

微分包含式による力学系的性質の表現について

Characterizing dynamical properties by differential inclusions

須田 智晴 (Tomoharu Suda)¹

¹ 東京理科大学 (Tokyo University of Science)

e-mail : tomoharu.suda@rs.tus.ac.jp

1 概要

与えられたベクトル場について、その力学系的性質を調べることは基本的な問題である。ある力学系的な性質の有無は、それに対応した集合値関数への埋め込み可能性として表現することができる場合がある。埋め込み先の集合値関数が定める微分包含式は、その力学系的性質を持ったダイナミクスとして最も一般的なものと解釈することができる。また埋め込み可能性を用いることで、ベクトル場が区分的に連続な場合や、時間発展に一意性がない場合にも概念を一般化できる。本講演では、このような定式化を用い、Lyapunov 関数に関する古典的な結果の一般化について述べる。

2 準備

集合 X, Y に対し、 $F : X \rightarrow 2^Y$ という形の写像を**集合値写像**といい、 $F : X \rightrightarrows Y$ と書く。常微分方程式 $\dot{x} = f(x)$ において、右辺を集合値関数に置き換えて一般化したものを微分包含式という。

定義 1 領域 $D \subset \mathbb{R}^n$ で定義された集合値関数 $F : D \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ に対し、絶対連続関数 $\phi : [0, \infty) \rightarrow D$ が D 上の**微分包含式**

$$\dot{x} \in F(x)$$

の**解**であるとは、 $\dot{\phi}(t) \in F(\phi(t))$ がほとんど至る所で成り立つことである。

もちろん、微分包含式の初期値問題の解は一意でない方が普通である。しかし、このような系についてもそれが定める「力学系」を考察することができる。特に重要なのは、 ω -極限集合の概念である。

定義 2 位相空間 X への連続写像 $\phi : [0, \infty) \rightarrow X$ に対し、その ω -**極限集合**を次で定義する。

$$\omega(\phi) := \{y : \text{増大列 } t_n \rightarrow \infty \text{ で } \phi(t_n) \rightarrow y \text{ となるものが存在}\}.$$

以下では集合値解析の概念を用いる。定義・記号については文献 [1] に準じる。

3 微分方程式の埋め込みによる性質の表現

常微分方程式 $\dot{x} = f(x)$ の性質を調べるため、これを微分包含式に埋め込むという技法が使われることがある。特筆すべき例として、これは化学反応ネットワーク理論における Global Attractor Conjecture の解決に用いられている [2]。この発想を一般的な形で述べると、次のようになる。

定義 3 集合値関数 $F_P : D \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ が D 上で C^r 級ベクトル場の性質 P を表すとは、各 C^r 級ベクトル場 $f(x)$ に対して以下が同値となることである：

- 1) 性質 P が $f(x)$ について成立。
- 2) $f(x)$ は $F_P(x)$ の selection, すなわち任意の $x \in D$ について $f(x) \in F_P(x)$ が成り立つ。

例 4 次で定義される集合値関数は、 \mathbb{R} 上の C^0 ベクトル場について「任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し

$\omega(x) = \{0\}$ 」という性質を表す.

$$G(x) := \begin{cases} (-\infty, 0) & x > 0 \\ \{0\} & x = 0 \\ (0, \infty) & x < 0 \end{cases}$$

したがって、絶対連続関数 $\phi : [0, \infty) \rightarrow D$ が微分包含式 $\dot{x} \in F_P(x)$ の解になるということをもって、性質 P を一般化できる.

4 Lyapunov 関数への応用

ベクトル場の定める力学系の解析において、Lyapunov 関数は強力な道具となる. その定義において最も基本的な性質が、「解に沿って単調に減少する」というものである. これを集合値写像の言葉で定式化し、より一般の力学系に適用できるようにしたい.

定義 5 局所 Lipschitz 関数 $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、 \mathbb{R}^n 上の集合値写像 F_V を

$$F_V(x) := \{u : V^\circ(x; u) \leq 0\},$$

により定義する. ただし、 $V^\circ(x; u)$ は x における u 方向の Clarke generalized derivative である.

関数 V が良い性質 (例えば可微分性) を持つとき、このように定義される F_V は C^0 ベクトル場について「 V が解に沿って非増加」という性質を表す.

定理 6 正則な局所 Lipschitz 関数 $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ と連続写像 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対し、以下は同値.

- 1) V は $\dot{x} = f(x)$ の解に沿って非増加.
- 2) f は F_V の selection.

関数 V が放射状に非有界であるとき、La Salle の不変原理の一般化が $\dot{x} \in F_V(x)$ の任意の解について成り立つ. すなわち、

定理 7 局所 Lipschitz 関数 $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ について、 $V(x) \rightarrow \infty$ ($\|x\| \rightarrow \infty$) が成り立つものとする. このとき、 $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ が微分包含式 $\dot{x} \in F_V(x)$ の解であれば、ある定数 c が存在し、 $\omega(\phi)$ は $\{x : V(x) = c\}$ の空でないコンパクト部分集合である.

この結果は、常微分方程式の公理的理論の結果を用いるとさらに改良できる [3].

謝辞 本研究は JSPS 科研費 (23K19021) の助成を受けた.

参考文献

- [1] Clarke, F. H., Ledyaev, Y. S., Stern, R. J., and Wolenski, R. R, Nonsmooth analysis and control theory, Springer, (1998).
- [2] Gheorghe Craciun, Toric differential inclusions and a proof of the global attractor conjecture, arXiv:1501.02860 (2015).
- [3] Tomoharu Suda, Dynamical properties in the axiomatic theory of ordinary differential equations, Journal of Differential Equations 391 (2024) 1-24.
- [4] Tomoharu Suda, Embedding of ordinary differential equations and its application to generalized La Salle's invariance principle, in preparation.

マイクロマシンにおけるプルインとタッチダウン現象の数理解析

Mathematical analysis of pull-in and touchdown phenomena in micro-machines

市田 優 (Yu ICHIDA)¹, 山根 大輔 (Daisuke YAMANE)²,

¹ 関西学院大学 (Kwansei Gakuin University), ² 立命館大学 (Ritsumeikan University)

e-mail : ichidayu@kwansei.ac.jp

1 はじめに

現代の高度デジタル社会の根幹をなす小型で高性能なデバイス（マイクロマシン）における電気的かつ機械的要素が組み込まれた MEMS（メムス, Micro-Electro Mechanical Systems, 微小電気機械システム）は情報通信機器のセンサ, バイオ, 医療分野に応用されている。

本講演では, MEMS の微細構造を最もシンプルに表現している平行平板静電アクチュエータ（バネマスモデル）に着目する. 2 枚の平行に設置された静電駆動する平板の動きを表し, 図 1 に概略図を示す. $x = x(t)$ を 2 枚の静電駆動する平板の距離を表す関数, g を 2 枚の平板の初期ギャップとして $0 \leq x(t) \leq g$ とする. 初期条件 $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ とし, 運動方程式からモデル方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + bx^3 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{(g-x)^2} V^2, \quad (1)$$

である. 以下, $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ とする. m は質量, c は速度, k はばね定数, ε_0 は誘電率, S はプレートの面積, g は初期ギャップである. これらはすべて正の定数である. 本講演では, 電圧 $V(t) \equiv V$ は定数電圧を仮定し, 正の定数とする. $b \in \mathbb{R}$ をばね特性を表現するパラメータとして, $b > 0$ の場合が hard spring, $b = 0$ の場合が linear spring, $b < 0$ の場合が soft spring である.

$b = 0$ の場合の特徴的な挙動として, プルイン, タッチダウン, 1/3 ルールが MEMS の分野では有名である. プルイン電圧とは静電引力がばね復元力より大きくなる境界の電圧のことである. このとき, 初期ギャップ g に対して, $x = g/3$ でプルインがおきるという 1/3 ルールがある. 静電引力がばね復元力より大きくなってしまうと, 2 枚の平板は瞬時に接触してしまい, これをタッチダウン現象と呼ぶ. MEMS 開発において, 材料特性を変えることにより実験的に 1/3 ルールの改良, タッチダウン時のスピードを理解しようとする研究がなされており, 数学の立場として理論的に 3 つの特徴的な挙動の数理解析を理解することは実装やその先の技術革新といった新たなブレークスルーをもたらすことが期待できる. そこで, 本講演では, 次の 2 つを明らかにすることを目指す:

(i) $b = 0$, 定数電圧下での (1) の解挙動の分類, 3 つの特徴的な性質（プルイン, タッチダウン,

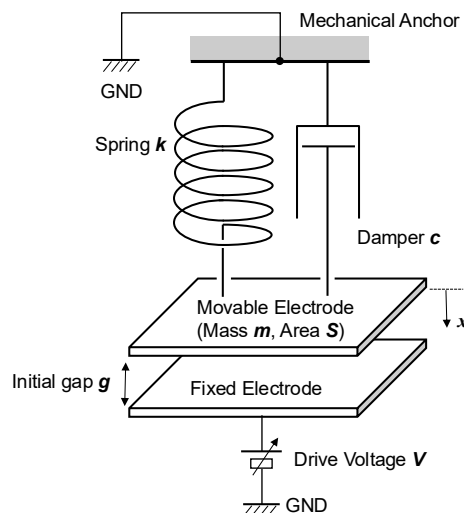


図 1. 平行平板静電アクチュエータの概略図.

1/3 ルール) の数理解造 (退化性や分岐点に由来するプルインや 1/3 ルール, 有限時間特異性に由来するタッチダウン) の解明,

(ii) ばね特性の考慮 ($b > 0$ 及び $b < 0$) による 3 つの特徴的挙動にまつわる数理解造の変化.

2 主結果

以下, 記号 $f(\xi) \sim g(\xi)$ as $\xi \rightarrow a$ は $\lim_{\xi \rightarrow a} |f(\xi)/g(\xi)| = 1$ である.

定理 1 ([1]) $c, m, k, g, \varepsilon_0, S, V, g$ を正の定数, $b = 0$ とする. (1) において初期条件 $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ を課したとき, $K = (2m)^{-1}\varepsilon_0 S V^2 - (27m)^{-1}4kg^3$ の値によって次の 3 つに分類される:

(i) $K > 0$ のとき, ある定数 $t_+ \in (0, +\infty)$ が存在して, 解 $x(t)$ は $t \rightarrow t_+ - 0$ で $x(t) \rightarrow g$, $\dot{x}(t) \rightarrow +\infty$ (タッチダウン) となる. このときの漸近挙動は

$$x(t) \sim g - A(t_+ - t)^{\frac{2}{3}} \quad \text{as } t \rightarrow t_+ - 0. \quad (2)$$

(ii) $K = 0$ のとき, 解 $x(t)$ は $t \rightarrow +\infty$ で $x(t) \rightarrow g/3$, $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ (プルイン).

(iii) $K < 0$ のとき, 解 $x(t)$ は $t \rightarrow +\infty$ で $x(t) \rightarrow M$ ($0 < M < g/3$), $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ となる.

定理 2 ([1]) $0 \neq b \in \mathbb{R}$, $c, m, k, g, \varepsilon_0, S, V, g$ を正の定数とする. 方程式 $5b\phi^3 - 12bg\phi^2 + 3(k + 3bg^2)\phi - 2(kg + bg^3) = 0$ は $0 < \phi < g$ でただ 1 つ実数解 $\phi = \varphi^*$ を持つ. そして,

$$F(\varphi^*) = b(\varphi^*)^5 - 3bg(\varphi^*)^4 + (k + 3bg^2)(\varphi^*)^3 - (kg + bg^3)(\varphi^*)^2 + 2^{-1}\varepsilon_0 S V^2$$

の値によって, 次のような 3 つの挙動に分類される.

(i) $F(\varphi^*) > 0$ のとき, Theorem 1 (i) のようにタッチダウンする.

(ii) $F(\varphi^*) = 0$ のとき, 解 $x(t)$ は $t \rightarrow +\infty$ で $x(t) \rightarrow x^* \in (0, g)$, $\dot{x} \rightarrow 0$ (プルイン) となる. ただし, $x^* = g - \varphi^*$ である. $b > 0$ のとき $g/3 < x^* < 17g/27$, $b < 0$ のとき $0 < x^* < g/3$ である. 特に, $b = -k/g^2$ のとき, $x^* = (\sqrt{6} - 1)g/5$ である.

(iii) $F(\varphi^*) < 0$ のとき, 解 $x(t)$ は $t \rightarrow +\infty$ で $x(t) \rightarrow M$, $\dot{x}(t) \rightarrow 0$ となる. ただし, M の評価については $b > 0$ のとき $0 < M < 10g/27$, $b < 0$ のとき $0 < M < g/3$ である.

$b = 0$ の場合の (1) の挙動が 3 つに分類されること, そしてタッチダウン時のスピードに対応する漸近挙動, $b > 0$ の場合に 1/3 ルールが改善されること, $b < 0$ の場合に 1/3 ルールが悪くなること, タッチダウンのスピードや時刻 t_+ は b に依存しないことが明らかとなった. これらの事実は機械工学において実験的に知られていない事実であり, 共同研究者のもとでデモ機での検証の段階に進んでいる. これらの事実は適切な変換により 2 次元 ODEs を導出し, その 0 固有値を持つ有限平衡点近傍の力学系を調べることでプルインを, 無限遠での振り舞いをポアンカレ型コンパクト化 (例えば, [2] やその参考文献) により調べることでタッチダウン現象を観測することができる. モデルの詳細, 主結果の詳細とその証明の概略については講演時に述べる.

参考文献

- [1] Y. Ichida, D. Yamane, in preparation.
- [2] F. Dumortier, J. Llibre, C.J. Artés, Qualitative Theory of Planar Differential Systems, Springer (2006).

遺伝子重複における機能分担の不安定化と機能喪失の力学系的定式化

Dynamical Systems Formulation of Subfunctionalization Instability and Function Loss in Gene Duplication

近藤 淳史 (Atsushi Kondo)¹

¹ 京都大学 (Kyoto University)

e-mail : kondo.atsushi.85a@st.kyoto-u.ac.jp

1 イントロダクション

細胞の機能的状態は、遺伝子間の調節関係によって実現されており、この調節関係は遺伝子調節ネットワーク (GRN) として表現される。GRN のダイナミクスのアトラクターが、細胞の機能状態に対応すると考えられている。

進化の過程では、細胞分裂時のコピーミスなどにより一遺伝子が二つに増える遺伝子重複が生じうる。重複遺伝子は偽遺伝子化や新機能獲得など多様な運命をたどるが、両遺伝子がゲノム中に残り互いに補い合い、重複前に果たしていた機能が保持される場合がある。これを機能分担という。

機能分担は Aguiar らにより、重複後の GRN における同期現象、すなわち「ネットワークのリフト」として数学的に定式化された [1]。しかし、この同期状態が、進化の過程で生じるパラメータ変動に対して動的に安定であるかは未検証であった。

この問いに対し、本研究では分岐理論を用いて同期平衡点の安定性を解析し、機能が不安定化する条件と、その際の破綻様式 (超臨界・亜臨界ピッチフォーク分岐) を決定する条件式を導出し、また、分岐が起こらないための GRN 構造に関する十分条件を得た。これらを通じ、機能保持の頑健性と機能が喪失する様式の数理的基礎を築き、遺伝子重複による進化メカニズムの考察に力学系の観点から貢献することを目指す。

2 モデル設定

本研究では、Aguiar らが用いた SUM モデルを参考に、 N 個の遺伝子からなる遺伝子調節ネットワーク (GRN) を以下の常微分方程式系で記述する。

$$\dot{x}_i = ax_i + b + \sum_{j=0}^{N-1} \{L_{i,j}g(x_j) + M_{i,j}h(x_j)\}, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

ここで、 $x_i \in \mathbb{R}$ は遺伝子 i の発現量、 $a < 0$ は自己分解率、 $b > 0$ は基礎生産率を表す。生物学的な機能に対応するものとして、重複前の N 遺伝子系が漸近安定な平衡点 $s = (s_0, \dots, s_{N-1})$ を持つことを仮定する。また、一つの遺伝子 ($N-1$) が二つ ($N-1, N$) に重複する状況を考える。遺伝子重複に関して解析を単純化するため、重複する遺伝子 (遺伝子 $N-1$) が持つ自己調節は、促進型か抑制型のどちらか一方のみであると仮定する。この自己調節の相互作用をヒル関数 $h(x)$ で、もう一方の型のヒル関数を $g(x)$ で表す。 $L_{i,j}$ と $M_{i,j}$ は、それぞれこれらの調節の強さを表す結合重みである。

遺伝子重複と機能分担をモデル化するため、Aguiar らが GRN の文脈で整理した結合セルネットワーク理論における「ネットワークのリフト」という枠組みを用いる [1]。Aguiar らの枠組みにおいて、機能分担は、重複後の $N-1, N$ からの調節の重みの和は重複前の重みに等し

く $(M_{i,N-1}^{\text{post}} + M_{i,N}^{\text{post}} = M_{i,N-1}^{\text{pre}}, L_{i,N-1}^{\text{post}} + L_{i,N}^{\text{post}} = L_{i,N-1}^{\text{pre}})$, 他からの調節の重みは保持され $(M_{N-1,i}^{\text{post}} = M_{N,i}^{\text{post}} = M_{N-1,i}^{\text{pre}}, L_{N-1,i}^{\text{post}} = L_{N,i}^{\text{post}} = L_{N-1,i}^{\text{pre}})$, その他の遺伝子間の調節重みも保持されるという形で表現される. これにより重複前の力学系は重複後の力学系の同期空間 $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^{N+1} | x_{N-1} = x_N\}$ に埋め込まれ, 重複した遺伝子の分担により重複前に持っていた機能を保持できている状態を数学的に表すことができる. これらにより, 重複後の系は Δ 内に平衡点 $\tilde{s} := (s_0, \dots, s_{N-1}, s_{N-1})$ を持つ. 簡単のため, 本研究では**重複後の系が対称性を持つこと** ($M_{i,N-1}^{\text{post}} = M_{i,N}^{\text{post}} = \frac{1}{2}M_{i,N-1}^{\text{pre}}, L_{i,N-1}^{\text{post}} = L_{i,N}^{\text{post}} = \frac{1}{2}L_{i,N-1}^{\text{pre}}, p := M_{N-1,N}^{\text{post}} = M_{N,N-1}^{\text{post}}$) を仮定する. 本研究の目的は \tilde{s} の安定性をパラメータ p を変化させて調べることである.

3 結果

「モデルと手法」で設定したモデルに対し, 同期平衡点 \tilde{s} の安定性を分岐理論を用いて解析した. この平衡点の安定性は $\mu := a + (M_{N-1,N-1}^{\text{pre}} - 2p)h'(s_{N-1})$ の符号によって決まる. また, 遺伝子重複後の機能の運命を予測する, 主要な二つの条件式を導出した.

- 1) **分岐の発生可能性 (条件 A)**: \tilde{s} が不安定化するかどうかは, パラメータ μ のとりうる値の最大値 $\mu_{\max} := \max \left\{ a + M_{N-1,N-1}^{\text{pre}} h'(s_{N-1}), a - M_{N-1,N-1}^{\text{pre}} h'(s_{N-1}) \right\}$ の符号により決まる. $\mu_{\max} < 0$ の場合, \tilde{s} は p にらず常に安定だが, $\mu_{\max} > 0$ の場合は不安定化する.
- 2) **機能の破綻様式 (条件 B)**: 不安定化する場合, 系の対称性からピッチフォーク分岐が起きる. 型 (超臨界・亜臨界) は中心多様体上の方程式の 3 次係数 E の符号により決定される:

- $E < 0$ の場合: **超臨界分岐**が生じ, 元の機能はそれに近い新たな安定状態へと滑らかに移行する. 「穏やかな機能変化」と解釈できる.
- $E > 0$ の場合: **亜臨界分岐**が生じ, 元の機能は突然消滅する. 「機能喪失」と解釈できる.

さらに本研究では, この分岐が生じないための GRN 構造に関する十分条件を GRN 構造を反映した符号行列を用いて導出した. 図 1 に示した 3 遺伝子からなる強連結成分の例は, その十分条件を満たす GRN 構造の一つであり, 遺伝子 2 が重複しても分岐は生じない. これらにより, 特定の GRN における機能の頑健性を, 理論的に, あるいは数値計算によって評価できる.

4 考察と今後の課題

本研究では, 遺伝子重複後の機能分担の安定性を評価する二つの条件式 (条件 A, B) を導出し, 機能の頑健性と破綻様式を分類する数理的枠組みを構築した. また結果の節で例示したように, GRN の構造自体が遺伝子重複後の機能の頑健性を左右しうることを明らかにした. しかし, 分岐の型 (超臨界・亜臨界) が GRN の構造やパラメータとどのように結びついているのかを一般的に明らかにできていない. 分岐の破綻様式を予測可能にすることは, 本研究における最も重要な今後の課題である.

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP24KJ1492 の助成を受けたものである

参考文献

- [1] Aguiar, M. A. D., Dias, A. P. S. and Ruan, H., Synchrony patterns in gene regulatory networks, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 429 (2022), 133065.

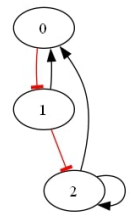


図 1. 3 遺伝子からなる強連結成分の一例. 黒矢印は活性化, 赤 T 字線は抑制を表す.

Koopman 作用素の一般化固有関数による力学系の大域的線形化

Global Linearization of Dynamical Systems by Generalized Eigenfunctions of the Koopman Operator

矢ヶ崎 一幸 (Kazuyuki Yagasaki)
 京都大学 (Kyoto University)
 e-mail : yagasaki@amp.i.kyoto-u.ac.jp

1 はじめに

次の一般的な力学系を考える .

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

ここで, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は C^r 級 ($r \geq 2$) である . $\phi^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を式 (1) の流れ, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を単連結領域とする . Koopman 作用素 $\mathcal{K}_t: C^0(\Omega, \mathbb{C}) \rightarrow C^0(\Omega, \mathbb{C})$ を

$$\mathcal{K}_t g = g \circ \phi^t, \quad t \in \mathbb{R},$$

により定義する . \mathcal{K}_t の無限小生成作用素

$$\mathcal{L}g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{K}_t g - g}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g \circ \phi^t - g}{t}$$

を Lie 作用素という . 関数 $g \in C^0(\Omega, \mathbb{C})$ に対して, $\mathcal{L}g(x)$ が存在するならば

$$\mathcal{L}g(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\phi^t(x)) - g(\phi^0(x))}{t} = \left. \frac{d}{dt} g(\phi^t(x)) \right|_{t=0}$$

が成り立ち, $g(x)$ が微分可能ならば $\mathcal{L}g(x) = Dg(x)f(x)$ が成り立つ .

Koopman 作用素 \mathcal{K}_t と Lie 作用素 \mathcal{L} の固有値問題を考える .

$$\mathcal{K}_t \varphi(x) = \mu_t \varphi(x), \quad \mathcal{L} \psi(x) = \nu \psi(x)$$

ここで, μ_t と ν および $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ は, それぞれ, \mathcal{K}_t と \mathcal{L} の固有値および固有関数である .

命題 1 (i) μ_t が $t = 0$ で微分可能ならば, $\varphi(x)$ は固有値 $\nu = \dot{\mu}_0$ に対する \mathcal{L} の固有関数である .

(ii) $\psi(x)$ が階数 ℓ の一般化固有関数ならば, 固有値 $\mu_t = e^{\nu t}$ に対する \mathcal{K}_t の階数 ℓ の一般化固有関数でもある .

2 主定理

主定理を述べる . これにより, Ω が一つの平衡点のみを不変集合として含む場合や不変集合をまったく含まない場合に対して, 式 (1) の線形化や Bogoyavlenskij 可積分性に関するさまざまな結果が得られる . 特に, 不変集合を含まない適当な Ω に対して, $f(x)$ が C^r 級 ($r \geq 2$) および解析的な場合, それぞれ, 式 (1) が C^{r-1} 級および解析的 $(n, 0)$ 可積分となる . 詳細は文献 [1] を参照せよ . ここで, q 個の可換ベクトル場と $n - q$ 個の第 1 積分をもつとき, 式 (1) は $(q, n - q)$ 可積分という .

定理 2 単連結領域 Ω において, ある $m \in [n] := \{1, 2, \dots, n\}$ に対して, ν_k ($k \in [m]$) を \mathcal{L} の重複度 n_k の固有値, $\tilde{\psi}_k(x)$ を階数 n_k の固有関数とし, $\sum_{k=1}^m n_k = n$ とする . $\bar{n}_1 = 0$, $\bar{n}_{k+1} = \sum_{j=1}^k n_j$ ($k \in [m]$) により有限列 $\{\bar{n}_k\}_{k=1}^m$ を定め, 各 $k \in [m]$ に対して

$$\psi_{\bar{n}_k+j}(x) = (\mathcal{L} - \nu_k)^{j-1} \tilde{\psi}_k(x), \quad j \in [n_k - 1],$$

とおき, 第 j 成分が $\psi_j(x)$ ($j \in [n_k]$) である Ω から \mathbb{R}^n への写像を $\Psi(x)$ と表す. このとき, $\Psi(x)$ が Ω から $\Psi(\Omega)$ への同相写像ならば, 座標変換 $\xi = \Psi(x)$ によって式 (1) は次の線形系に変換される.

$$\dot{\xi} = J\xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n, \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_m \end{pmatrix}, \quad J_k = \begin{pmatrix} \nu_k & & O \\ 1 & \ddots & \\ O & \ddots & \nu_k \\ & & 1 & \nu_k \end{pmatrix}, \quad k \in [m] \quad (2)$$

ここで, 各 $k \in [m]$ に対して J_k は n_k 次正方行列である.

3 例

定数 $\delta > 0$ として, 次の Duffing 系を考える.

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_1^3 - \delta x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

命題 3 式 (3) は \mathbb{R}^2 において C^1 級座標変換により係数行列が

$$J = \text{diag} \left(\frac{1}{2}(-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4}), \frac{1}{2}(-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4}) \right)$$

である線形系 (2) に変換される. さらに,

$$\delta^2 \neq \frac{(q+1)^2}{q}, \quad \forall q \in \{z \in \mathbb{Q} \mid z \geq 1\}, \quad (4)$$

ならば, 座標変換は解析的で, 式 (3) は \mathbb{R}^2 上で解析的 (2, 0) 可積分となる.

注意 4 文献 [2] の結果により, 式 (3) は, $\delta = 0$ の近傍で δ に解析的に依存した第 1 積分や可換ベクトル場が存在して, \mathbb{R}^2 において解析的可積分とはならない. これは命題 3 と矛盾しない. 実際, $\delta = 0$ のとき式 (3) は解析的 (1, 1) 可積分ではあるが, 解析的 (2, 0) 可積分ではない.

定数 $\delta > 0$ として, 次の van der Pol 系を考える.

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \delta(1 - x_1^2)x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (5)$$

平衡点 $x = 0$ を囲む安定周期軌道が存在する.

命題 5 上の安定周期軌道で囲まれた領域 Ω において, 式 (5) は C^1 級座標変換により係数行列が

$$J = \text{diag} \left(\frac{1}{2}(\delta + \sqrt{\delta^2 - 4}), \frac{1}{2}(\delta - \sqrt{\delta^2 - 4}) \right)$$

である線形系 (2) に変換される. さらに, 条件 (4) が成り立つならば, 座標変換は解析的で, 式 (5) は Ω において解析的 (2, 0) 可積分となる.

注意 6 $\delta = 0$ のとき, 式 (5) はまた \mathbb{R}^2 において解析的 (2, 0) 可積分である. よって, 命題 5 とから, 式 (5) は $\delta = 0$ の近傍で δ に解析的に依存した可換ベクトル場が存在して, Ω において解析的 (2, 0) 可積分となる (cf. 注意 4).

謝辞 本研究は科研費 (課題番号: JP23K22409) の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] K. Yagasaki, Global linearization of dynamical systems by generalized eigenfunctions of the Koopman operators I: Ordinary differential equations, in preparation.
- [2] S. Motonaga, *Phys. D*, **460** (2024), 134088.