

Primitive Chaos の認識論への応用

Application of Primitive Chaos to Epistemology

小笠原 義仁 (Yoshihito Ogasawara)^{1,2}

¹ 芝浦工業大学 (Shibaura Institute of Technology), ² 三芳合金工業株式会社 (Miyoshi Gokin Kogyo Co., Ltd.)

e-mail : yoshihito.ogasawara@yamatogokin.com

1 概要

自然科学は、世界をアプリオリに存在するものとして取り扱い、それを説明・解明して、予想できるものとするべく発展してきた。また工学は、それを制御するべく発展してきた。そこには、世界が我々の目を通して、ものの見方を通して立ち現れるものであるという視点の欠落があるのだが、科学技術は客観性の名のもとにこの視点を隠蔽してきた。一方で、そのような視点で世界を記述することは、哲学（特に認識論）を中心に語られてきたが、それは主に日常言語によるものであり、科学技術のように数学を言語として語られることは、ほとんどなかった。本研究はそのような視点を、数学を言語として記述することを目指すものであり、特にトポロジーを用いた認識論の議論を目的とする [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

実際トポロジーは、位相を変えることにより連続を不連続に、連結を不連結になど、ものの見方を（錯視のような直観によってではなく）論理的に変更することを可能にする言語である。この特徴を持つトポロジーを、単に形態の概念を記述するためだけの言語としてではなく、我々の「ものの見方」そのものを記述する言語（すなわち形態の概念を記述する言語としてだけではなく、概念の形態「概念の概念」を記述する言語）として利用する。

2 Primitive Chaos の応用

具体的には、世界のモデルとして Primitive Chaos と呼ばれる概念を使用する [6, 7, 9, 10, 11, 12, 13].

定義 1 集合 X , X の部分集合族 $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, 写像族 $\{f_{X_\lambda} : X_\lambda \rightarrow X, \lambda \in \Lambda\}$ が次の性質 (P) を満たす時, $(X, \{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}, \{f_{X_\lambda} : X_\lambda \rightarrow X, \lambda \in \Lambda\})$ を Primitive Chaos と呼ぶ.

$$(P) \begin{cases} \{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\} \text{ の要素からなる任意の記号列} \\ \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots \text{ に対して, ある初期値 } x_0 \\ \text{が存在して } x_0 \in \omega_0, x_1 \in f_{\omega_0}(x_0), \\ x_2 \in f_{\omega_1}(f_{\omega_0}(x_0)), x_3 \in f_{\omega_2}(f_{\omega_1}(f_{\omega_0}(x_0))), \\ x_4 \in f_{\omega_3}(f_{\omega_2}(f_{\omega_1}(f_{\omega_0}(x_0)))) \dots \text{ とできる.} \end{cases}$$

ここで、各 X_λ は事象を表し、その事象からなる時系列 $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$ のことを現象と見なす。そして、初期値 x_0 により $x_0 \in \omega_0, x_1 \in f_{\omega_0}(x_0), x_2 \in f_{\omega_1}(f_{\omega_0}(x_0)), \dots$ とできることを、その現象が認識可能であることを表し（すなわち、写像族 $\{f_{X_\lambda} : X_\lambda \rightarrow X, \lambda \in \Lambda\}$ は認識装置を意味する）、そのようなものの組 $(X, \{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}, \{f_{X_\lambda} : X_\lambda \rightarrow X, \lambda \in \Lambda\})$ （すなわち認識可能な現象）のことを世界としてとらえる。なお、Primitive Chaos に幾つかの性質を付加することにより、「任意の素周期をもった周期点の存在」、「周期点の稠密性」、「初期値鋭敏性」、「稠密な軌道の存在」、「位相推移性」といったカオスの性質が現れる [11]。そのような意味で Primitive Chaos は原初的なカオスであ

るが、決定論と非決定論とが不可分にもつれあっている世界観を表すものでもある。このモデルのもとで以下の命題を適用することにより、世界認識に対する興味深い考察が得られる。

定理 2 [9] X を nondegenerate Peano continuum とすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、直径が ε 未満の nondegenerate Peano subcontinuum からなる X の被覆 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ が存在する。そして各 i に対して、任意の m 個の点 $x_1, x_2, \dots, x_m \in X_i$ と $y_1, y_2, \dots, y_m \in X$ に対して、連続全射 $f_{X_i} : X_i \rightarrow X$ が存在して、各 j に対して $f_{X_i}(x_j) = y_j$ が成り立ち、性質 (P) が満たされる。

定理 3 [12] X を Cantor set とすると、任意の自然数 n に対して、clopen set からなる X の直和分割 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ が存在して、各 i に対して連続全射 $f_{X_i} : X_i \rightarrow X$ が存在して、性質 (P) が満たされる。

参考文献

- [1] 小笠原義仁, ものの見方としての位相空間論入門, 培風館, 2011.
- [2] 小笠原義仁, 立ち現れる世界の数学的記述について—トポロジーとカオスを援用して, こころの科学とエピステモロジー, Vol. 3, pp. 6-12, 2021.
- [3] 小笠原義仁, トポロジーと呼ばれる言語について—その開かれた可能性に向けて, こころの科学とエピステモロジー, Vol. 3, pp. 48-57, 2021.
- [4] 小笠原義仁, 言語としてのトポロジーについて—トポロジカルに記述された世界の変容, こころの科学とエピステモロジー, Vol. 4, pp. 46-63, 2022.
- [5] 小笠原義仁, Primitive Chaos とは何か?, こころの科学とエピステモロジー, Vol. 4, pp. 71-80, 2022.
- [6] 小笠原義仁, トポロジカルな観点から見た Primitive Chaos, こころの科学とエピステモロジー, Vol. 5, pp. 118-126, 2023.
- [7] 小笠原義仁, AI に心は存在するのか?, こころの科学とエピステモロジー, Vol. 6, pp. 60-67, 2024.
- [8] Y. I. Manin, Mathematics as metaphor: selected essays of Yuri I. Manin (Collected Works), American Mathematical Society, 2007.
- [9] Y. Ogasawara, Sufficient conditions for the existence of a primitive chaotic behavior, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 79, pp. 15002, 2010.
- [10] Y. Ogasawara and S. Oishi, Addendum to “Sufficient conditions for the existence of a primitive chaotic behavior”, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 80, p. 67002, 2011.
- [11] Y. Ogasawara and S. Oishi, Consideration of a primitive chaos, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 81, pp. 103001, 2012.
- [12] Y. Ogasawara and S. Oishi, Characteristic spaces emerging from primitive chaos, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 83, pp. 014001, 2014.
- [13] Y. Ogasawara and S. Oishi, A structure behind primitive chaos, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 84, pp. 064007, 2015.

PINN を用いた SIR カトリエルモデルの係数早期決定における変分ネットワークの導入

Introduction of Variational Networks in Early Identification Coefficients of SIR Katriel Model with PINN

小池 竜太郎 (Ryutaro Koike)¹, 佐野 英樹 (Hidei Sano)²,

^{1,2} 神戸大学システム情報学研究科 (Kobe University, Graduate School of System Informatics)

e-mail : 246x029x@gsuite.kobe-u.ac.jp, sano@crystal.kobe-u.ac.jp

1 はじめに

本稿では、再感染項を考慮した SIR モデルの一つであるカトリエルモデル [1] に対して、変分ネットワークを用いた Physics-informed neural networks (PINN) による係数決定問題を取り上げる。これまで筆者は変分埋め込み法 [2] を用いたカトリエルモデルの係数決定に関する研究を行ってきたが、特定の条件下以外では推定ができなかった [3]。一方、近年 SIR モデルに Physics-informed machine learning (PIML) の一種である Physics-informed neural networks (PINN) を応用させる研究が報告されている [4]。カトリエルモデルは再感染率の値によって感染人口はゼロ以外の平衡状態を持ち [1]、上述の通り逆問題を解くことが難しく、今回の研究に PINN による求解を応用させようと考えた。

本研究では感受性人口 S 、感染人口 I 、免疫獲得人口 R の初期時刻、終端時刻におけるそれぞれの値、そしていくつかの観測値を用いて係数の決定を行う。今回用いる観測値は I のみであり、 S , R は用いない。また、通常の PINN ではなく、新たに変分ネットワークを追加することにより、係数決定の精度向上を試みた。

2 SIR カトリエルモデル

今回考える SIR カトリエルモデルは以下の形で記述される感染症モデルである。

$$S' = -aSI \quad (1)$$

$$I' = aSI + cRI - bI \quad (2)$$

$$R' = -cRI + bI \quad (3)$$

ここで、 S は感受性人口、 I は感染人口、 R は免疫獲得人口であり、 β は感染率、 γ は回復率、 σ は感染率と再感染率の積である。ここで、 a, b の推定に対して c の推定は難しい問題である。

3 PINN

近年 PIML に関する研究が盛んにおこなわれている。その中でも今回用いるのは PINN という、物理法則に基づく機械学習手法の一種であり、物理法則を学習することにより、微分方程式の解を求める手法である。物理ソルバーでは解けない問題を解く手助けになることが期待されている。

4 変分ネットワーク

SIR カトリエルモデルの逆問題を変分法で解く際にオイラーラグランジュ方程式を解く必要がある。係数 a, b, c についての変分作用素を学習により近似する。SIR カトリエルモデルの逆問題を变分法を用いて求める試みはあったが [3]、安定して解を求めることができない状態であった。また、PINN を用いて SIR モデルの係数決定問題を解く研究は存在したが、再感染を考慮したモデルの係

数決定に関する研究は存在しなかった。筆者が通常の PINN を用いて SIR カトリエルモデルの逆問題の求解を試みたところ、モデルによって求解できない場合があるとわかった。

そこで筆者は変分ネットワークを導入することで S , I , R の値を修正することで安定して係数を決定できることを目指した。

5 係数決定

まず、通常の PINN について考える。PINN は時刻 t を入力として、 S , I , R を出力とするネットワーク NN_{sir} と a , b , c を出力とするネットワーク NN_{abc} からなる。その後出力された S , I , R を変分ネットワークの入力として利用し、出力を係数 a' , b' , c' とする。PINN より出力された S , I , R と変分ネットワークにより出力された a' , b' , c' を用いて変分誤差の計算を行う。最適化目的関数 (観測データの誤差) E_{observed} 、微分方程式を満たすかを示す誤差である ODE 損失関数 E_{ode} 、変分誤差 $E_{\text{invariant}}$ のそれぞれに係数 λ_{ob} , λ_{od} , λ_{i} をかけてそれぞれ足し合わせた評価関数 L_{total} を最小化する形で学習を行う。

6 数値例と結果

一例として各係数の値を、 $a = 0.35$, $b = 0.2$, $c = 0.07$ とし、通常の PINN と今回の提案法をそれぞれ用いて 10 万回計算を行った後の結果を以下に示す。ここで、青線、オレンジ線、緑線はそれぞれ a , b , c を示している。これは一例であり、詳細は当日口頭で説明する。

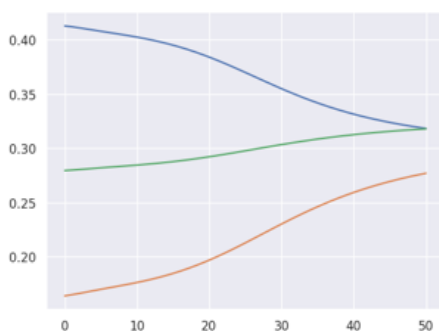


図 1: 通常の PINN

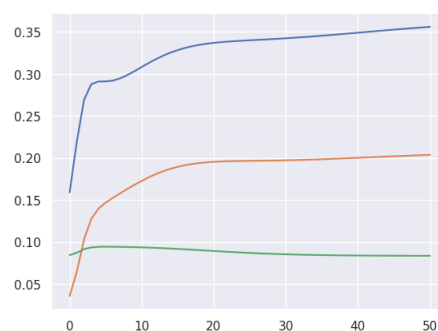


図 2: 変分ネットを含む PINN

参考文献

- [1] G. Katriel, *Epidemics with partial immunity to reinfection*, *Mathematical Biosciences*, Vol. 228, pp. 153–159 (2010)
- [2] T.T. Marinov, R.S. Marinova, J. Omojola, M. Jackson, *Inverse problem for coefficient identification in SIR epidemic models*, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 67, pp. 2218–2227 (2014)
- [3] 小池 竜太郎, 佐野 英樹, 変分埋め込み法を用いた SIR カトリエルモデルの係数決定, 第 67 回自動制御連合講演会予稿集, pp. 1047–1050 (2024)
- [4] S. Han, L. Stelz, H. Stoecker, L. Wang, K. Zhou, *Approaching epidemiological dynamics of COVID-19 with physics-informed neural networks*, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 361, paper no. 106671 (2024)

フィッシャー方程式の資源分布依存性

Resource Distribution Dependence in the Fisher Equation

渡部 悠人 (Yuto Watanabe)¹, 山崎 義弘 (Yoshihiro Yamazaki)²,
^{1,2} 早稲田大学大学院先進理工学研究科物理学及応用物理学専攻 (School of Advanced Science
 and Engineering, Waseda University)
 e-mail : watanabe3y@ruri.waseda.jp

1 概要

先行研究として、ロジスティック方程式を反応拡散系に拡張したフィッシャー方程式において、その環境収容力の項を資源分布関数として導入し、生物数を最大化させるような資源分布関数の形を示した柳田、永原の結果がある。この先行研究では、生物数を最大化させる資源分布は bang-bang type であることが証明されている。本発表では、生物数の資源分布に対する空間依存性に着目し、資源分布が境界付近にあるとき生物数が最大化することを報告する。

2 先行研究

フィッシャー方程式に空間依存する資源分布関数を導入し、その生物数を最大化させるような資源分布の関数形を求めた研究として、永原 [1] の結果がある。永原 [1] によると、以下の系

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) + u(x,t)(m(x) - u(x,t)) & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) \geq 0, u(x,0) \not\equiv 0 & \text{in } \bar{\Omega} \end{cases} \quad (1)$$

において $m(x)$ は資源分布関数を表し、ロジスティック方程式の環境収容力を置き換えたものとしても理解できる。ただし、 Ω は \mathbb{R}^N 上の有界領域、 ν はその境界の法線方向の微分を表し、二つ目の式は反射壁境界条件を示す。この系において、資源分布関数 $m(x)$ が、3つの条件

- (1) $\underline{m}(x) \leq m(x) \leq \overline{m}(x)$ a.e. in Ω
- (2) $\int_{\Omega} m(x) dx \leq M$
- (3) $u(x,t) \not\equiv 0$ は不安定

を満たすとき、 $\int_{\Omega} u(x,t) dx$ を最大化させる $m(x)$ は bang-bang type であると導いた。ここで、bang-bang type とは

$$m(x) = \overline{m}(x)\chi_E + \underline{m}(x)\chi_{\Omega \setminus E}$$

の形でかける関数である。 χ は特性関数、 $E \subset \Omega$ は Ω 内のある領域を示す。

3 モデル

我々は、 Ω を実数 1 次元上の有界領域として、式 (1) の数値計算を行った。実際、空間依存性のある資源分布 $m(x)$ として、以下の式を用いた。

$$m(x) = m_0 + \theta[-(x-a)(x-a-b)](m_1 - m_0)$$

ただし、 $\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{where } x > 0 \\ 0 & \text{where } x < 0 \end{cases}$ なる階段関数であり、 $m_0, m_1 a, b$ は正の数である。

$m(x)$ にはパラメータ a が含まれており、我々は u の総量 $\int u dx$ のパラメータ依存性について調べた。

4 結果

$u(x)$ の定常解に対する $m(x)$ の依存性を示した図が図 1 となる。図 2 は u の総量 $\int u dx$ のパラメータ依存性を示している。

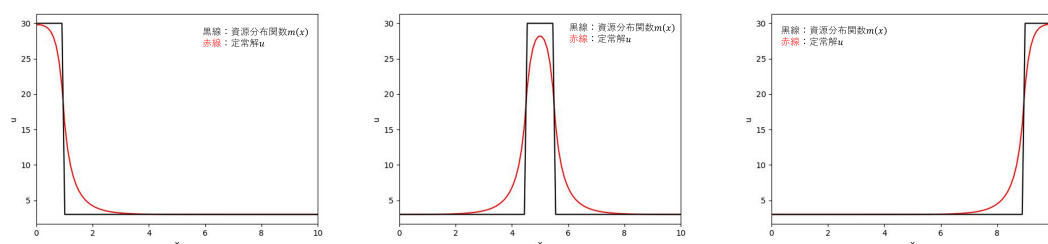


図 1. $u(x)$ の a 依存性 (b は 1 に固定した)

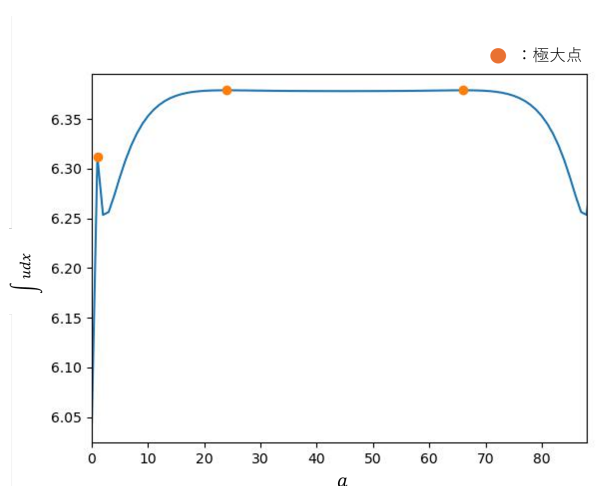


図 2. $\int u dx$ の a 依存性 (b は 1 に固定した)

図 2 より、 u の総量 $\int u dx$ はパラメータを動かしていくと、ある場所まで減少し、そこから領域の中央にかけて増加していくような変化が見れた。本発表ではこのような変化に対する議論を行う。

参考文献

- [1] K.Nagahara and E.Yanagida:Maximization of the total population in a reaction–diffusion model with logistic growth,Calculus of Variations and Partial Differential Equations.**57**(2018)

複素準周期性をもつヘルムホルツ方程式に対する数理解析基盤の構築

Establishment of a Mathematical Analysis Framework for the Helmholtz Equation with Complex Quasi-Periodicity

森下 敬悟 (Keigo Morishita),

東北大学大学院理学研究科数学専攻 (Graduate school of science, Tohoku university)

e-mail : keigo.morishita.r7@dc.tohoku.ac.jp

1 概要

周期構造による波の散乱では、解が準周期性を満たすことが知られている。複素数値の Bloch 波数は、従来アンテナ工学などで活用されてきたが、近年では周期構造により生じる局在波 (Rayleigh-Bloch 波) の解析にも自然に現れることが示されている。本研究では、このような複素準周期的境界条件を伴うヘルムホルツ方程式に対して、対応するグリーン関数を構成するとともに、well-posedness を関数解析の枠組みで証明した。

2 周期構造による波の散乱

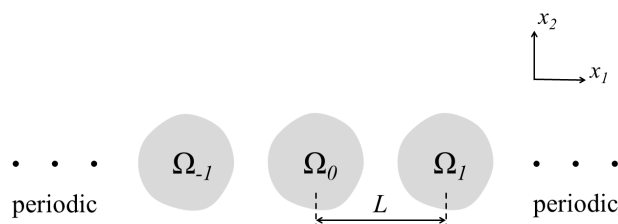


図 1. \mathbb{R}^2 上の 1 次元的な周期構造

図 1 のような \mathbb{R}^2 上の 1 次元的な周期構造による時間調和な波の散乱を考える (音響波, 水波, 電磁波など). このとき散乱波 u は以下を満たすことが知られている.

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \sqcup_{m \in \mathbb{Z}} \overline{\Omega_m} \\ u(x_1 + L, x_2) = e^{i\beta L} u(x_1, x_2) & \text{for all } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \sqcup_{m \in \mathbb{Z}} \overline{\Omega_m} \\ u \text{ or } \partial_\nu u = g & \text{on } \sqcup_{m \in \mathbb{Z}} \partial\Omega_m \\ \text{radiation condition} & \text{as } |x_2| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1)$$

ここで 2 行目は準周期性と呼ばれ, β は Bloch 波数と呼ばれる. 従来の研究では, β は実数値に制限されてきた.

3 複素準周期性: $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

本研究の目的は, Bloch 波数 β を複素数に拡張した場合の (1) に対し, 数理解析の基盤を構築することである. 図 1 のような周期構造に沿って伝播し, 周期構造から離れる方向へ指数的に減衰する局在波は Rayleigh-Bloch 波 (以下 RB 波) と呼ばれ, この現象は数学的には, $g = 0$ の条件下で $|x_2|$ の増加方向に指数減衰する (1) の非自明解 u として定式化される. 従来 Bloch 波数 β は実数に制限されてきたが, 近年では, 遮断周波数以上の波数曲線の挙動解析 [1] や, 周期構造による散乱共鳴現象の原理解明 [2] において, β を複素化した (1) が用いられ始めている. 本研究では, (1) における β

を複素化した設定下で、これまで未解決であったグリーン関数の存在や解の存在・一意性を数学的に証明した。一連の研究は、将来的には周期構造を利用したメタマテリアル設計などへの応用が期待され、例えば共振器やレーザーなどの性能向上が見込まれる [3]。

4 主結果

本研究では、複素準周期的境界条件を伴うヘルムホルツ方程式 (1) に対して、対応するグリーン関数を構成し (定理 1)、解の存在と一意性についての考察を得た (定理 2)。

定理 1 (グリーン関数の構成) $\forall m \in \mathbb{Z}; (\beta + \frac{2\pi m}{L})^2 - k^2 \neq 0$ をみたす任意の $\beta \in \mathbb{C}$ に対して、

$$G_\beta(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2i\beta_m L} e^{ik_m x_1 + i\beta_m |x_2|}, \quad (2)$$

は、任意の $p \in [1, \infty)$ に対して $L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)$ 収束する級数であり、(1) に対応するグリーン関数である。ただし $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(Lm, 0) \mid m \in \mathbb{Z}\}$, $k_m = \beta + \frac{2\pi m}{L}$, $\beta_m = i\sqrt{|k_m^2 - k^2|}e^{\frac{i}{2}\text{Arg}[k_m^2 - k^2]}$ で偏角 Arg の主値は $[-\pi, \pi)$ とする。

ここで、 x を固定したとき $G_\beta(x)$ は β についての正則関数であり、定理 1 は G_β を解析接続して得られるリーマン面上の任意の β にまで拡張可能である。

次に、(1) の解 u の存在と一意性について、次の結果を得た。

定理 2 (解の存在と一意性) 任意の $\beta \in \mathbb{C}$ に対して、 \mathbb{C} 上のある離散集合 D_β が存在して、任意の $k \in \mathbb{C} \setminus D_\beta$ と $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ (もしくは $H^{-1/2}(\partial\Omega)$) に対して、(1) は一意解 u を持つ。また、解空間は任意の k, β, g に対して空集合もしくは有限次元アフィン空間を成す。

ただし、関数空間として準周期的境界条件付きソボレフ空間を先行研究 [4] と同様に用いた。定理 2 についても、(2) を k について解析接続して得られるリーマン面で \mathbb{C} を置き換えた場合へ拡張可能である。

謝辞 本研究は、東北大学グローバル萩奨学金の助成を受けている。

参考文献

- [1] Bennetts, L. G., Peter, M. A., Rayleigh–Bloch waves above the cutoff. *Journal of Fluid Mechanics*. *Journal of Fluid Mechanics*, 940, A35. (2022)
- [2] Chaplain, G. J., Hawkins, S. C., Peter, M. A., Bennetts, L. G., Starkey, T. A., Acoustic lattice resonances and generalised Rayleigh–Bloch waves. *Communications Physics*, 8(1), 37. (2025)
- [3] Joseph, S., Pandey, S., Sarkar, S., Joseph, J., Bound states in the continuum in resonant nanostructures: an overview of engineered materials for tailored applications. *Nanophotonics*, 10(17), 4175-4207. (2021)
- [4] Elschner, J., and G. Schmidt., Diffraction in periodic structures and optimal design of binary gratings. Part I: direct problems and gradient formulas, *Mathematical methods in the applied sciences* 21.14, 1297-1342. (1998)