

## 分岐構造にもとづいた局在解の運動制御について

## Spatio-temporal control of traveling pulse in reaction-diffusion systems

西 慧 (KEI NISHI)<sup>1</sup><sup>1</sup> 京都産業大学 (Kyoto Sangyo University)

e-mail : knishi@cc.kyoto-su.ac.jp

## 1 はじめに

反応拡散系にはパルス解やフロント解, スポット解のような局在解が現れ, 一定速度で進行したり, 脈動したりといった振る舞いを見せる. これらの局在化したパターンの運動制御は, 局在解と非一様性との相互作用ダイナミクスの観点からも, また, 自然現象でみられるパターンの制御観点からも重要な問題である. Löber らはこれらの解が平行移動の自由度を持つことを利用し, 局所的な外力を加えることで進行解の軌道を制御する方法を提案している [1][2]. 一方, このような解はパラメータの変化により様々な分岐を起こすことも多い. 本講演では特に定常解から進行解への pitchfork 分岐点 (drift 分岐点) に着目し, 局所的に弱い外力を与え続けることで局在解の振る舞いを制御する方法について考える.

## 2 モデル方程式

ここでは, 以下の  $n$  成分の反応拡散系に現れる局在解について考える:

$$\mathbf{U}_t = \nabla \cdot (D \nabla \mathbf{U}) + \mathbf{F}(\mathbf{U}; \mathbf{k}). \quad (1)$$

ここで,  $\mathbf{U}(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t))$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{U}; \mathbf{k}) = (f_1(\mathbf{U}; \mathbf{k}), \dots, f_n(\mathbf{U}; \mathbf{k}))$ ,  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ ,  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $t > 0$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$  であるが, 特にパラメータ  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$  のいずれかの値を分岐パラメータとして変えたときに, ある値で超臨界 pitchfork 分岐を起こすと仮定する. このとき, 分岐点近傍には速度の遅い進行解が存在することが知られている [3, 4, 5]. このような状況の下で, あるパラメータに時間的・時空的に局所的な外力を与える. 具体的には, 進行解からみて一定距離離れた場所に局所的な外力を一定時間与え続ける (図 1(a)). 外力の強度が十分小さいという条件下では, 反応拡散方程式 (1) に中心多様体縮約を行うことで, 進行解の運動を記述する有限次元の常微分方程式を導出することができる [3, 4, 5]. 空間 1 次元の場合は進行解の位置  $l$  と速度  $r$  に関する以下の 2 変数系に縮約される:

$$\begin{cases} \dot{l} = r - b_1(t), \\ \dot{r} = M_2 \eta r + M_1 r^3 + b_2(t). \end{cases} \quad (2)$$

この式 (2) は pitchfork 分岐の標準形に外力に由来する非一様項  $b_1(t)$ ,  $b_2(t)$  が加わった非自励系であり, 実際に  $M_1$  や  $M_2$ ,  $\eta$  といったパラメータを適当な値に固定して数値計算を行うと, 外力を加える場所や強度, 持続時間に応じて進行解の停止や進行方向を反転が見られる (図 1(b)). 本講演では, このような振る舞いの変化が起こるメカニズムを分岐理論の観点から考察し, 実際に 2 成分反応拡散系のフロント解を用いた検証を行う. また, 式 (2) のように時間依存する項をもつ常微分方程式では, 外力の変化率に応じて異なるアトラクタへ漸近する Tipping とよばれる現象も知られており, 力学系の観点からも近年研究が進められている [6, 7, 8]. 時間が許せば, ダイナミクスと関数  $b_1(t)$ ,  $b_2(t)$  の変化率との関係についても考察したい.

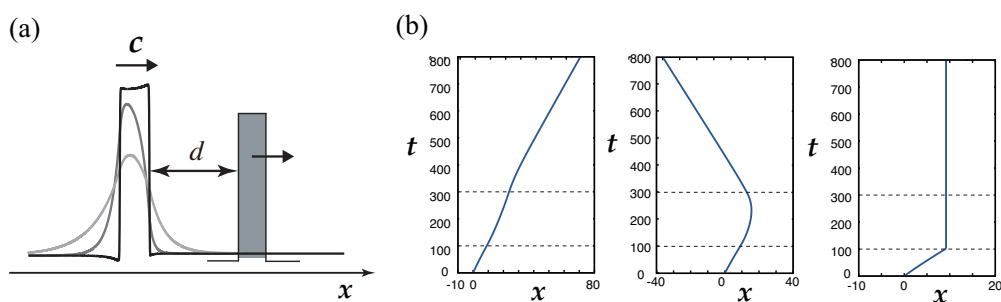


図 1. (a) 式 (1) に現れる進行解から一定の距離だけ離れた場所に、局所的な外力を一定時間加え続ける．(b) 式 (2) で数値的にみられる進行解の位置  $l(t)$  の時空間プロット．局所的な外力を一定時間 ( $t = 100$  から  $t = 300$  まで) 加えたとき、外力の位置や強度に応じて進行解の停止や進行方向の反転がみられる．

## 参考文献

- [1] J. Löber, H. Engel, Controlling the position of traveling waves in reaction-diffusion systems, *Physical Review Letters*, 112 (2014), 148305-1 – 148305-5.
- [2] S. Marstens, C. Ryll, J. Löber, F. Tröltzsch, H. Engel, Control of traveling localized spots, *Mathematical modelling of natural phenomena*, 16 (2021).
- [3] S.-I. Ei, The motion of weakly interacting pulses in reaction-diffusion systems, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 14 (2002), 85–137.
- [4] S.-I. Ei, M. Mimura, M. Nagayama, Pulse-pulse interaction in reaction-diffusion systems, *Physica D*, 165 (2002), 176–198.
- [5] S.-I. Ei, M. Mimura, M. Nagayama, Interaction spots in reaction-diffusion systems, *Discrete and continuous dynamical systems*, 14 (2006), 31–62.
- [6] P.D. Ritchie, H. Alkhayuon, P. Cox, S. Wiczeorek, Rate-induced tipping in natural and human systems, *Earth System Dynamics*, 14 (2023), 669–683.
- [7] P. Ashwin, S. Wiczeorek, R. Vitolo, P. Cox, Tipping points in open systems: bifurcation, noise-induced and rate-dependent examples in the climate system, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 370 (2012), 1166–1184.
- [8] P. Ashwin, C. Perryman, S. Wiczeorek, Parameter shifts for nonautonomous systems in low dimension: bifurcation-and rate-induced tipping, *Nonlinearity*, 30 (2017).

## コンパクトメトリックグラフ上での Turing 不安定性

## Turing instability on compact metric graphs

小林 俊介 (Shunsuke Kobayashi)<sup>1</sup>, 小川 知之 (Toshiyuki Ogawa)<sup>2</sup>,  
坂元 孝志 (Takashi Sakamoto)<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 宮崎大学 (University of Miyazaki), <sup>2</sup> 明治大学 (Meiji University)  
e-mail : s.kobayashi@cc.miyazaki-u.ac.jp

## 1 はじめに

長さが有限の 2 本の辺からなり、かつ次数 3 以上の頂点 (ジャンクション) をもつメトリックグラフ  $\mathcal{G}$  上で、反応拡散系の Turing 不安定性を考察する. この場合,  $\mathcal{G}$  は 2 種類 (図 1 参照) に分類され, それぞれの場合について中心多様体上の縮約方程式を導出する. すると,  $\mathcal{G}$  の形状に依存して解の分岐構造が異なることが明らかとなる.

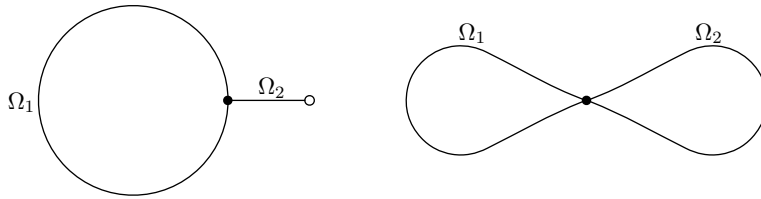


図 1. 2 本の辺からなり, ジャンクションをもつコンパクトなメトリックグラフ. (左): Tadpole domain, (右): 2-leaves domain. ●: ジャンクション, ○: 端点.

$\Omega_i := (0, L_i)$  ( $i = 1, 2$ ),  $t > 0$  とする.  $u^i = u^i(x_i, t) \in \mathbb{R}$ ,  $v^i = v^i(x_i, t) \in \mathbb{R}$  を  $\Omega_i$  上の未知関数とし, 2 成分反応拡散系

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = D_u \Delta \mathbf{u} + f_u \mathbf{u} + f_v \mathbf{v} + \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ \tau \mathbf{v}_t = D_v \Delta \mathbf{v} + g_u \mathbf{u} + g_v \mathbf{v} \end{cases}$$

を考える. ここで,  $\mathbf{u} = (u^1, u^2)^\top$ ,  $\mathbf{v} = (v^1, v^2)^\top$ ,  $\mathbf{u}_t = (\frac{\partial u^1}{\partial t}, \frac{\partial u^2}{\partial t})^\top$ ,  $u_{x_i}^i = \frac{\partial u^i}{\partial x_i}$ ,  $\Delta \mathbf{u} = (\frac{\partial^2 u^1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_2^2})^\top$ ,  $\tau \geq 0$ ,  $f_u > 0 > g_v$ ,  $f_v g_u < 0$ ,  $f_u + g_v < 0$ ,  $f_u g_v - f_v g_u > 0$  を満たすとし,  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  は非線型項を表す. 以下,  $\mathcal{G}$  に対する  $L^2$  空間を  $L^2(\mathcal{G}) = \Pi_{i=1}^2 L^2(\Omega_i)$ ,  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(\mathcal{G})$  の内積を  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{L^2(\mathcal{G})} = \sum_{i=1}^2 \langle f_i, g_i \rangle_{L^2(\Omega_i)} = \sum_{i=1}^2 \int_0^{L_i} f_i(x_i) g_i(x_i) dx_i$  で表す. ここで,  $\mathbf{f} = (f_1(x_1), f_2(x_2))^\top$ ,  $\mathbf{g} = (g_1(x_1), g_2(x_2))^\top$ ,  $f_i, g_i \in L^2(\Omega_i)$  である. また,  $H^2(\mathcal{G})$  を  $\mathcal{G}$  上で連続かつ各辺上で  $H^2(\Omega_i)$  に属する関数からなるソボレフ空間とし,  $\Delta$  で  $H^2(\mathcal{G})$  におけるラプラシアンを表す.

## 2 Tadpole domain

$L_1 = 2L_2 = L$  に制限する. 端点でノイマン条件  $u_{x_2}^2(L_2, t) = 0 = v_{x_2}^2(L_2, t)$  を, ジャンクションではキルヒホッフ条件  $u_1(0, t) = u_1(L_1, t) = u_2(0, t)$ ,  $v_1(0, t) = v_1(L_1, t) = v_2(0, t)$ ,  $\sum_{i=1}^2 u_{x_i}^i(0, t) = u_{x_1}^1(L_1, t)$ ,  $\sum_{i=1}^2 v_{x_i}^i(0, t) = v_{x_1}^1(L_1, t)$  を課す. Tadpole domain における  $\Delta$  の固有値は  $\lambda = \lambda_m = -m^2 k_0^2$  ( $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k_0 := \pi/L$ ) であり, 対応する固有関数は  $\psi_0 = (1, 1)^\top$ ,  $\psi_{2m-1} = (-\sin(2m-1)k_0 x_1, 2 \sin(2m-1)k_0 x_2)^\top$ ,  $\psi_{2m,0} = (\cos 2mk_0 x_1, \cos 2mk_0 x_2)^\top$ ,  $\psi_{2m,1} = (\sin 2mk_0 x_1, 0)^\top$  である.  $m$  が偶数のときには重複度が 2 であることに注意されたい. これらは  $L^2(\mathcal{G})$  における直交基底をなす ([1]).  $u_0(t) \in \mathbb{R}$ ,  $v_0(t) \in \mathbb{R}$ ,  $u_{2m-1}(t) \in \mathbb{R}$ ,  $v_{2m-1}(t) \in \mathbb{R}$ ,

$u_{2m,j}(t) \in \mathbb{R}$ ,  $v_{2m,j}(t) \in \mathbb{R}$  ( $j = 0, 1$ ) とし, 固有函数展開

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u_0(t)\psi_0 + \sum_{m \in \mathbb{N}} u_{2m-1}(t)\psi_{2m-1} + \sum_{j=0,1} \sum_{m \in \mathbb{N}} u_{2m,j}(t)\psi_{2m,j}, \\ v(\mathbf{x}, t) &= v_0(t)\psi_0 + \sum_{m \in \mathbb{N}} v_{2m-1}(t)\psi_{2m-1} + \sum_{j=0,1} \sum_{m \in \mathbb{N}} v_{2m,j}(t)\psi_{2m,j} \end{aligned} \quad (1)$$

によるフーリエ係数の力学系について, 自明解における線形化固有値は  $\mu_m = f_u + \lambda_m D_u - f_v g_u / (g_v + \lambda_m D_v)$  ( $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) となる. ある一つの  $n^* \in \mathbb{N}$  について  $|\mu_n| \ll 1$  であり, それ以外の  $m \neq n^*$  について  $\mu_m < 0$  とする. このとき,  $\tau \rightarrow +0$  の下で, 原点の近傍で以下が成り立つ.

**定理 1.** 中心多様体上の力学系は, 以下の縮約方程式が定める力学系と局所位相同値:

- *Odd case* ( $n^* = 2n - 1$ ):

$$\dot{u}_{2n-1} = \mu_{2n-1} u_{2n-1} + A_{2n-1} u_{2n-1}^2 + B_{2n-1} u_{2n-1}^3 + \mathcal{O}(|(\mu_{2n-1}, u_{2n-1})|^4), \quad (2)$$

where  $A_{2n-1} \in \mathbb{R}$ ,  $B_{2n-1} \in \mathbb{R}$ .

- *Even case* ( $n^* = 2n$ ):

$$\begin{cases} \dot{u}_{2n,0} = \mu_{2n} u_{2n,0} + (3A_{2n} u_{2n,0}^2 + 2A_{2n} u_{2n,1}^2) u_{2n,0} + \mathcal{O}(|(\mu_{2n}, u_{2n,0}, u_{2n,1})|^4), \\ \dot{u}_{2n,1} = \mu_{2n} u_{2n,1} + (3A_{2n} u_{2n,0}^2 + B_{2n} u_{2n,1}^2) u_{2n,1} + \mathcal{O}(|(\mu_{2n}, u_{2n,0}, u_{2n,1})|^4), \end{cases} \quad (3)$$

where  $A_{2n} \in \mathbb{R}$ ,  $B_{2n} \in \mathbb{R}$ .

すなわち, 波数の偶奇性に依存して分岐構造の型が異なり, 奇数についてはトランスクリティカル分岐, 偶数についてはピッチフォーク分岐が現れる.

### 3 2-leaves domain

$L_1 = L_2 = L$  に制限する. 詳細は講演時に述べるが, 上と同様の手順で以下の結果が得られる.

**定理 2.** 中心多様体上の力学系は, 以下の縮約方程式が定める力学系と局所位相同値:

- *Odd case* ( $n^* = 2n - 1$ ):

$$\dot{u}_{2n-1} = \mu_{2n-1} u_{2n-1} + C_{2n-1} u_{2n-1}^3 + \mathcal{O}(|(\mu_{2n-1}, u_{2n-1})|^4), \quad (4)$$

where  $C_{2n-1} \in \mathbb{R}$ .

- *Even case* ( $n^* = 2n$ ):

$$\begin{cases} \dot{u}_{2n,0} = \mu_{2n} u_{2n,0} + (2A_{2n} u_{2n,0}^2 + A_{2n} u_{2n,1}^2 + A_{2n} u_{2n,2}^2) u_{2n,0} + \mathcal{O}_4, \\ \dot{u}_{2n,1} = \mu_{2n} u_{2n,1} + (2A_{2n} u_{2n,0}^2 + B_{2n,1} u_{2n,1}^2 + B_{2n,2} u_{2n,2}^2) u_{2n,1} + \mathcal{O}_4, \\ \dot{u}_{2n,2} = \mu_{2n} u_{2n,2} + (2A_{2n} u_{2n,0}^2 + B_{2n,2} u_{2n,1}^2 + B_{2n,1} u_{2n,2}^2) u_{2n,2} + \mathcal{O}_4, \end{cases} \quad (5)$$

where  $A_{2n}, B_{2n,1}, B_{2n,2} \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{O}_4 = \mathcal{O}(|(\mu_{2n}, u_{2n,0}, u_{2n,1}, u_{2n,2})|^4)$ .

すなわち, 全ての波数においてピッチフォーク分岐が 1 次分岐として現れる.

平衡点の分類や数値計算例, また時間周期解の分岐である Wave 分岐については, 講演時に述べる.

### 参考文献

- [1] G. Berkolaiko and P. Kuchment, Introduction to Quantum Graphs, American Mathematical Soc., 2013.

# 空間 1 次元退化放物型方程式における進行波の幾何学的構造

## Geometric structure of the traveling waves for 1D degenerate parabolic equation

本永 翔也 (Shoya Motonaga)<sup>1</sup>, 市田 優 (Yu Ichida)<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 立命館大学 (Ritsumeikan University), <sup>2</sup> 関西学院大学 (Kwansei Gakuin University)

e-mail : motonaga@fc.ritsumeai.ac.jp

### 1 空間 1 次元退化放物型方程式

本報告では、次の空間 1 次元退化放物型方程式の非負進行波の分岐構造について取り上げる：

$$U_t = U^p(U_{xx} + \mu U) - \delta U, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

ここで、 $\mu > 0, p \in \mathbb{R}$  は定数で、 $\delta = 0, 1$  である。方程式 (1) は曲線短縮問題などを背景に持ち、その進行波の振る舞いによって爆発解の爆発レートの導出などが行われている [1, 2, 3, 4]。また、先行研究 [5, 6] においては、元々の爆発レートの導出の問題を離れて、 $0 < p < 1$  と  $p > 1$  の場合について、存在する非負進行波の形状と漸近形式についての分類が、対応する常微分方程式に対するポアンカレ型コンパクト化を通じた無限遠解析によって与えられている。特に、 $0 < p < 1$  の場合と  $p > 1$  の場合では非負進行波の分類が異なるため、非負進行波の分類の変化が  $p = 1$  を境目にして起こることが指摘されている。しかし、 $p = 1$  の場合に関しては、対応する常微分方程式の無限遠点が退化すること、及び無限遠解析のための時間スケール変換との兼ね合いのために進行波の分類が困難であった。本報告では、先行研究とは異なる新たな漸近的アプローチによって得た  $p = 1$  の場合の分類を与える。

### 2 非負進行波の分類

以下では  $p = 1$  とする。主結果を述べる前に本稿で取り上げる解概念 [5, 6] について述べておく。(1) に対して、正の定数  $c > 0$  を用いた進行波座標  $\phi(x - ct) = U(t, x)$  を導入すると、対応する方程式として

$$-c\phi' = \phi(\phi'' + \mu\phi) - \delta\phi, \quad \left( ' = \frac{d}{d\xi}, \quad '' = \frac{d^2}{d\xi^2} \right) \quad (2)$$

を得て、特に  $\phi > 0$  のとき等価的に次式を得る：

$$\phi' = \psi, \quad \psi' = -c\phi^{-1}\psi - \mu\phi + \delta \quad (3)$$

**定義 1** ([5], Definition 2.2)  $\xi_- \in \mathbb{R}$  を定数とする。関数  $\phi^*(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in (-\infty, \xi_-] \\ \phi(\xi), & \xi \in (\xi_-, +\infty) \end{cases}$  が (1)

の特異点を持つ弱進行波であるとは、ある正の定数  $c > 0$  を用いて  $\xi = x - ct$  とするとき関数  $\phi(\xi)$  が (2) の半無限区間上の解であって、ある定数  $C > 0$  が存在して、 $\phi(\xi) \in C^2(\xi_-, +\infty) \cap C^0[\xi_-, +\infty)$  かつ次式を満たすことをいう：

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_- + 0} \phi(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \xi_- + 0} \phi'(\xi) = C.$$

ここでの特異点とは、点  $\xi_-$  において微分不可能であることを意味する。

以下では、 $f(\xi) \sim g(\xi)$  ( $\xi \rightarrow a$ ) とは、 $\lim_{\xi \rightarrow a} \left| \frac{f(\xi)}{g(\xi)} \right| = 1$  を意味するものとする。以下、 $\delta = 0$  の場合を述べる。先行研究と同様の方法によって  $\delta = 1$  の場合の分類も得られることに注意せよ。

**定理 2**  $p = 1, \mu > 0$  及び  $\delta = 0$  とする。このとき、定数  $c > 0$  に対して、式 (1) の特異点を持つ弱進行波の族であって式 (3) において点  $(\phi, \psi) = (0, +\infty)$  と  $(\phi, \psi) = (0, 0)$  を結ぶ軌道の族に対応するものが存在する。また、各解  $\phi(\xi)$  は次を満たす：

- (i1) ある  $\xi_- \in \mathbb{R}$  が存在して、 $\lim_{\xi \rightarrow \xi_- + 0} \phi(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \phi(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \phi'(\xi) = 0$ ,  $\lim_{\xi \rightarrow \xi_- + 0} \phi'(\xi) = +\infty$ .
- (i2)  $\xi \in (\xi_-, +\infty)$  上  $\phi(\xi) > 0$  かつ  $\xi \in (-\infty, \xi_-]$  上  $\phi(\xi) = 0$ .
- (i3) 次式を満たす定数  $\xi_0 \in (\xi_-, +\infty)$  が存在する： $\xi \in (\xi_-, \xi_0)$  上  $\phi'(\xi) > 0$ ,  $\phi'(\xi_0) = 0$  及び  $\xi \in (\xi_0, +\infty)$  上  $\phi'(\xi) < 0$ .

さらに、 $\phi(\xi)$  と  $\phi'(\xi)$  の  $\xi \rightarrow \xi_- + 0$  における漸近挙動は定数  $A > 0$  と  $B \in \mathbb{R}$  を用いて

$$\begin{cases} \phi(\xi) \sim -c(\xi - \xi_-) \log[Ac(\xi - \xi_-)] + B(\xi - \xi_-), \\ \phi'(\xi) \sim -c \log[Ac(\xi - \xi_-)] \end{cases} \quad \text{as } \xi \rightarrow \xi_- + 0, \quad (4)$$

で与えられ、また、 $\xi \rightarrow +\infty$  における  $\phi(\xi)$  と  $\phi'(\xi)$  の漸近挙動は以下で与えられる：

$$\phi(\xi) \sim \left(\frac{\mu}{c}\xi\right)^{-1}, \quad \phi'(\xi) \sim -\left(\frac{\mu}{c}\right)^{-1}\xi^{-2}, \quad \text{as } \xi \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

上の定理において、 $\phi$  は  $p = 1$  としたときの (3) における非双曲型平衡点近傍の挙動に対応しており、また、その主要項だけでなく複数項まで導出している点に注意せよ。これらはいずれも先行研究の方法では得られなかったものである。講演では、先行研究で得られた  $0 < p < 1$  及び  $p > 1$  の場合との非負進行波の分類と比較し、パラメータ  $p$  に応じた非負進行波の分類の変化の詳細について述べる。

**謝辞** 本研究は科研費（課題番号:22KJ2844 及び 22H01138）の助成を受けたものである。

## 参考文献

- [1] K. Anada, T. Ishiwata, Blow-up rates of solutions of initial-boundary value problems for a quasi-linear parabolic equation, *J. Differential Equations*, **262**, 181–271 (2017).
- [2] K. Anada, T. Ishiwata, T. Ushijima, Asymptotic expansions of traveling wave solutions for a quasilinear parabolic equation, *Jpn. J. Ind. Appl. Math*, **39**, 889–920 (2022).
- [3] K. Anada, T. Ishiwata, T. Ushijima, Upper estimates for blow-up solutions of a quasi-linear parabolic equation, *Jpn. J. Ind. Appl. Math*, (2023).
- [4] C.C. Poon, Blowup rate of solutions of a degenerate nonlinear parabolic equation, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **24**, 5317–5336 (2019).
- [5] Y. Ichida, Classification of nonnegative traveling wave solutions for the 1D degenerate parabolic equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B*, **28**, no. 2, 1116–1132 (2023).
- [6] Y. Ichida, T.O. Sakamoto, Classification of nonnegative traveling wave solutions for certain 1D, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **44**, no. 8, pp. 2342 – 2367 (2024).

# 一様グラフ上で定義されたランダムな自然振動数をもつ蔵本モデルのフィードバック制御

## Feedback control of the Kuramoto model with random natural frequencies defined on uniform graphs

キム ドンゴン (Donggeon Kim)<sup>1</sup>, 矢ヶ崎 一幸 (Kazuyuki Yagasaki)<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> 京都大学 (Kyoto University)

e-mail : <sup>1</sup>kim.dg@amp.i.kyoto-u.ac.jp, <sup>2</sup>yagasaki@amp.i.kyoto-u.ac.jp

### 1 蔵本モデルと連続極限

次式で与えられる, 重み付きグラフ  $G_n = \langle V(G_n), E(G_n), W(G_n) \rangle$  上で定義された蔵本モデル [1] に対するフィードバック制御を考える:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_i^n(t) = & \omega_i^n + \frac{K}{n\alpha_n} \sum_{j=1}^n w_{ij}^n \sin(u_j^n(t) - u_i^n(t)) \\ & + b_1 \sin(V(t) - u_i^n(t)) + b_0, \quad i \in [n] := \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (1)$$

ここで,  $n$  は節点数,  $u_i^n(t) \in \mathbb{S}^1$  と  $\omega_i^n \in \mathbb{R}$  は, それぞれ, 節点  $i$  における振動子の位相とランダムな自然振動数を表し, 全振動子が同じ振動数  $V_1 > 0$  で同期するように目標軌道は  $V(t) = V_1 t + V_0$  ( $V_1, V_0$  は定数) とする. また,  $K$  と  $\alpha_n$  は, それぞれ, 結合係数とスケール因子,  $b_1$  と  $b_0$  は, それぞれ, フィードバック・ゲインと定常入力である.

一方,  $V(G_n) = [n]$  と  $E(G_n)$  は, それぞれ, 節点集合と枝集合,  $W(G_n)$  は重み行列で,  $(i, j) \in E(G_n)$  のとき  $(W(G_n))_{ij} = w_{ij}^n$ , それ以外は  $(W(G_n))_{ij} = 0$  とする. グラフ  $G_n$  は  $\lim_{n \rightarrow \infty} \#E(G_n)/(\#V(G_n))^2 > 0$  のとき稠密, 0 のときスパースであり, 稠密な場合  $\gamma = 0$ , スパースな場合  $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$  として  $\alpha_n = n^{-\gamma}$  とおく. 以下では,  $G_n$  は一様,  $W(G_n)$  は対称で,  $p \in (0, 1]$  を定数として, 確定稠密な場合は  $w_{ij}^n = p$ , 確率稠密な場合は確率  $\mathbb{P}((i, j) \in E(G_n)) = p$  で, 確率スパースな場合は確率  $\mathbb{P}((i, j) \in E(G_n)) = \alpha_n \min(\alpha_n^{-1}, p)$  で  $w_{ij}^n = 1$ , それ以外は  $w_{ij}^n = 0$  とする.

文献 [2] の結果より,  $I = [0, 1]$  として関係式

$$\omega_i^n = n \int_{I_i^n} \omega(x) dx, \quad I_i^n = \begin{cases} [(i-1)/n, i/n] & \text{for } i < n; \\ [(n-1)/n, 1] & \text{for } i = n, \end{cases} \quad i \in [n]$$

が成立するとき, 蔵本モデル (1) は次の連続極限により近似できる.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \omega(x) + pK \int_I \sin(u(t, y) - u(t, x)) dy + b_1 \sin(V(t) - u(t, x)) + b_0 \quad (2)$$

### 2 主結果

$\omega_i^n, i \in [n]$  を  $[-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a]$  上で確率分布  $F(\omega)$  ( $F'(\omega) > 0$ ) に従う独立同分布の確率変数,  $\xi_n : [n] \rightarrow [n]$  を  $\omega_{\xi_n(1)}^n < \dots < \omega_{\xi_n(n)}^n$  a.s. を満たすランダム順列とする. また,  $T_{\xi_n} : \mathbb{T}^n = \prod_{i=1}^n \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{T}^n$  は  $T_{\xi_n}(u_1^n(t), \dots, u_n^n(t)) = (u_{\xi_n(1)}^n(t), \dots, u_{\xi_n(n)}^n(t))$  により定義されるランダム作用素とする. 文献 [3] の結果を用いることにより, 次の定理を得る.

**定理 1**  $\omega(x) = F^{-1}(x)$  とし,  $\bar{u}(t)$  は連続極限 (2) の解とする. このとき, 次が成り立つ.

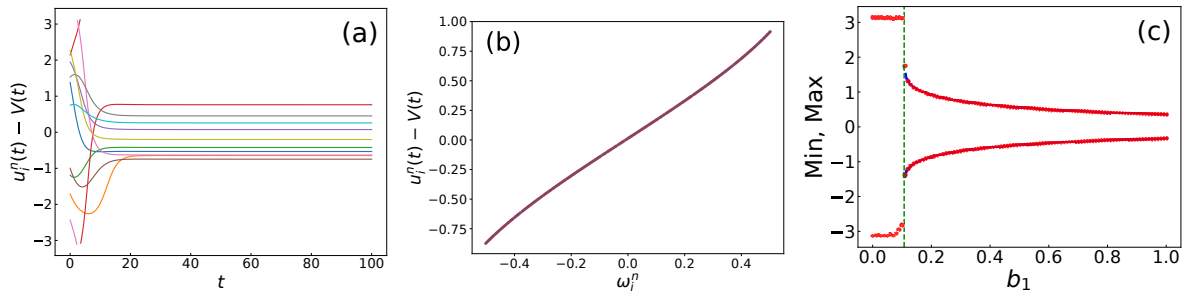


図 1: 完全単純グラフ上の蔵本モデル (1) に対する数値シミュレーション結果 ( $n = 1000$ ,  $a = 1$ ,  $p = 1$ ,  $K = 0.5$ ,  $b_1 = 0.2$ ): (a) 時刻歴応答; (b) 定常応答の目標軌道からの偏差 ( $t = 100$ ); (c) フィードバックゲイン  $b_1$  と定常応答の関係。

- (i)  $\mathbf{u}_n(t)$  が初期条件  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_{\xi_n} \mathbf{u}_n(0) - \mathbf{u}(0)\| = 0$  a.s. を満たす蔵本モデル (1) の解ならば,  $\forall \tau > 0$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, \tau]} \|T_{\xi_n} \mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}(t)\| = 0$  a.s. となる.
- (ii)  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  が安定ならば,  $\forall \epsilon, \tau > 0$  に対して  $\delta > 0$  が存在し,  $n > 0$  が十分大きいとき  $\|T_{\xi_n} \mathbf{u}_n(0) - \bar{\mathbf{u}}(0)\| < \delta$  a.s. なる式 (1) の任意の解  $\mathbf{u}_n(t)$  は  $\max_{t \in [0, \tau]} \|T_{\xi_n} \mathbf{u}_n(t) - \bar{\mathbf{u}}(t)\| < \epsilon$  a.s. を満たす. さらに,  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  が漸近安定ならば,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_{\xi_n} \mathbf{u}_n(t) - \bar{\mathbf{u}}(t)\| = 0$  a.s. となる.
- (iii)  $\bar{\mathbf{u}}(t)$  が不安定ならば,  $\forall \epsilon, \delta > 0$  に対して  $\tau > 0$  が存在し,  $n > 0$  が十分大きいとき式 (1) のある解  $\mathbf{u}_n(t)$  は  $\|T_{\xi_n} \mathbf{u}_n(0) - \bar{\mathbf{u}}(0)\| < \delta$  a.s. かつ  $\|T_{\xi_n} \mathbf{u}_n(\tau) - \bar{\mathbf{u}}(\tau)\| > \epsilon$  a.s. を満たす.

定理 1 により, 連続極限 (2) の漸近安定な解は, 適切なランダム順列の下で, ランダムな自然振動数をもつ蔵本モデル (1) において漸近安定解のように振る舞う.

### 3 数値シミュレーション

目標軌道のパラメータ  $V_1, V_0 = 1$  の場合の蔵本モデル (1) に対して数値シミュレーションを行った. 図 1 に完全単純グラフに対する結果を与える. 図 (a) は時刻歴応答であり, 速やかに同期状態に到達している. 図 (b) は定常応答と連続極限 (2) の文献 [4] で求められた特解の目標軌道からの偏差がプロットされ, 両者は完全に一致している. 図 (c) は  $b_1$  を変化させた場合の定常応答の目標軌道からの偏差の最大値と最小値であり, 臨界値  $b_1 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\pi pK$  を超えると, 漸近安定な同期解が発生し,  $b_1 \rightarrow \infty$  のとき目標軌道に近づく様子が現れている.

### 参考文献

- [1] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer, Berlin, 1984.
- [2] R. Ihara and K. Yagasaki, Continuum limits of coupled oscillator networks depending on multiple sparse graphs, *J. Nonlinear Sci.*, **33** (2023), 62.
- [3] K. Yagasaki, Continuum limit of the Kuramoto model with random frequencies on uniform graphs, *Phys. D*, to appear.
- [4] K. Yagasaki, Feedback control of the Kuramoto model defined on uniform graphs I: Deterministic natural frequencies, submitted for publication. [arXiv:2505.02196]