e-mail : shibayama@amp.i.kyoto-u.ac.jp

1 主結果

平面 3 体問題において, 2 つの質点の質量は等しいとし, x 軸上を 2 体問題にしたがって原点を中心として対称的に運動するとする. この 2 質点は原点において衝突をするが, 衝突特異点は正則化されているものとし, 衝突後も質点は跳ね返り解は接続されているものとする. もう一つの質点の質量は 0 であるとし, 質量をもつ 2 質点からの引力を受け, y 軸上を運動するとする. この運動を調べる問題を平面 Sitnikov 問題という (図 1).

平面 Sitnikov 問題の運動方程式は

$$\ddot{x} = -\frac{1}{8x^2} \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (2)$$

と表される. $x(t)$ は (1) の周期解で

$$x(t) > 0 \quad (t \notin \mathbb{Z}), \quad x(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{Z})$$

を満たすものとする.

$1, -1$ の両側無限列 $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}$ を考える. $\{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}$ において, 連続する $1, -1$ の長さが 3 以上のものを \mathcal{M} とする. つまり, $\mathbf{a} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}}$ を

$$\mathbf{a} : \dots, \underbrace{-1, -1, \dots, -1, 1, 1, \dots, 1}_{k_{-1}}, \underbrace{-1, 1, 1, \dots, 1}_{k_0}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{k_1}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k_2}, \dots,$$

と表したとき, 各 j について $k_j \geq 3$ のとき \mathbf{a} は \mathcal{M} に属する.

$\mathbf{a} \in \mathcal{M}$ に対して,

$$\Omega(\mathbf{a}) = \{y(t) \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid a_n y(n) > 0 \ (n \in \mathbb{Z})\}$$

とおく.

また, 全ての成分が ± 1 である列を \mathbf{e}^{\pm} とする:

$$\mathbf{e}^+ = \dots, 1, 1, 1, \dots, \quad \mathbf{e}^- = \dots, -1, -1, -1, \dots$$

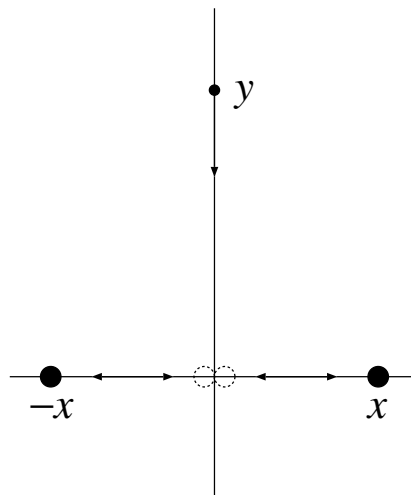


図 1. 平面 Sitnikov 問題

$N \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\mathcal{S}_N = \{\mathbf{a} \in \mathcal{M} \setminus \{\mathbf{e}^\pm\} \mid a_n = a_{n+N} = a_{-n} (n \in \mathbb{Z})\}.$$

とおく.

定理 1 $\mathbf{a} = \{a_n\} \in \mathcal{M}$ と $\mathbf{b}^\pm = \{b_n^\pm\} \in \mathcal{S}_{N^\pm}$ とし, ある $K^\pm (K^- < K^+)$ が存在して $a_n = b_n^+$ ($n \geq K^+ + 1$) と $a_n = b_n^-$ ($n \leq K^- - 1$) を満たすとする. このとき, 周期軌道 $\gamma^\pm \in \Omega(\mathbf{b}^\pm)$ と γ^- から γ^+ へのヘテロクリニック軌道 $y(t) \in \Omega(\mathbf{a})$ が存在する.

つまり, $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{M}$ が十分大きな n と小さな n では周期的だとすると, その周期記号列に対応する周期解 γ^\pm が存在し, さらにその間のヘテロクリニック軌道で記号列 \mathbf{a} を実現するものが存在する.

2 証明の概略

平面 Sitnikov 問題は

$$\mathcal{A}_{t_0 t_1}(y) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \dot{y}^2 + \frac{1}{\sqrt{(x(t))^2 + y^2}} dt$$

に関する変分問題として定式化される. 周期記号列 $\mathbf{b} \in \mathcal{S}_N$ に対応する周期的な曲線の集合

$$\Omega_N^{\text{per}}(\mathbf{b}^+) = \{y(t) \in H^1(\mathbb{R}/N\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \mid b_n^+ y(n) > 0 \ (n \in [0, N] \cap \mathbb{Z})\}$$

における $\mathcal{A}_{0,N}(y)$ の最小点の存在を示すことで, 周期解 γ が得られる [1]. \mathbf{b}^\pm に対応する周期解を γ^\pm とする.

[2] を参考にヘテロクリニック軌道を求めるための変分構造を構築する.

$$\rho^\pm = \mathcal{A}_{0,N^\pm}(\gamma^\pm)$$

とする. $\Omega(\mathbf{a})$ において

$$\sum_{k=-\infty}^0 \left(\mathcal{A}_{k-1,k}(y) - \frac{\rho^-}{N^-} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathcal{A}_{k,k+1}(y) - \frac{\rho^+}{N^+} \right)$$

を最小化する y の存在を示す. この y が求めるヘテロクリニック軌道である.

γ^\pm や y が 3 体衝突を持たないことをは, [1] の結果を適用すれば示すことができる.

参考文献

- [1] M. Shibayama, Variational construction of orbits realizing sequences in the planar Sitnikov problem, *Regular and Chaotic Dynamics*, **24**(2019), 202-211.
- [2] P. H. Rabinowitz, The calculus of variations and the forced pendulum, Hamiltonian dynamical systems and applications, 367 – 390. NATO Sci. Peace Secur. Ser. B Phys. Biophys. Springer, Dordrecht, 2008